

Diferansiyel Denklemler Vize Sınavı konularıyla ilgili çözüm örnekleri.

1. Eğriler ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz:

a) $x^2 + 2x = (y - c)^2 + 2$, $c \in \mathbb{R}$ b) $y^2 = c_1 x^2 + c_2 e^x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Çözüm:

a) Denklemin her iki tarafının x değişkenine göre türevini alalım.

$$\begin{cases} x^2 + 2x = (y - c)^2 + 2 \\ 2x + 2 = 2(y - c)y' \end{cases} \text{ sisteminden } c \text{ sabitini yok edelim. Bu amaçla birinci denklemin her iki}$$

tarafını y'^2 'ye, ikinci denklemin her iki tarafının karesini alalım. Elde edilen

$$\begin{cases} (x^2 + 2x)y'^2 = (y - c)^2 y'^2 + 2y'^2 \\ (x + 1)^2 = (y - c)^2 (y')^2 \end{cases} \text{ sisteminden taraf-tarafa çıkarma yoluyla}$$

$(x^2 + 2x - 2)y'^2 = (x + 1)^2$ denklemi elde edilir. Bu, eğriler ailesinin diferansiyel denklemdir.

b) $y^2 = c_1 x^2 + c_2 e^x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Çözüm: Denklemin her iki tarafının x değişkenine göre iki kez türevini alalım ve elde edilen denklemlerden

$$\begin{cases} y^2 = c_1 x^2 + c_2 e^x \\ 2yy' = 2c_1 x + c_2 e^x \\ 2(y'^2 + yy'') = 2c_1 + c_2 e^x \end{cases} \text{ sistemini oluşturalım. Bu sistemden } c_1, c_2 \text{ sabitlerini yok etmek için}$$

taraf-tarafa çıkarma ile elde edilen $\begin{cases} y^2 - 2yy' = c_1 x(x - 2) \\ y'^2 + yy'' - yy' = c_1(1 - x) \end{cases}$ sisteminin birinci denklemini

$(1 - x)$ 'e, ikinci denklemini $x(x - 2)$ 'ye çarparak ardından taraf-tarafa çıkaralım. Buna göre eğriler ailesinin diferansiyel denklemi $x(x - 2)(y'^2 + yy'' - yy') = (1 - x)(y^2 - 2yy')$ şeklinde bulunur.

2. İzoklin yöntemiyle $y' = 2yx$ denkleminin integral eğrilerini yaklaşık olarak çiziniz.

Çözüm: $f(x, y) = 2yx$ fonksiyonu $D(f) = \mathbb{R}^2$ kümesinde tanımlıdır. O halde diferansiyel denklemin izoklin eğrilerinin denklemi $2yx = c$ şeklinde yazılır. Bu $y = c/2yx$, $c \in \mathbb{R}$ hiperboller ailesidir. c 'için birkaç somut değeri için izoklinleri çizip bu eğrilerin noktalarından geçen, alanın doğrultusunu belirleyen $\tan \alpha = c$ eğimli küçük uzunluklu doğru parçaları çizelim. Her hangi noktadan geçen integral eğrisini, her izoklini kestiği noktada bu noktadaki doğru parçasına teğet olacak şekilde yaklaşık (tahmin) olarak çizelim. Buna göre şekildeki gibi integral eğrileri meydana çıkar.

$$c = 0 \Rightarrow \tan \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

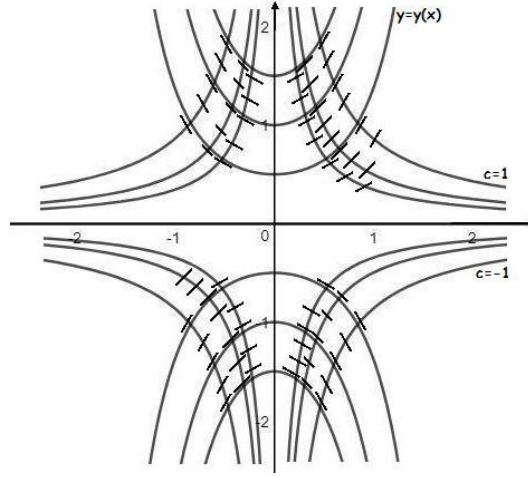
$$c = 1 \Rightarrow \tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$c = 1 \Rightarrow \tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$c = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \tan \alpha = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{3}$$

$$c = -1 \Rightarrow \tan \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{6}$$



3. $(1 + \cos x)yy' - (1 + y^2)\sin x = 0$ denklemini değişkenlerine ayırarak çözünüz.

Çözüm: $1 + y^2 \neq 0$ olduğuna göre denklemin her iki tarafı $(1 + y^2)(1 + \cos x) \neq 0$ ifadesine

bölünerek $\frac{(1 + \cos x)yy'}{(1 + y^2)(1 + \cos x)} - \frac{(1 + y^2)\sin x}{(1 + y^2)(1 + \cos x)} = 0$ veya $\frac{yy'}{1 + y^2} - \frac{\sin x}{(1 + \cos x)} = 0$ denklemi elde

edilir. Değişkenlerine ayrılmış bu denklemi $\frac{ydy}{1 + y^2} - \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x)} = 0$ şeklinde yazarak her iki tarafı

integrallersek $\int \frac{ydy}{1 + y^2} - \int \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{d(1 + y^2)}{1 + y^2} + \int \frac{d(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)} = \int 0 dx \Rightarrow$

$\frac{1}{2} \int \frac{d(1 + y^2)}{1 + y^2} + \int \frac{d(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)} = \int 0 dx \Rightarrow \frac{1}{2} \ln|1 + y^2| + \ln|1 + \cos x| = c_1, c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\frac{1}{2} \ln(1 + y^2) + \ln(1 + \cos x) = c_1, c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln \sqrt{1 + y^2} (1 + \cos x) = c_1 \Rightarrow \sqrt{1 + y^2} (1 + \cos x) = e^{c_1}, c_1 \in \mathbb{R}$

elde edilir. Buradan $1 + y^2 = \frac{e^{2c_1}}{(1 + \cos x)^2}, c_1 \in \mathbb{R}$ veya $e^{2c_1} = c > 0$ olmak üzere

$1 + y^2 = \frac{c}{(1 + \cos x)^2}, \left(c > 0, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right)$ genel integrali bulunur.

4. $2y' - (y^2 - 2y)e^{x^2} = 0$ denkleminin $y(0) = 1$ başlangıç değer şartını sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm: $y^2 - 2y \neq 0$ sayarak denklemi değişkenlerine ayırılım ve her iki tarafının integralini alalım. Buna göre

$2 \frac{dy}{dx} = (y^2 - 2y)xe^{x^2} \Rightarrow \frac{2dy}{y(y-2)} = e^{x^2} dx \Rightarrow \int \frac{2dy}{y(y-2)} = \int e^{x^2} dx \Rightarrow \int \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y} \right) dy = \int_0^x e^{t^2} dt + \ln|c|$

$\Rightarrow \ln|y-2| - \ln|y| = \int_0^x e^{t^2} dt + \ln|c|, c \neq 0 \Rightarrow \ln \left| \frac{y-2}{y} \right| = \ln \left| ce^{\int_0^x e^{t^2} dt} \right| \Rightarrow \left| \frac{y-2}{y} \right| = \left| ce^{\int_0^x e^{t^2} dt} \right|$ veya

$$1 - \frac{2}{y} = c \cdot e^{\int_0^x e^{t^2} dt}, \quad c \neq 0 \Rightarrow y = \frac{2}{1 - ce^{\int_0^x e^{t^2} dt}}, \quad c \neq 0 \text{ genel çözümü elde edilir. } c = 0 \text{ için elde edilen}$$

$y = 2$ sabit fonksiyonun da diferansiyel denklemin çözümüdür. Gerçekten

$$2(2)' - (2^2 - 2 \cdot 2)e^{x^2} = 0 - 0 \cdot e^{x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R} \text{ sağlanır.}$$

$y^2 - 2y = 0$ iken bulunan $y_1 = 0, y_2 = 2$ köklerine karşılık diferansiyel denklemin $y = 0$ ve $y = 2$ çözümleri vardır. $y = 0$ çözümü de $c = \pm\infty$ için genel çözümden elde edilir. $y(0) = 1$ başlangıç değer şartını sağlayan çözümü bulmak için

$$y(0) = \frac{2}{1 - ce^{\int_0^0 e^{t^2} dt}} = \frac{2}{1 - c \cdot e^0} = 1 \Rightarrow \frac{2}{1 - c} = 1 \text{ şartı dikkate alarak } c = -1 \text{ bulunur. O halde}$$

$$\text{başlangıç değer probleminin çözümü } y = \frac{2}{1 + e^{\int_0^x e^{t^2} dt}} \text{ olarak elde edilir.}$$

5. $(x^3 + y^3)y' = x^2y$ denkleminin homojen olduğunu gösteriniz ve genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Denklemi $y' = \frac{x^2y}{x^3 + y^3}$ şeklinde yazalım ve $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^3 + y^3}$ fonksiyonun tanım

kümesinde sıfır dereceden homojen fonksiyon olduğunu kontrol edelim.

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 \neq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -x\} \text{ olmak üzere her } (x, y) \in D(f) \text{ ve}$$

$$(tx, ty) \in D(f) \text{ için } f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 ty}{(tx)^3 + (ty)^3} = \frac{t^3 x^2 y}{t^3 (x^3 + y^3)} = \frac{x^2 y}{x^3 + y^3} = f(x, y) \text{ olduğundan } f(x, y)$$

fonksiyonu sıfır dereceden homojen fonksiyondur, dolayısıyla denklem de homojen denklemdir.

$y(x) = xu(x)$, $u \neq -1$, $y' = u + xu'$ şeklinde değiştirme yaparak diferansiyel denklemi yeni bilinmeyen $u = u(x)$ fonksiyonuna nazaran

$$u + xu' = \frac{x^2 ux}{x^3 + (xu)^3} \Rightarrow u + xu' = \frac{u}{1 + u^3} \Rightarrow xu' = \frac{u}{1 + u^3} - u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{-u^4}{1 + u^3}, u \neq -1 \text{ denkleme}$$

dönüştürelim. Bu değişkenlerine ayrılabilir denklemdir. $u \neq 0, u \neq -1$ sayarak, bilinen yöntemle integrallersek

$$\frac{(1 + u^3) du}{u^4} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \left(\frac{1}{u^4} + \frac{1}{u} \right) du = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int u^{-4} du + \int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{3u^3} + \ln|u| = -\ln|x| + \ln|c|, c \neq 0$$

veya

$$\ln|xu| - \frac{1}{3u^3} = c \Rightarrow \ln|y| - \frac{1}{3\left(\frac{y}{x}\right)^3} = \ln|c| \Rightarrow \ln|y| = \ln|c| + \frac{x^3}{3y^3} \Rightarrow |y| = |c| e^{\frac{x^3}{3y^3}} \Rightarrow y = ce^{\frac{x^3}{3y^3}}, c \neq 0$$

genel integrali elde edilir. Bu denklemden $c = 0$ için elde edilen, $u = 0$ durumuna karşılık gelen $y = 0$ fonksiyonu da denklemin çözümüdür. Böylelikle diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = ce^{\frac{x^3}{3y^3}}, c \in \mathbb{R} \text{ ailesidir.}$$

6. $(y^2 + 1)dx + (2xy - 1)dy = 0$ denklemini kısa yoldan çözünüz.

Çözüm: Bilinen formüllere dayanılarak denklemin sol tarafındaki ifade tam diferansiyel şeklinde gösterilerek

$$(y^2 + 1)dx + (2xy - 1)dy = 0 \Rightarrow y^2 dx + dx + 2xy dy - dy = 0 \Rightarrow y^2 dx + 2xy dy + d(x - y) = 0 \Rightarrow y^2 dx + x d(y^2) + d(x - y) = 0 \Rightarrow d(xy^2) + d(x - y) = 0 \Rightarrow d(xy^2 + x - y) = 0 \Rightarrow xy^2 + x - y = c$$

elde edilir. Buna göre denklemin genel integrali $xy^2 + x - y = c$, $c \in \mathbb{R}$ olur.

7. $xy' + 3y = 4x^2 y^2$ Bernoulli denklemini çözünüz.

Çözüm: Denklemin her iki tarafını y^2 'ye bölüp $z = \frac{1}{y}$, $z = z(x)$ değiştirilmesi yapılırsa

$$z' = -\frac{y'}{y^2} \text{ olmak üzere } x \frac{y'}{y^2} + 3 \frac{y}{y^2} = 4x^2 \Rightarrow x \frac{y'}{y^2} + \frac{3}{y} = 4x^2 \Rightarrow -xz' + 3z = 4x^2 \Rightarrow z' - \frac{3}{x}z = -4x$$

lineer denklemi elde edilir. *Lagrange* yöntemine göre çözümü $z = c(x)e^{\int \frac{3}{x} dx}$ şeklinde arayalım.

Buna göre, $z' = [c(x)e^{3 \ln|x|}]' = c'(x)e^{3 \ln|x|} + c(x)e^{3 \ln|x|} \frac{3}{x} = c'(x)|x|^3 + c(x)|x|^3 \frac{3}{x}$ dikkate alınarak

denklem $c'(x)e^{3 \ln|x|} + c(x)e^{3 \ln|x|} \frac{3}{x} - \frac{3}{x}c(x)e^{3 \ln|x|} = -4x \Rightarrow c'(x)|x|^3 = -4x$ şekline indirgenir. Bu denklemin genel çözümü

$$c(x) = \int c'(x)dx = -4 \int \frac{x}{|x|^3} dx = -4(\text{sign}x) \int \frac{x}{x^3} dx = -4(\text{sign}x) \int \frac{dx}{x^2} = \frac{4}{x}(\text{sign}x) + c = \frac{4}{|x|} + c \text{ olarak}$$

bulunur. O halde $z = c(x)e^{\int \frac{3}{x} dx} = \left(\frac{4}{|x|} + c\right)|x|^3 = 4x^2 + c|x|^3$, $x \neq 0$ bulunur. Bu çözümde, $x > 0$ ve

$x < 0$ durumlarında c 'yi de x ile aynı işaretli alırsak diferansiyel denklemin $x = 0$ noktasında sürekli ve türevlenebilir olan çözümleri $z = cx^3 + 4x^2$, $c \in \mathbb{R}$ şeklinde bulunur. Eski değişkene

geçilirse diferansiyel denklemin genel çözümü $y = \frac{1}{z} \Rightarrow y = \frac{1}{cx^3 + 4x^2}$, $c \in \mathbb{R}$ şeklinde elde edilir. Denklemin $y = 0$ çözümü bu aileden $c = \pm\infty$ için elde edilir ve özel çözümdür..

8. $y' = y^2 - 2xy + x^2 - 3$ Riccati denkleminin bir özel çözümünü seçerek genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Riccati denkleminin bir özel çözümünü $y = ax + b$ şeklinde arayalım. Bu denklemde dikkate alınırsa

$$(ax + b)' = (ax + b)^2 - 2x(ax + b) + x^2 - 3 \Rightarrow a = a^2 x^2 + 2abx + b^2 - 2ax^2 - 2bx + x^2 - 3 \Rightarrow (a^2 - 2a + 1)x^2 + 2(ab - b)x + b^2 - a - 3 = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0, ab - b = 0, b^2 - a - 3 = 0 \Rightarrow a = 1, b = \pm 2 \text{ elde edilir. Böylece denklemin } y = x + 2 \text{ ve } y = x - 2 \text{ özel çözümleri bulunur.}$$

$y = x + 2$ çözümünü kullanarak $y = x + 2 + \frac{1}{u}$, $u = u(x)$ değiştirilmesi ile $y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$ dikkate alınmakla denklem

$$1 - \frac{u'}{u^2} = \left(x + 2 + \frac{1}{u}\right)^2 - 2x\left(x + 2 + \frac{1}{u}\right) + x^2 - 3 \Rightarrow 1 - \frac{u'}{u^2} = x^2 + 4x + 4 + 2\left(x + 2\right)\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} - 2x^2 - 4x - \frac{2x}{u} + x^2 - 3 \Rightarrow -\frac{u'}{u^2} = \frac{4}{u} + \frac{1}{u^2} \Rightarrow u' + 4u = -1 \text{ lineer denklemine indirgenir. Bu denklemin genel}$$

çözümü $u = e^{-\int 4dx} \left(c - \int 1 \cdot e^{\int 4dx} dx \right) = e^{-4x} \left(c - \int e^{4x} dx \right) = e^{-4x} \left(c - \frac{e^{4x}}{4} \right) = ce^{-4x} - \frac{1}{4}$, $c \in \mathbb{R}$ olarak

bulunur. O halde *Riccati* denklemini genel çözümü $y = x + 2 + \frac{1}{u} = x + 2 + \frac{1}{ce^{-4x} - \frac{1}{4}}$ veya

$$y = x + 2 + \frac{e^{4x}}{c - \frac{e^{4x}}{4}}, \quad c \in \mathbb{R} \text{ şeklinde bulunur.}$$

9. $y = z^m$ değişken değiştirmesi uygulayarak $(3 + x^2 y^2) y' + y^3 x = 0$ denklemini homojen denkleme dönüştürerek çözünüz.

Çözüm: $y = z^m$, $y' = mz^{m-1} z'$ olmak üzere değişken değiştirmesi uygulayarak denklem

$(3 + x^2 z^{2m}) mz^{m-1} z' + z^{3m} x = 0 \Rightarrow m(3z^{m-1} + x^2 z^{3m-1}) z' + z^{3m} x = 0$ şeklinde yazılabilir. Bu

denklemin homojen denklem olması için $m-1 = 3m+1 \Rightarrow m = -1$ olması yeterlidir. Buna göre

$y = z^{-1} = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$ için denklem $z' = \frac{z^{-3} x}{3z^{-2} + x^2 z^{-4}} \Rightarrow z' = \frac{zx}{3z^2 + x^2}$ şekline indirgenir. Bu homojen

denklem $z = xu$, $u = u(x)$, $u \neq 0$, $z' = u + xu'$ değiştirmesiyle

$$u + xu' = \frac{x^2 u}{3x^2 u^2 + x^2} \Rightarrow xu' = \frac{u}{3u^2 + 1} - u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{-3u^3}{3u^2 + 1} \text{ denklemine indirgenir.}$$

Değişkenlerine ayırıp integrallersek

$$\frac{3u^2 + 1}{3u^3} du = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{3u^3} \right) du = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|u| - \frac{1}{6u^2} = -\ln|x| - \ln|c|, \quad c \neq 0 \Rightarrow$$

$\ln|xu| = \frac{1}{6u^2} - \ln|c|$ genel integrali bulunur. $u = \frac{z}{x} = \frac{1}{xy}$ dikkate alınarak eski değişkene

dönülürse genel çözüm $\ln \left| \frac{1}{y} \right| = \frac{x^2 y^2}{6} + \ln|c| \Rightarrow |y| = \left| \frac{1}{c} \right| e^{-\frac{x^2 y^2}{6}} \Rightarrow y = c_1 e^{-\frac{x^2 y^2}{6}}, c_1 = \frac{1}{c} \neq 0$ şeklinde

yazılır. Buradan $y^2 e^{-\frac{x^2 y^2}{3}} = c_1^2, c_1 \in \mathbb{R}$ genel integrali bulunur. Bu denklemden $c_1 = 0$ için $y = 0$ çözüm de elde edilir.

10. Denklemlerin tam diferansiyel formu olduğunu gösteriniz ve çözünüz:

a) $\left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} \right) dx - \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} + 2y \right) dy = 0$

b) $(e^y + 2yx) dy = (2 \cos 2x - y^2) dx$ (yapay yöntemle).

Çözüm:

a) $P(x, y) = \frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}$, $Q(x, y) = -\left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} + 2y \right)$ fonksiyonları $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq 0\}$

bölgesinde tanımlı, $\forall (x, y) \in D$ noktasında sürekli ve sürekli $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} \right)'_y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$,

$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -\left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} + 2y\right)'_x = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$ kısmi türevlerine sahiptir. Ayrıca $\forall (x,y) \in D$ için

$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}\right)'_y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ olduğundan denklem tam diferansiyel formudur.

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} \\ \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} - 2y \end{cases} \text{ olacak şekilde } \Phi(x,y) \text{ fonksiyonu bulalım. Birinci denklemi } x$$

değişkenine göre integrallersek $\Phi(x,y) = \int \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} dx = \int \left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}\right) dx = -\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \varphi(y)$ elde

edilir. Burada $\varphi(y)$ tanım aralığında sürekli türeve sahip olan fonksiyondur. Her iki tarafın y

değişkenine göre diferansiyellersek $\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} + \varphi'(y) = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} - 2y \Rightarrow \varphi'(y) = -2y$

veya $\varphi(y) = -\int 2y dy = -y^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$ bulunur. Sonuçta

$\Phi(x,y) = -\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \varphi(y) = -\frac{y}{x} + \frac{x}{y} - y^2 + c$ bulunur. Buna göre diferansiyel denklemin genel

integrali $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} - y^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$ şeklinde elde edilir.

b) Denklemi standart formda $(2 \cos 2x - y^2) dx - (e^y + 2yx) dy = 0$ gibi yazalım. Dönüştürerek

$$2 \cos 2x dx - y^2 dx - e^y dy - 2yxdy = 0 \Rightarrow d \sin 2x - de^y - (xd(y^2) + y^2 dx) = 0 \Rightarrow d(\sin 2x - e^y - xy^2) = 0$$

şekline indirgeyelim. Buradan $\sin 2x - e^y - xy^2 = c$, $(x,y) \in D$, $c \in \mathbb{R}$ genel integrali bulunur.

11. $(xy + y^3) dx - x^2 dy = 0$ denklemini *integralleme çarpanı* yardımıyla çözünüz.

Çözüm: $P(x,y) = xy + y^3$, $Q(x,y) = -x^2$ fonksiyonları için $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = x + 3y^2$ ve

$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -2x$ kısmi türevleri her $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ noktasında var ve sürekli, ayrıca

$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = x + 3y^2 \neq -2x = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ olduğundan diferansiyel denklem tam diferansiyel formu

değildir. Diferansiyel denklemi tam diferansiyelli biçime indirmek için integralleme çarpanını

bulalım.
$$-\frac{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{P(x,y)} = -\frac{3x + 3y^2}{xy + y^3} = -\frac{3}{y}$$
 olduğundan denklemin

$\mu = \mu(y) = e^{-\int \frac{3}{y} dy} = e^{-3 \ln|y| + c} = \frac{c_1}{y^3}$ veya $c_1 = 1$ için $\mu = \mu(y) = \frac{1}{y^3}$ biçiminde integralleme çarpanı

vardır. Denklemin her iki tarafını integral çarpanına çarpalım ve elde edilen

$$\frac{(xy + y^3)}{y^3} dx - \frac{x^2}{y^3} dy = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{y^2} + 1\right) dx - \frac{x^2}{y^3} dy = 0 \text{ denklemini çözelim. Buna göre}$$

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = \frac{x}{y^2} + 1 \Rightarrow \Phi(x, y) = \int \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} dx = \int \left(\frac{x}{y^2} + 1 \right) dx = \frac{x^2}{2y^2} + x + \varphi(y) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^3} + \varphi'(y) = -\frac{x^2}{y^3} \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c \Rightarrow \Phi(x, y) = \frac{x^2}{2y^2} + x + c \text{ elde edilir. O}$$

halde denklemin genel integrali $\frac{x^2}{2y^2} + x = c$, $c \in \mathbb{R}$ şeklinde bulunur.

12. Diferansiyel denklemin tipini belirleyiniz ve uygun yöntemle çözünüz:

a) $(\sin x - 1)dy = (\sin x - y \cos x)dx$ b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y-2}$

Çözüm:

a) Denklemi $(\sin x - 1)\frac{dy}{dx} + y \cos x = -\sin x$ veya $\frac{dy}{dx} + \frac{\cos x}{\sin x - 1}y = \frac{\sin x}{\sin x - 1}$ şeklinde yazarak lineer diferansiyel denklem olduğu görülebilir. Genel çözümün formülüne göre

$$y = e^{-\int \frac{\cos x}{\sin x - 1} dx} \left(c + \int \frac{\sin x}{\sin x - 1} e^{\int \frac{\cos x}{\sin x - 1} dx} dx \right) = e^{-\ln|\sin x - 1|} \left(c + \int \frac{\sin x}{\sin x - 1} e^{\ln|\sin x - 1|} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{1 - \sin x} \left(c + \int \frac{\sin x (1 - \sin x)}{(\sin x - 1)} dx \right) = \frac{1}{1 - \sin x} \left(c - \int \sin x dx \right) = \frac{1}{1 - \sin x} (c + \cos x), \quad \text{veya}$$

$$y = \frac{c + \cos x}{1 - \sin x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad c \in \mathbb{R} \text{ genel çözümü bulunur.}$$

b) Denklemi homojen denkleme dönüştürmek için değişken değiştirme yapalım.

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \text{ sisteminin çözümünü } x = 1, y = 1 \text{ olarak } \begin{cases} x = t + 1 \\ y = u + 1 \end{cases}, \quad dx = dt, \quad dy = du$$

değiştirme ile diferansiyel denklemi $\frac{du}{dt} = \frac{u-t}{u+t}$ şekline indirgeyelim. $u = tz$, $z = z(t)$,

$u' = z + tz'$ değiştirmeyle diferansiyel denklem

$$z + tz' = \frac{tz - t}{tz + t} \Rightarrow z + tz' = \frac{z - 1}{z + 1} \Rightarrow tz' = \frac{z - 1}{z + 1} - z \Rightarrow t \frac{dz}{dt} = -\frac{z^2 + 1}{z + 1} \text{ denkleme dönüşüyor.}$$

$z^2 + 1 \neq 0$ olduğundan denklemin her iki tarafını $\frac{t(z^2 + 1)}{z + 1}$ ifadesine bölerek $\frac{z + 1}{z^2 + 1} dz = -\frac{dt}{t}$ gibi

yazalım ve integralleyelim. Buna göre $\int \frac{z + 1}{z^2 + 1} dz = -\int \frac{dt}{t} \Rightarrow \int \frac{z}{z^2 + 1} dz + \int \frac{1}{z^2 + 1} dz = -\int \frac{dt}{t} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \ln(z^2 + 1) + \arctan z = -\ln|t| + c \Rightarrow \ln|t| + \ln \sqrt{z^2 + 1} + \arctan z = c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ elde edilir. Burada}$$

$t = x - 1$, $u = y - 1$, $z = \frac{x - 1}{y - 1}$ dikkate alınırsa diferansiyel denklemin genel integrali

$$\ln|x - 1| + \ln \sqrt{\left(\frac{y - 1}{x - 1}\right)^2 + 1} + \arctan \frac{y - 1}{x - 1} = c \Rightarrow \ln|x - 1| + \ln \sqrt{\left(\frac{y - 1}{x - 1}\right)^2 + 1} + \arctan \frac{y - 1}{x - 1} = c \Rightarrow$$

$$\ln \sqrt{(y - 1)^2 + (x - 1)^2} + \arctan \frac{y - 1}{x - 1} = c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ şeklinde bulunur. Bu denklem}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = c_1 e^{-2 \arctan \frac{y - 1}{x - 1}}, \quad c_1 = e^{2c} > 0 \text{ şeklinde de yazılabilir.}$$