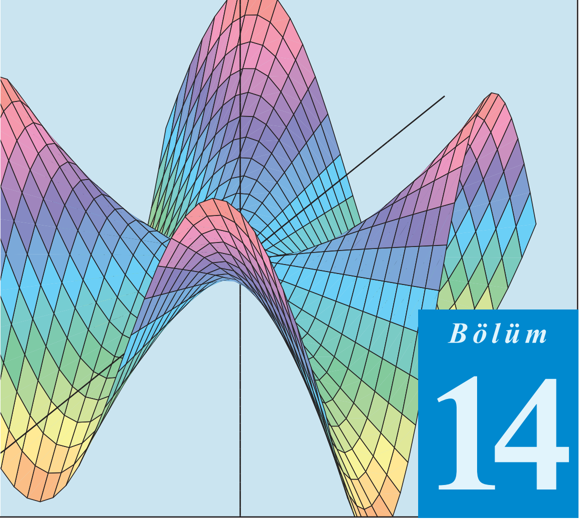


Bölüm

14 Kısmi Türevler

GİRİŞ Bir gerçek-dünya olayının araştırılmasında incelenen çokluk genelde iki veya daha çok bağımsız değişkene bağlıdır. Dolayısıyla, tek değişkenli fonksiyonların analizindeki temel fikirleri çok değişkenli fonksiyonlara genişletmeliyiz. Aslında kurallar aynı kalsa da analizleri daha zengindir. Değişkenlerin etkileşim yollarının farklılığı nedeniyle çok değişkenli fonksiyonların türevleri daha çeşitli ve daha ilginçtir. İntegrallerinin çok daha geniş uygulama alanları vardır. Birkaçından bahsetmek gerekirde, olasılık, istatistik, akışkanlar dinamiği ve elektik araştırmalarının hepsi doğal bir şekilde birden fazla değişkenli fonksiyonlara yol açarlar.

14.1 Çok Değişkenli Fonksiyonlar

Çoğu fonksiyon birden fazla bağımsız değişkene bağlıdır. $V = \pi r^2 h$ fonksiyonu, yarıçapı ve yüksekliğinden dik bir silindirin hacmini hesaplar. $f(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonu $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin $P(x, y)$ noktasının üzerindeki yüksekliğini P'nin iki koordinatından hesaplar. Dünya yüzeyindeki bir noktanın sıcaklığı T, enlemi x ve boylamı y'ye bağlıdır ve $T(x, y)$ yazarak ifade edilir. Bu bölümde, birden fazla bağımsız değişkenli fonksiyonları tanımlayacak ve grafiklerinin nasıl çizileceğini tartışacağız.

Çok değişkenli reel değerli fonksiyonlar tek değişkenli durumdakine benzer şekilde tanımlanırlar. Tanım kümeleri reel sayı ikililerinden (üçlülerinden, dörtlülerinden, n-lilerinden) oluşan kümeler, değer kümeleri ise şimdiye kadar çalışmış olduğumuz reel sayı kümeleridir.

TANIMLAR ***n* Bağımsız Değişkenli Fonksiyonlar**

D'nin reel sayılardan oluşan $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n–lilerinin bir kümesi olduğunu varsayın. D üzerinde **reel değerli** bir f **fonksiyonu**, D'deki her elemana bir

$$w = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

reel sayısı atayan bir kuraldır. D kümesi fonksiyonun **tanım kümesi**dir. f'nin aldığı w değerlerinin kümesi fonksiyonun **değer kümesi**dir. w sembolü f'nin bağımlı değişkenidir ve f'ye x_1'den x_n'e kadar olan n **bağımsız değişkenin** bir fonksiyonu denir. Ayrıca x'lere fonksiyonun **girdi değişkenleri**, w'ye de fonksiyonun **çıktı değişkeni** deriz.

f iki bağımsız değişkenli bir fonksiyon ise, genellikle bağımsız değişkenleri x ve y olarak adlandırır ve f'nin tanım kümesini xy-düzleminde bir bölge olarak gözümüzde canlandırırız. Üç bağımsız değişkenli bir fonksiyon için de değişkenlere x, y ve z der ve tanım kümesini uzayda bir bölge olarak düşünürüz.

Uygulamalarda, değişkenlerin neyi temsil ettiklerini bize hatırlatan harfler kullanmayı tercih ederiz. Bir dik silindirin hacminin, silindirin yarıçapının ve yüksekliğinin bir fonksiyonu olduğunu söylemek için, $V = f(r, h)$ yazabiliriz. Daha açık olmak gerekirse, $f(r, h)$ gösterimi yerine V'yi r ve h'nin değerlerinden hesaplayan bir formül koyabilir ve $V = \pi r^2 h$ yazabiliriz. Her iki durumda da, r ve h fonksiyonun bağımsız değişkenlerini, V de bağımlı değişkeni simgeleyecektir.

Her zamanki gibi, formüllerle tanımlanan fonksiyonları, bağımsız değişkenlerin değerlerini formülde yerine yazıp karşı gelen bağlı değişkenin değerini bularak hesaplarız.

ÖRNEK 1 Bir Fonksiyonu Hesaplamak

$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$'nin (3, 0, 4) noktasındaki değeri

$$f(3, 0, 4) = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

olarak bulunur. Bölüm 12.1'den f'yi Kartezyen uzay koordinatlarında orijinden (x, y, z) noktasına uzaklık fonksiyonu olarak hatırlıyoruz. ■

Tanım Kümeleri

Birden fazla değişkenli fonksiyonları tanımlarken, her zamanki gibi kompleks sayılara veya sıfırla bölmeye yol açan girdiler koymamaya çalışırız. $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ ise, y değeri x^2'den küçük olamaz. $f(x, y) = 1/(xy)$ ise, xy çarpımı sıfır olamaz. Bunların dışında, fonksiyonların tanım kümeleri tanımlayıcı kuralların reel sayı ürettikleri en büyük kümelerdir.

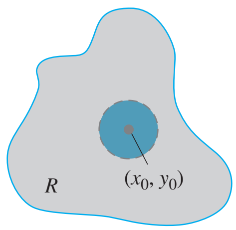
ÖRNEK 2(a) İki Değişkenli Fonksiyonlar

Fonksiyon	**Tanım kümesi**	**Değer Kümesi**
$w = \sqrt{y - x^2}$	$y \geq x^2$	$[0, \infty)$
$w = \dfrac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$w = \sin xy$	Tüm düzlem	$[-1, 1]$

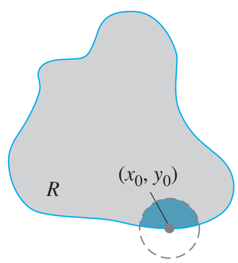
(b) Üç Değişkenli Fonksiyonlar

Fonksiyon	**Tanım kümesi**	**Değer Kümesi**
$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	Tüm düzlem	$[0, \infty)$
$w = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$	$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$	$(0, \infty)$
$w = xy \ln z$	$z > 0$ yarım uzayı	$(-\infty, \infty)$

■



(a) İç nokta



(b) Sınır noktası

ŞEKİL 14.1 Düzlemdeki bir R bölgesinin iç noktaları ve sınır noktaları. Bir iç noktanın R'nin bir noktası olması gerekir. R'nin bir sınır noktasının R'ye ait olması gerekmez.

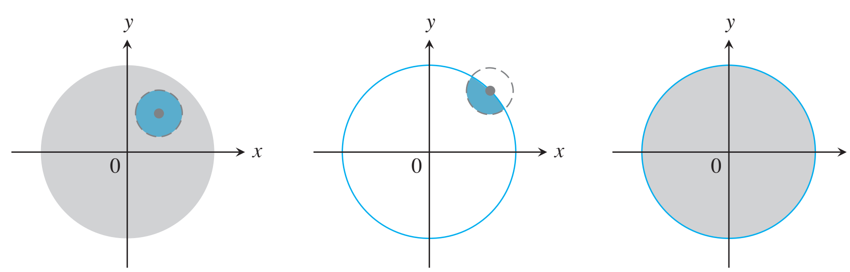
İki Değişkenli Fonksiyonlar

Tıpkı reel doğrudaki aralıklarda olduğu gibi düzlemdeki bölgelerin de iç noktaları ve sınır noktaları var olabilir. $[a, b]$ kapalı aralıkları sınır noktalarını içerirler, (a, b) açık aralıkları sınır noktalarını içermezler, $[a, b)$ gibi aralıklar da ne açık ne de kapalıdırlar.

TANIMLAR İç ve Sınır Noktalar, Açık, Kapalı

xy-düzleminde bir R bölgesindeki (kümesindeki) bir (x_0, y_0) noktası, bütünüyle R'nin içinde bulunan pozitif yarıçaplı bir dairenin merkezi ise R'nin bir **iç noktası**dır (Şekil 14.1). Merkezi (x_0, y_0)'da olan her daire R'nin içinden noktaların yanı sıra R'nin dışından da noktalar içeriyorsa, R'nin bir **sınır noktası**dır. (Sınır noktasının R'ye ait olması gerekmez.)

Bir bölgenin iç noktaları, bir küme olarak, bölgenin **içini** oluştururlar. Bölgenin sınır noktaları bölgenin **sınırını** oluştururlar. Bir bölge sadece iç noktalarından oluşuyorsa **açık**tır. Bir bölge bütün sınır noktalarını içeriyorsa **kapalıdır** (Şekil 14.2).



$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$
Açık birim daire.
Her nokta bir iç noktadır.

$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$
Birim dairenin sınırı (Birim çember).

$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
Kapalı birim daire.
Bütün sınır noktalarını içerir.

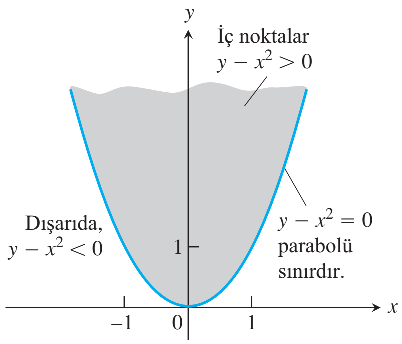
ŞEKİL 14.2 Düzlemde birim dairenin iç noktaları ve sınır noktaları.

Reel sayı aralıklarında olduğu gibi, düzlemdeki bazı bölgeler ne açık ne de kapalıdırlar. Şekil 14.2'deki açık daire ile işe başlar ve ona sınır noktalarının hepsini değil de bazılarını eklerseniz, ortaya çıkan küme ne açık ne de kapalıdır. Orada bulunan sınır noktaları kümenin açık olmasını engeller. Kalan sınır noktalarının bulunmayışı ise kümenin kapalı olmasını engeller.

TANIMLAR Düzlemde Sınırlı ve Sınırlı Olmayan Bölgeler

Düzlemdeki bir bölge sabit yarıçaplı bir dairenin içindeyse **sınırlı**dır.
Aksi taktirde bölge, **sınırlı olmayan (sınırsız)** bir bölgedir.

Düzlemde *sınırlı* kümelere örnekler doğru parçaları, üçgenler, üçgenlerin içleri, dikdörtgenler, çemberler ve dairelerdir. *Sınırlı olmayan* kümelere örnekler de doğrular, koordinat eksenleri, sonsuz aralıklarda tanımlı fonksiyonların grafikleri, dörtte bir bölgeler, yarı düzlemler ve düzlemin kendisidir.



ŞEKİL 14.3 $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$'nin tanım kümesi renkli bölge ve sınırlayıcı parabol $y = x^2$'den oluşur (Örnek 3).

ÖRNEK 3 İki Değişkenli Bir Fonksiyonun Tanım Kümesini Belirlemek

$f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ fonksiyonunun tanım kümesini belirleyin.

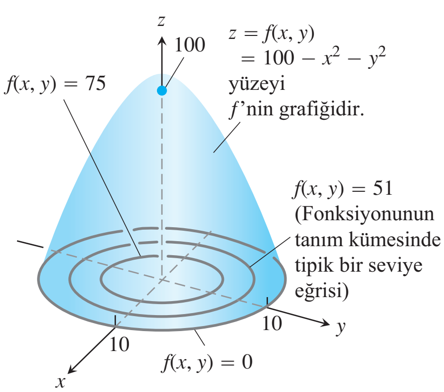
Çözüm f fonksiyonu sadece $y - x^2 \geq 0$ olduğu yerlerde tanımlı olduğundan, tanım kümesi Şekil 14.3'te gösterilen kapalı, sınırlı olmayan bölgedir. $y - x^2$ parabolü tanım kümesinin sınırıdır. Parabolün üst tarafındaki noktalar tanım kümesinin içini oluşturur. ■

İki Değişkenli Fonksiyonların Grafikler, Seviye Eğrileri ve Kontur Çizgileri

Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun değerlerini resimlemenin iki standart yolu vardır. Biri, tanım kümesinde f'nin sabit bir değer aldığı eğrileri çizip isimlendirmektir. Diğeri ise, uzayda $z = f(x, y)$ yüzeyini çizmektir.

TANIMLAR Seviye Eğrisi, Grafik, Yüzey

Düzlemde, bir $f(x, y)$ fonksiyonunun $f(x, y) = c$ gibi sabit bir değer aldığı noktalar kümesine f'nin bir **seviye eğrisi** denir. (x, y) noktası f'nin tanım aralığında olmak üzere, bütün $(x, y, f(x, y))$ noktalarının kümesine f'nin **grafiği** denir. f'nin grafiğine ayrıca $z = f(x, y)$ **yüzeyi** de denir.



ŞEKİL 14.4 $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ fonksiyonunun grafiği ve seçilmiş seviye eğrileri (Örnek 4).

ÖRNEK 4 İki Değişkenli Bir Fonksiyonu Çizmek

$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$'nin grafiğini çizin ve f'nin düzlemdeki tanım kümesinde $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = 51$ ve $f(x, y) = 75$ seviye eğrilerini işaretleyin.

Çözüm f'nin tanım kümesi bütün xy-düzlemidir ve f'nin değer kümesi 100'e eşit veya 100'den küçük reel sayıların kümesidir. Grafiği, Şekil 14.4'te bir kısmı gösterilen $z = 100 - x^2 - y^2$ paraboloidi dir.

$f(x, y) = 0$ seviye eğrisi, xy-düzleminde

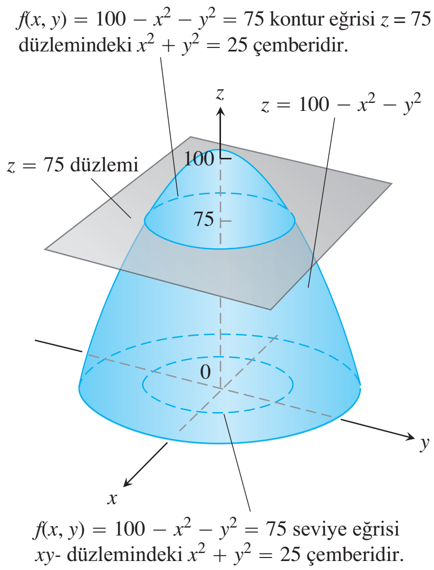
$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 0 \quad \text{veya} \quad x^2 + y^2 = 100$$

koşulunu sağlayan noktalar kümesidir ki, o da merkezi orijinde olan 10 yarıçaplı çemberdir. Benzer şekilde, $f(x, y) = 51$ ve $f(x, y) = 75$ seviye eğrileri (Şekil 14.4)

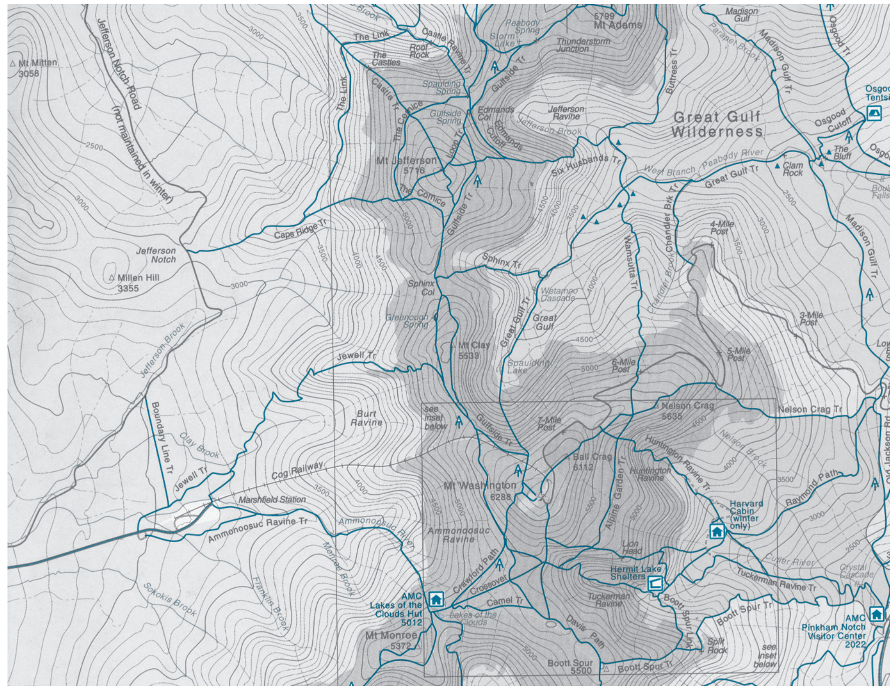
$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 51 \qquad \text{veya} \qquad x^2 + y^2 = 49$$
$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 75 \qquad \text{veya} \qquad x^2 + y^2 = 25$$

çemberleridir. $f(x, y) = 100$ seviye eğrisi sadece orijinden oluşur (Yine de bir seviye eğrisidir). ■

Uzayda $z = c$ düzleminin bir $z = f(x, y)$ yüzeyini kestiği eğri, $f(x, y) = c$ fonksiyon değerini temsil eden noktalardan oluşur. Buna, f'nin tanım kümesindeki $f(x, y) = c$ seviye eğrisinden ayırt etmek için, $f(x, y) = c$ kontur eğrisi denir. Şekil 14.5, $z = 100 - x^2 - y^2$ yüzeyi üzerinde $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ fonksiyonuyla tanımlanan $f(x, y) = 75$ kontur çizgisini göstermektedir. Kontur eğrisi, fonksiyonun tanım kümesindeki $f(x, y) = 75$ seviye eğrisi olan $x^2 + y^2 = 25$ çemberinin yukarısında bulunmaktadır.
Ancak herkes bu ayrımı yapmaz ve iki eğriyi de aynı isimle adlandırmak isteyebilir ve aklınızda hangisinin bulunduğunu bildiğinize güvenebilirsiniz. Örneğin, çoğu haritalarda, sabit yükseklikleri (deniz seviyesinden yükseklik) temsil eden eğrilere seviye eğrileri değil, kontür denir (Şekil 14.6).



ŞEKİL 14.5 xy-düzlemine paralel ve $z = f(x,y)$ yüzeyini kesen bir $z = c$ düzlemi bir kontur çizgisi üretir.



ŞEKİL 14.6 New Hampshire'deki Mt. Washington'un konturları (Appalachian Mountain Club'ın izniyle yeniden üretilmiştir).

Üç Değişkenli Fonksiyonlar

Düzlemde, iki bağımsız değişkenli bir fonksiyonun sabit bir $f(x, y) = c$ değerine sahip olduğu noktalar fonksiyonun tanım kümesinde bir eğri oluşturur. Uzayda, üç bağımsız değişkenli bir fonksiyonun sabit bir $f(x, y, z) = c$ değerine sahip olduğu noktalar fonksiyonun tanım kümesinde bir yüzey oluşturur.

TANIM **Seviye Yüzeyi**

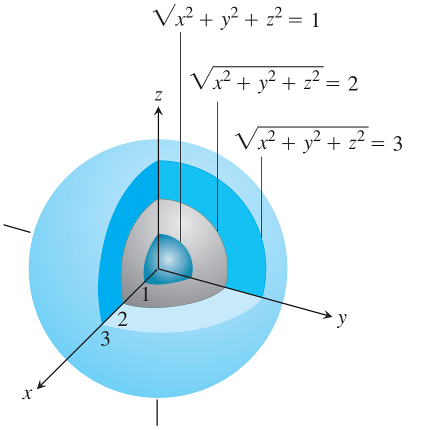
Uzayda, üç bağımsız değişkenli bir fonksiyonun sabit bir $f(x, y, z) = c$ değerine sahip olduğu (x, y, z) noktaları f'nin bir **seviye yüzeyini** oluştururlar.

Üç değişkenli bir fonksiyonların grafikleri, dört boyutlu bir uzayda bulunan $(x, y, z, f(x, y, z))$ noktalarından oluştuğu için, bunları üç-boyutlu referans çerçevemizde etkili olarak çizemeyiz. Ancak, üç-boyutlu seviye yüzeylerine bakarak, fonksiyonun nasıl davrandığını görebiliriz.

ÖRNEK 5 Üç Değişkenli Bir Fonksiyonun Seviye Yüzeylerini Belirlemek

Aşağıdaki fonksiyonun seviye yüzeylerini tanımlayın:

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



ŞEKİL 14.7 $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$'nin seviye yüzeyleri eşmerkezli kürelerdir (Örnek 5).

Çözüm f'nin değeri, orijinden (x, y, z) noktasına olan uzaklıktır. Her $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c, c > 0$, seviye yüzeyi, merkezi orijinde olan c yarıçaplı bir küredir. Şekil 14.7 bu kürelerden üçünün görünüşünü sunmaktadır. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0$ seviye yüzeyi sadece orijinden oluşmaktadır.

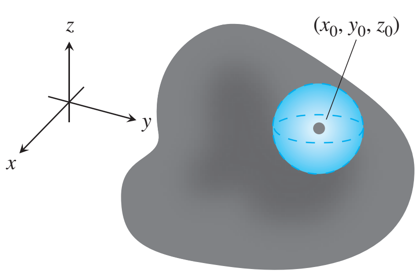
Burada fonksiyonun grafiğini çizmiyoruz; fonksiyonun tanım kümesindeki seviye yüzeylerine bakıyoruz. Fonksiyonun seviye yüzeyleri tanım kümesinde ilerlerken, fonksiyonun değerlerinin nasıl değiştiğini gösterir. Merkezi orijinde olan c yarıçaplı bir kürenin üzerinde kalırsak, fonksiyon sabit bir değer, yani c değerini alır. Bir küreden diğerine geçersek fonksiyonun değeri değişir. Orijinden uzaklaşırsak bu değer artar, orijine yaklaşırsak bu değer azalır. Fonksiyonun değerlerinin değişimi izlediğimiz yöne bağlıdır. Değişikliğin yöne bağımlılığı önemlidir. Buna Bölüm 14.5'te geri döneceğiz.

Uzaydaki bölgeler için iç, sınır, açık, kapalı, sınırlı ve sınırlı olmama tanımları düzlemdeki tanımların benzeridir. Ekstra boyutu işin içine katmak için, daireler yerine katı toplar kullanırız.

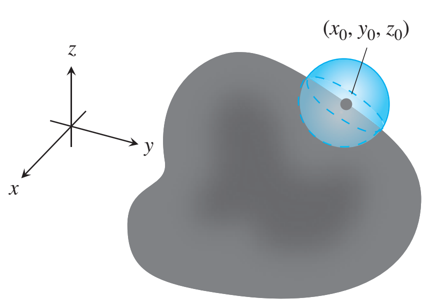
TANIMLAR Uzay Bölgeleri İçin İç ve Sınır Noktaları

Uzaydaki bir R bölgesinde bir (x_0, y_0, z_0) noktası, bütünüyle R'nin içinde bulunan bir katı topun merkeziyse R'nin bir **iç noktası**dır (Şekil 14.8a). Merkezi (x_0, y_0, z_0) 'da olan her küre R 'nin içinden noktaların yanı sıra R'nin dışından da noktalar içeriyorsa (x_0, y_0, z_0) noktası R'nin bir **sınır noktası**dır. R'nin iç noktaları, bir küme olarak, R'nin **içini** oluştururlar. R'nin sınır noktalarının kümesi R'nin **sınırı**dır.

Bir R bölgesi sadece iç noktalardan oluşuyorsa **açık**tır. Bir bölge bütün sınır noktalarını içeriyorsa **kapalı**dır.



(a) İç noktaları



(b) Sınır noktaları

ŞEKİL 14.8 Uzaydaki bir bölgenin iç noktaları ve sınır noktaları.

Uzayda açık kümelere örnekler; bir kürenin içi, $z > 0$ açık yarı düzlemi, birinci sekizde bir bölge (x, y ve z her biri pozitif) ve uzayın kendisidir.

Uzayda *kapalı* kümelere örnekler; doğrular, düzlemler, $z \geq 0$ kapalı yarı-düzlemi, sınırlayıcı düzlemleriyle birlikte birinci sekizde bir bölge ve uzayın kendisi (sınır noktası var olmadığından) dir.

Sınırlayıcı küresinin bir kısmı kaldırılmış katı bir küre veya bir yüzü, kenarı veya köşe noktası olmayan katı bir küp *ne açık ne de kapalı* olacaktır.

Üçten daha fazla bağımsız değişkenli fonksiyonlar da önemlidir. Örneğin, uzayda bir yüzeyin üzerindeki sıcaklık sadece yüzeyin üzerindeki $P(x, y, z)$ noktasının konumuna değil aynı zamanda t zamanına da bağlı olabilir dolayısıyla böyle bir durumda $f(x, y, z, t)$ yazacağız.

Bilgisayarla Grafik Çizme

Bilgisayarların üç-boyutlu grafik çizim programları iki değişkenli fonksiyonların grafiklerini sadece birkaç tuşa basarak çizmeyi olası kılmıştır. Genellikle, bir formülden öğrendiğimizi, bir grafikten daha çabuk öğreniriz.

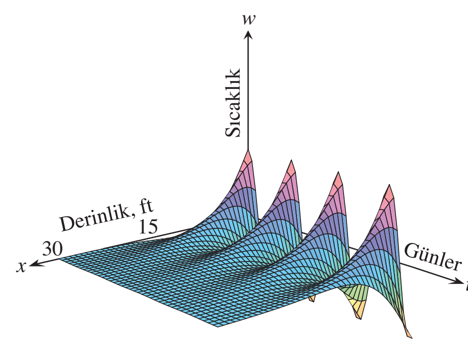
ÖRNEK 6 Yeryüzünün Altındaki Sıcaklığı Modellemek

Yeryüzünün altındaki sıcaklık, yeryüzü altındaki x derinliğinin ve yılın t zamanının bir fonksiyonudur. x'i feet olarak t'yi de yeryüzünde yüzey sıcaklığının en yüksek olmasının beklendiği günden itibaren geçen gün olarak alırsak, sıcaklıktaki değişimi

$$w = \cos(1.7 \times 10^{-2}t - 0.2x)e^{-0.2x}$$

fonksiyonu ile modelleyebiliriz. (0 ft'teki sıcaklık +1 ile –1 arasında değişecek şekilde ölçeklenmiştir. Öyle ki x feet'teki değişim yüzeydeki değişimin bir kesri olarak yorumlanabilsin.)

Şekil 14.9, fonksiyonun bilgisayarla üretilmiş bir grafiğini göstermektedir. 15 ft derinlikteki değişim (şekilde dikey genlikteki değişim) yüzeydeki değişimin yaklaşık %5'idir. 30 ft derinlikte yıl boyunca neredeyse hiç değişim yoktur.



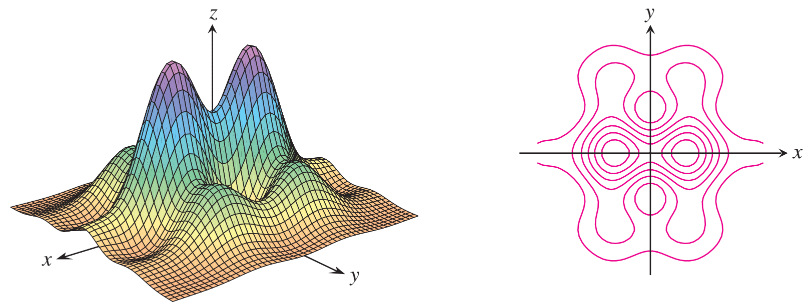
ŞEKİL 14.9

$$w = \cos(1.7 \times 10^{-2}t - 0.2x)e^{-0.2x}$$

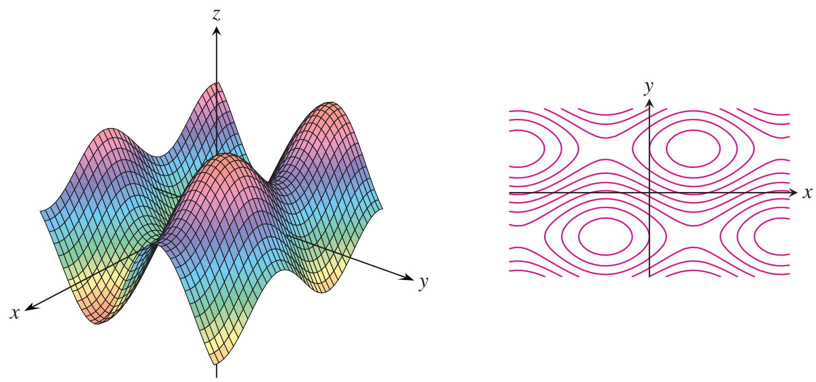
fonksiyonunun bilgisayarla üretilmiş bu grafiği yer altı sıcaklığının mevsimlik değişimini yüzey sıcaklığının bir kesri olarak göstermektedir. $x = 15$ ft'te, değişim yüzeydeki değişimin sadece %5'idir. $x = 30$ ft'te değişim yüzeydeki değişimin %0.25'inden azdır (Örnek 6). (Norton Starr'ın hazırladığı çizimden alınmıştır.)

Grafik ayrıca, yüzeyin 15 ft altındaki sıcaklıkla yüzey sıcaklığı arasında neredeyse yarım yıllık bir faz farkı olduğunu göstermektedir. Yüzeyde sıcaklık en düşükken (örneğin, Şubat'ta), 15 ft aşağıda en yüksektir. Yerin 15 ft altında, mevsimlerin sırası değişmiştir. ■

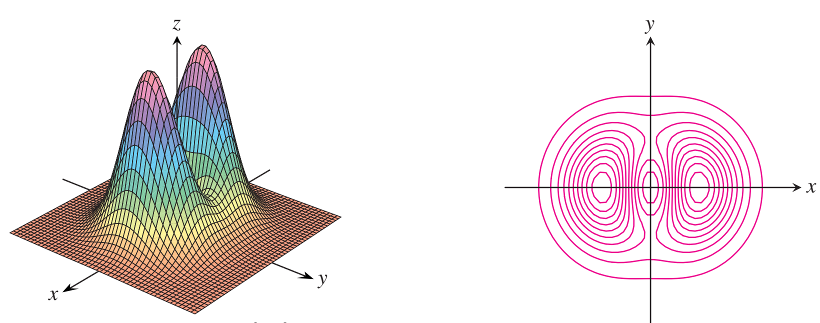
Şekil 14.10 iki değişkenli birkaç fonksiyonun bilgisayarla üretilmiş grafiklerini seviye eğrileri ile birlikte göstermektedir.



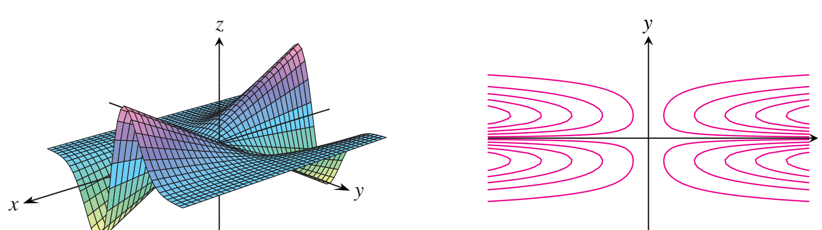
(a) $z = e^{-(x^2 + y^2)/8}(\sin x^2 + \cos y^2)$



(b) $z = \sin x + 2 \sin y$



(c) $z = (4x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$



(d) $z = xye^{-y^2}$

ŞEKİL 14.10 İki değişkenli tipik fonksiyonların bilgisayarla üretilmiş grafikleri ve seviye eğrileri.

ALIŞTIRMALAR 14.1

Tanım ve Değer Kümeleri, Seviye Eğrileri

1–12 alıştırmalarında, **(a)** fonksiyonun tanım kümesini bulun, **(b)** fonksiyonun değer kümesini bulun, **(c)** fonksiyonun seviye eğrilerini tanımlayın, **(d)** fonksiyonun tanım kümesinin sınırını bulun, **(e)** tanım kümesinin kapalı mı, açık mı, yoksa ikisi de olmayan bir bölge mi olduğunu belirleyin ve **(f)** tanım kümesinin sınırlı mı yoksa sınırlı olmayan mı olduğunu belirleyin.

1. $f(x, y) = y - x$

2. $f(x, y) = \sqrt{y - x}$

3. $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$

4. $f(x, y) = x^2 - y^2$

5. $f(x, y) = xy$

6. $f(x, y) = y/x^2$

7. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$

8. $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

9. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

10. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

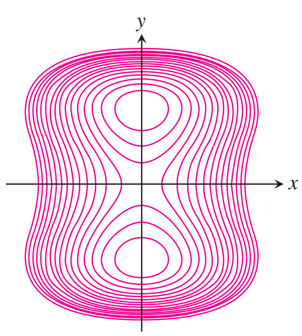
11. $f(x, y) = \sin^{-1}(y - x)$

12. $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

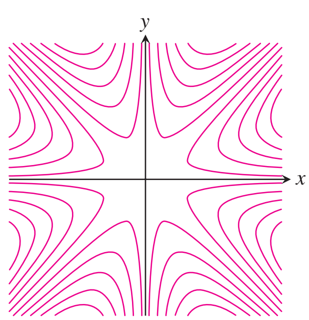
Yüzeyleri ve Seviye Eğrilerini Belirlemek

13–18 alıştırmaları (a)–(f)'de grafikleri verilen fonksiyonların seviye eğrilerini göstermektedir. Her eğri kümesini uygun fonksiyonla eşleştirin.

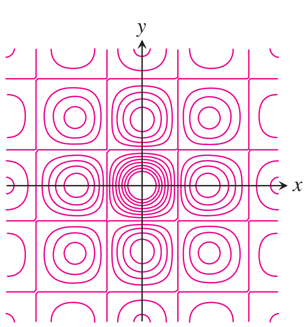
13.



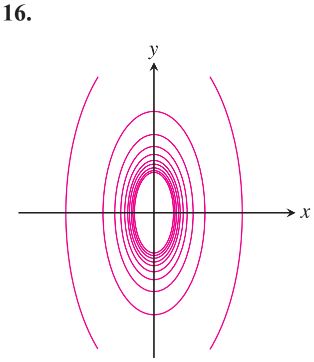
14.



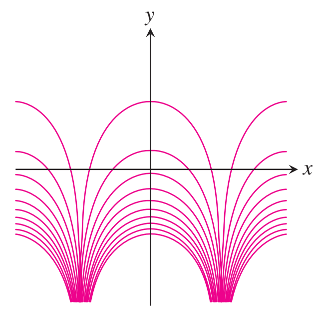
15.



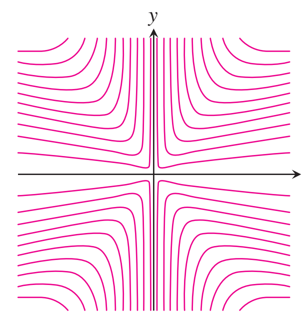
16.



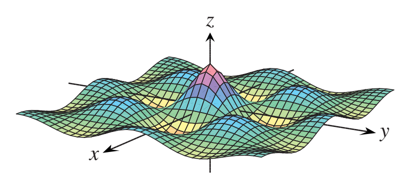
17.



18.

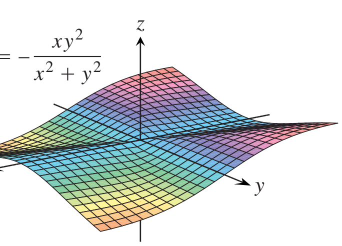


a.



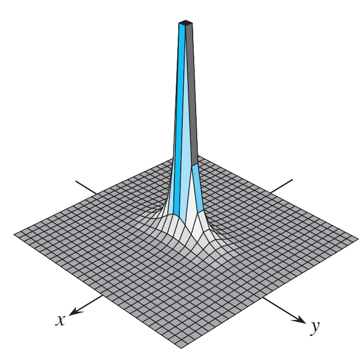
$z = (\cos x)(\cos y)\, e^{-\sqrt{x^2 + y^2}/4}$

b.



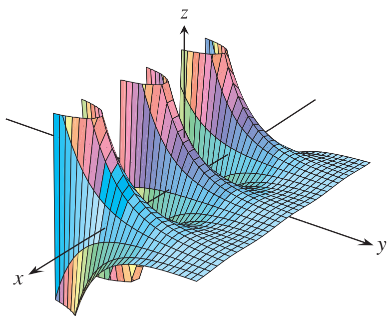
$z = -\dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$

c.



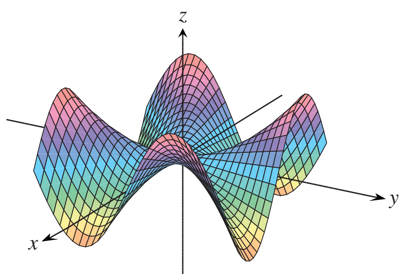
$z = \dfrac{1}{4x^2 + y^2}$

d.



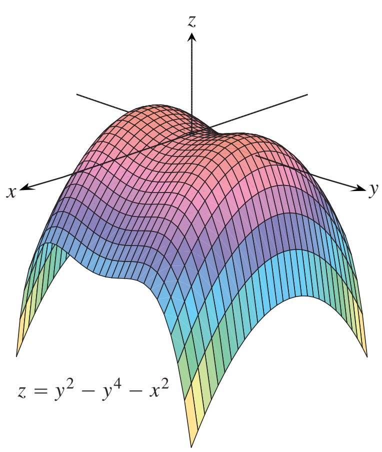
$z = e^{-y} \cos x$

e.



$z = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$

f.



$z = y^2 - y^4 - x^2$

İki Değişkenli Fonksiyonları Tanımlama

19–28 alıştırmalarındaki fonksiyonların değerlerini iki şekilde gösterin: **(a)** $z = f(x, y)$ yüzeyini çizerek ve **(b)** fonksiyonun tanım kümesindeki seviye eğrilerinden birkaçını çizerek. Her eğriyi fonksiyon değeriyle isimlendirin.

19. $f(x, y) = y^2$

20. $f(x, y) = 4 - y^2$

21. $f(x, y) = x^2 + y^2$

22. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

23. $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$

24. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$

25. $f(x, y) = 4x^2 + y^2$

26. $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

27. $f(x, y) = 1 - |y|$

28. $f(x, y) = 1 - |x| - |y|$

Bir Seviye Eğrisini Bulmak

29–32 alıştırmalarında, $f(x, y)$ fonksiyonun verilen noktadan geçen seviye eğrisinin denklemini bulun.

29. $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2, \quad \left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

30. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad (1, 0)$

31. $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y \frac{dt}{1 + t^2}, \quad \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

32. $f(x, y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n, \quad (1, 2)$

Seviye Yüzeyleri Çizmek

33–40 alıştırmalarında, fonksiyonun tipik bir seviye yüzeyini çizin.

33. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

34. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

35. $f(x, y, z) = x + z$

36. $f(x, y, z) = z$

37. $f(x, y, z) = x^2 + y^2$

38. $f(x, y, z) = y^2 + z^2$

39. $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$

40. $f(x, y, z) = (x^2/25) + (y^2/16) + (z^2/9)$

Bir Seviye Yüzeyi Bulmak

41–44 alıştırmalarında, $f(x, y)$ fonksiyonunun verilen noktadan geçen seviye yüzeyinin denklemini bulun.

41. $f(x, y, z) = \sqrt{x - y} - \ln z, \quad (3, -1, 1)$

42. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y + z^2), \quad (-1, 2, 1)$

43. $g(x, y, z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + y)^n}{n!\,z^n}, \quad (\ln 2, \ln 4, 3)$

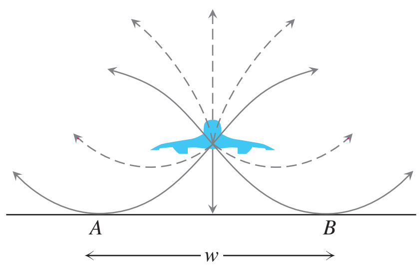
44. $g(x, y, z) = \displaystyle\int_x^y \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}} + \int_{\sqrt{2}}^{z} \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}}, \quad (0, 1/2, 2)$

Teori ve Örnekler

45. Bir fonksiyonun, bir uzay doğrusu üzerindeki maksimum değeri $f(x, y, z) = xyz$ fonksiyonunun $x = 20 - t$, $y = t$, $z = 20$ doğrusu üzerinde bir maksimum değeri var mıdır? Varsa, nedir? Yanıtınızı açıklayın (*İpucu*: Doğru boyunca, $w = f(x, y, z)$ fonksiyonu t'nin türetilebilir bir fonksiyonudur.)

46. Bir fonksiyonun, bir uzay doğrusu üzerindeki maksimum değeri $f(x, y, z) = xy - z$ fonksiyonunun $x = t - 1$, $y = t - 2$, $z = t + 7$ doğrusu üzerinde bir maksimum değeri var mıdır? Varsa, nedir? Yanıtınızı açıklayın (*İpucu*: Doğru boyunca, $w = f(x, y, z)$ fonksiyonu t'nin türetilebilir bir fonksiyonudur.)

47. Concorde'un sonik patlamaları *Concorde*'dan gelen ses dalgaları, uçağın uçtuğu yüksekliğin üstünde ve altında sıcaklık değiştikçe, eğilir. Sonik patlama halısı yer yüzeyinde şok dalgalarını atmosferden yansıtılmış veya yerden kırılmış bir şekilde değil de doğrudan uçaktan alan bölgedir. Halı, uçağın altındaki noktadan doğrudan yere çarpan sıyırıcı dalgalarla belirlenmiştir. (Şekle bakın)



Sonik patlama halısı

Yerde bulunan insanların *Concorde*'un sonik patlamasını atmosferdeki bir katmandan yansıyarak değil de doğrudan duydukları bölgenin genişliği w,

T = yer seviyesindeki hava sıcaklığı (Kelvin derece),

h = Concorde'un yüksekliği (km),

d = dikey sıcaklık gradyanı (km başına Kelvin derece sıcaklık düşüşü)

değişkenlerinin bir fonksiyonudur.

w'nun formülü

$$w = 4\left(\frac{Th}{d}\right)^{1/2}.$$

olarak verilir.

Washington'a gitmekte olan *Concorde* uçağı Avrupa'dan Birleşik Devletlere Nantucket adasının kuzeyinde 16.8 km yükseklikte geçirecek bir rota izlemektedir. Yüzey sıcaklığı 290 K ve dikey sıcaklık gradyanı 5 K/km ise, uçağın sonik patlama halısını adadan uzak tutmak için uçak Nantucket'ın kaç kilometre güneyinden uçurulmalıdır? (N.K. Balachandra, W.L. Donn ve D.H. Rind tarafından *Science*, July 1, 1977, Vol. 197, sayfa 47-49'da yayınlanan "Concorde Sonic Booms as an Atmospheric Probe" dan.)

48. Bildiğiniz gibi, tek reel değişkenli, reel değerli bir fonksiyonun grafiği iki koordinatlı bir uzayda bir kümedir. İki bağımsız reel değişkenli, reel değerli bir fonksiyonun grafiği üç koordinatlı bir uzayda bir kümedir. Üç bağımsız reel değişkenli, reel değerli bir fonksiyonun grafiği dört koordinatlı bir uzayda bir kümedir. Dört bağımsız reel değişkenli, reel değerli bir $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ fonksiyonunun grafiğini nasıl tanımlarsınız? n bağımsız reel değişkenli, reel değerli bir $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ fonksiyonunun grafiğini nasıl tanımlarsınız?

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Açıkça Verilen Yüzeyler

49–52 alıştırmalarındaki fonksiyonların her biri için aşağıdaki adımları gerçekleştirmek üzere bir BCS kullanın.

a. Verilen dikdörtgen üzerinde yüzeyi çizin.

b. Dikdörtgendeki birkaç seviye eğrisini çizin.

c. f'nin verilen noktadaki seviye eğrisini çizin.

49. $f(x, y) = x \sin \frac{y}{2} + y \sin 2x, \quad 0 \le x \le 5\pi \quad 0 \le y \le 5\pi,$
$P(3\pi, 3\pi)$

50. $f(x, y) = (\sin x)(\cos y)e^{\sqrt{x^2+y^2}/8}, \quad 0 \le x \le 5\pi,$
$0 \le y \le 5\pi, \quad P(4\pi, 4\pi)$

51. $f(x, y) = \sin(x + 2\cos y), \quad -2\pi \le x \le 2\pi,$
$-2\pi \le y \le 2\pi, \quad P(\pi, \pi)$

52. $f(x, y) = e^{(x^{0.1}-y)} \sin(x^2 + y^2), \quad 0 \le x \le 2\pi,$
$-2\pi \le y \le \pi, \quad P(\pi, -\pi)$

Kapalı Olarak Verilen Yüzeyler

53–56 alıştırmalarındaki seviye yüzeylerini çizmek için bir BCS kullanın.

53. $4 \ln(x^2 + y^2 + z^2) = 1$ **54.** $x^2 + z^2 = 1$

55. $x + y^2 - 3z^2 = 1$

56. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) - (\cos y)\sqrt{x^2 + z^2} = 2$

Parametrize Yüzeyler

Düzlemdeki eğrileri, bir I parametre aralığında tanımlanmış bir $x = f(t)$, $y = g(t)$ denklem çiftiyle tanımladığınız gibi, bazen uzaydaki yüzeyleri de bir $a \le u \le b$, $c \le v \le d$ parametre dikdörtgeninde tanımlanmış bir $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$ denklem üçlüsüyle tanımlayabilirsiniz. Çoğu bilgisayarlı cebir sistemi böyle yüzeyleri parametre modunda çizer (Parametrize yüzeyler Bölüm 16.6'da daha detaylı olarak incelenmektedir). 57–60 alıştırmalarındaki yüzeyleri çizmek için bir BCS kullanın. Ayrıca xy-düzlemindeki birkaç seviye eğrisini çizin.

57. $x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u, \quad 0 \le u \le 2,$
$0 \le v \le 2\pi$

58. $x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v, \quad 0 \le u \le 2,$
$0 \le v \le 2\pi$

59. $x = (2 + \cos u) \cos v, \quad y = (2 + \cos u) \sin v, \quad z = \sin u,$
$0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le 2\pi$

60. $x = 2 \cos u \cos v, \quad y = 2 \cos u \sin v, \quad z = 2 \sin u,$
$0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le \pi$

14.2 Yüksek Boyutlarda Limitler ve Süreklilik

Bu bölüm çok değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliğini ele almaktadır. İki veya üç değişkenli bir fonksiyonun limitinin tanımı tek değişkenli bir fonksiyonun limitinin tanımına benzerdir fakat şimdi göreceğimiz gibi önemli bir fark vardır.

Limitler

Bir (x_0, y_0) noktasına yeterince yakın bütün (x, y) noktaları için $f(x, y)$'nin değerleri belirli bir L reel sayısına keyfi derecede yakın ise, (x, y) noktası (x_0, y_0)'a yaklaşırken f fonksiyonu L limitine yaklaşır deriz. Bu, tek değişkenli bir fonksiyonun formel olmayan tanımına benzerdir. Ancak, (x_0, y_0) noktası f'nin tanım kümesinin içinde bulunuyorsa, (x, y)'nin (x_0, y_0)'a herhangi bir yönden yaklaşabileceğine dikkat edin. Yaklaşımın yönü, aşağıdaki bazı örneklerde olduğu gibi, bir sorun yaratabilir.

TANIMLAR İki Değişkenli Bir Fonksiyonun Limiti

Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık, f'nin tanım kümesine ait (x, y) noktaları için,

$$0 > 2\ \overline{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \quad \text{iken} \quad |f(x, y) - L| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı karşılık getirilebiliyorsa, (x, y) noktası (x_0, y_0)'a yaklaşırken f fonksiyonu L **limitine** yaklaşır der ve şu şekilde yazarız.

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

Limit tanımı, (x, y)'den (x_0, y_0)'a uzaklık yeterince küçük (fakat 0 değil) bırakıldığında, $f(x, y)$ ile L arasındaki uzaklığın keyfi derecede küçüldüğünü söyler.

Limit tanımı f'nin tanım kümesinin iç noktalarıyla birlikte (x_0, y_0) sınır noktaları için de geçerlidir. Tek koşul (x, y) noktasının her zaman tanım kümesinin içinde kalmasıdır. Tek değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi,

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} x = x_0$$

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} y = y_0$$

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} k = k \qquad \text{(Herhangi bir } k\text{)}$$

olduğu gösterilebilir. Örneğin, yukarıdaki ilk limit ifadesinde $f(x, y) = x$ ve $L = x_0$'dır. Limit tanımını kullanarak, $\epsilon > 0$ sayısının seçildiğini varsayın. Eğer δ'yı bu ϵ'a eşit olarak alırsak

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta = \epsilon$$

eşitsizliğinin

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2} < \epsilon$$

$$|x - x_0| < \epsilon \qquad \sqrt{a^2} = |a|$$

$$|f(x, y) - x_0| < \epsilon \qquad x = f(x, y)$$

sonucunu gerektirdiğini görürüz:

Yani,

$$\text{her ne zaman } 0 > 2\ \overline{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \text{ ise } \quad |f(x, y) - x_0| < \epsilon$$

olur. Dolayısıyla,

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = \lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} x = x_0$$

dır. Ayrıca, iki fonksiyonun toplamının limitinin limitlerinin toplamı olduğu da gösterilebilir (ikisi de varsa) ve farkların, çarpımların, sabitlerle çarpımların, bölümlerin ve kuvvetlerin limitleri için de benzer sonuçlar elde edilir.

TEOREM 1 İki Değişkenli Fonksiyonların Limitlerinin Özellikleri

L, M ve k reel sayılar ve

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = L \qquad \text{ve} \qquad \lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} g(x, y) = M.$$

1. *Toplam Kuralı:* $\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (f(x, y) + g(x, y)) = L + M$
2. *Fark Kuralı:* $\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (f(x, y) - g(x, y)) = L - M$
3. *Çarpım Kuralı:* $\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (f(x, y) \cdot g(x, y)) = L \cdot M$
4. *Sabitle Çarpı Kuralı:* $\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (kf(x, y)) = kL$ (Herhangi bir k)
5. *Bölüm Kuralı:* $\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} = \dfrac{L}{M} \qquad M \neq 0$
6. *Kuvvet Kuralı:* r ve s tamsayılar ve $s \neq 0$, $L^{r/s}$ bir reel sayı ise,

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (f(x, y))^{r/s} = L^{r/s}$$

(s çift ise $L > 0$'ın pozitif olduğunu varsayıyoruz)

Teorem 1'i burada ispatlamamakla birlikte, neden doğru olduğuna dair formel olmayan bir düşünce veriyoruz. (x, y) noktası (x_0, y_0) noktasına yeterince yakın ise $f(x, y)$ değeri L'ye ve $g(x, y)$ değeri de M'ye yakındır (limitlerin formel olmayan açıklamasından). Şu halde $f(x, y) + g(x, y)$ değerinin $L + M$'ye yakın olması; $f(x, y) - g(x, y)$'nin $L - M$'ye yakın olması; $f(x, y)g(x, y)$'nin LM'ye yakın olması; $kf(x, y)$'nin kL'ye yakın olması; ve $M \neq 0$ ise $f(x, y)/g(x, y)$'nin L/M'ye yakın olması anlamlıdır.

Teorem 1'i polinomlara ve rasyonel fonksiyonla uyguladığımızda, bu fonksiyonların $(x, y) \to (x_0, y_0)$ iken limitlerinin, fonksiyonları (x_0, y_0)'da hesaplayarak bulabileceğini söyleyen yararlı sonucu elde ederiz. Tek koşul rasyonel fonksiyonların (x_0, y_0)'da tanımlı olmalarıdır.

ÖRNEK 1 Limitleri Hesaplamak

(a) $$\lim_{(x, y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = \frac{0 - (0)(1) + 3}{(0)^2(1) + 5(0)(1) - (1)^3} = -3$$

(b) $$\lim_{(x, y)\to(3, -4)} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$ ■

ÖRNEK 2 Limitleri Hesaplamak

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

limitini bulun.

Çözüm $(x, y) \to (0, 0)$ iken, payda $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ farkı 0'a yaklaştığından, Teorem 1'deki Bölüm Kuralını kullanamayız. Ama, pay ve paydayı $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ile çarparsak, limitini *bulabileceğimiz* eşdeğer bir kesir elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^2 - xy\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x - y)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)}{x - y} && \text{Cebir} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) && \text{Sıfırdan farklı } (x-y) \text{ çarpanını kısaltın} \\
&= 0\left(\sqrt{0} + \sqrt{0}\right) = 0
\end{aligned}$$

$y = x$ yolu (üzerinde $x - y = 0$ dır)

$$\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

fonksiyonunun tanım kümesinde *bulunmadığından* $(x - y)$ çarpanını kısaltabiliriz. ■

ÖRNEK 3 Limit Tanımını Uygulamak

Varsa $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2}$'yi bulun.

Çözüm Önce, $x = 0$ doğrusu boyunca $y \neq 0$ iken fonksiyonun daima 0 değerini aldığını gözlemleriz. Benzer şekilde doğrusu boyunca, $x \neq 0$ olması koşulu ile fonksiyonun değeri yine 0 dır. Dolayısıyla, (x, y) noktası $(0, 0)$ noktasına yaklaşırken limit varsa bu limit değeri 0 olmalıdır. Bunun doğru olup olmadığını görmek için limit tanımını uygularız.

Bir $\epsilon > 0$ değeri keyfi olarak verilmiş olsun. Bir $\delta > 0$ değeri bulmak istiyoruz. Öyle ki,

$$\text{her ne zaman} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ iken } \left|\frac{4xy^2}{x^2 + y^2} - 0\right| < \epsilon$$

veya

$$\text{her ne zaman} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ iken } \frac{4|x|y^2}{x^2 + y^2} < \epsilon$$

olsun. $y^2 \leq x^2 + y^2$ olduğundan

$$\frac{4|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq 4|x| = 4\sqrt{x^2} \leq 4\sqrt{x^2 + y^2}$$

elde ederiz.

Şu halde $\delta = \epsilon/4$ seçer ve $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, alırsak

$$\left|\frac{4xy^2}{x^2 + y^2} - 0\right| \le 4\sqrt{x^2 + y^2} < 4\delta = 4\left(\frac{\epsilon}{4}\right) = \epsilon$$

elde ederiz. Tanımdan

$$\lim_{(x, y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

sonucu elde edilir.

Süreklilik

Tek değişkenli fonksiyonlardaki gibi, süreklilik limit cinsinden ifade edilir.

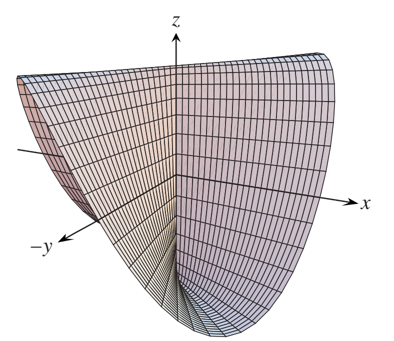
TANIM İki Değişkenli Sürekli Fonksiyonlar
Aşağıdaki koşullar sağlanırsa, bir $f(x, y)$ fonksiyonu (x_0, y_0) **noktasında süreklidir**:

1. $f(x_0, y_0)$'da tanımlıdır,
2. $\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$ vardır,
3. $\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

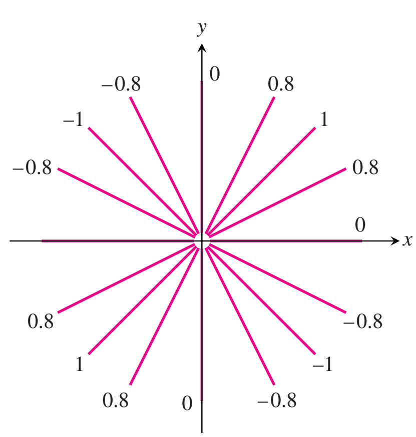
Tanım kümesinin her noktasında sürekli olan fonksiyona **sürekli fonksiyon** denir.

Limit tanımında olduğu gibi, süreklilik tanımı da f'nin tanım kümesinin iç noktaları kadar sınır noktalarında da geçerlidir. Tek koşul (x, y) noktasının her zaman tanım kümesi içinde olmasıdır.

Tahmin edebileceğiniz gibi, Teorem 1'in sonuçlarından biri sürekli fonksiyonların cebirsel kombinasyonlarının, söz konusu fonksiyonların tanımlı oldukları her noktada sürekli olduklarıdır. Bu, sürekli fonksiyonların toplam, fark, çarpım, sabitle çarpım, bölüm ve kuvvetlerinin tanımlı oldukları yerlerde sürekli oldukları anlamına gelir. Özel olarak, iki değişkenli polinomlar ve rasyonel fonksiyonlar tanımlandıkları her noktada süreklidirler.



(a)



(b)

ŞEKİL 14.11 (a)

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \ne (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

f fonksiyonunun grafiği. Fonksiyon, orijin hariç her yerde süreklidir. (b) f'nin seviye eğrileri (Örnek 4).

ÖRNEK 4 Tek Süreksizlik Noktası Olan Bir Fonksiyon

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \ne (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

fonksiyonunun orijin hariç her yerde sürekli olduğunu gösterin (Şekil 14.11).

Çözüm f fonksiyonu $(x, y) \ne (0, 0)$ olan her noktada süreklidir çünkü değerleri x ve y'nin rasyonel bir fonksiyonuyla

$(0, 0)$'da f'nin değeri tanımlıdır, ama $(x, y) \to (0, 0)$ iken f'nin limitinin olmadığını iddia ediyoruz. Bunun nedeni orijine farklı yollardan yaklaşmanın, şimdi göreceğimiz gibi farklı sonuçlar vermesidir.

Her m değeri için, f fonksiyonunun "delinmiş" $y = mx,\ x \neq 0$, doğrusu üzerinde sabit bir değeri vardır, çünkü

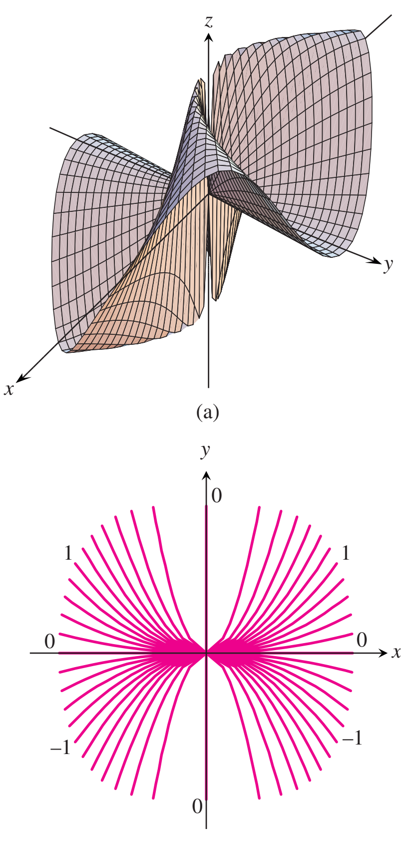
$$f(x, y)\Big|_{y=mx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}\Big|_{y=mx} = \frac{2x(mx)}{x^2 + (mx)^2} = \frac{2mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{2m}{1 + m^2}.$$

bulunur. Dolayısıyla, (x, y) doğru boyunca $(0, 0)$'a yaklaşırken f'nin değeri bu sayıdır:

$$\lim_{\substack{(x, y)\to(0,0)\\ y = mx \text{ boyunca}}} f(x, y) = \lim_{(x, y)\to(0,0)} \left[f(x, y)\Big|_{y=mx} \right] = \frac{2m}{1 + m^2}.$$

Bu limit m ile değişir. Dolayısıyla, (x, y) orijine yaklaşırken f'nin limiti diyebileceğimiz tek bir sayı yoktur. Limit bulunmaz ve fonksiyon sürekli değildir. ■

Örnek 4 iki (veya daha fazla değişkenli) fonksiyonların limitleri hakkında önemli bir noktayı ortaya koyar. Bir noktada bir limitin var olması için, limit her yaklaşım yolu için aynı olmalıdır. Bu sonuç, tek-değişken durumunda soldan ve sağdan limitlerin her ikisinin de aynı değere eşit olması gerekliliği ile benzerdir. Bu yüzden, iki veya daha fazla değişkenli fonksiyonlar için, farklı limitli yollar bulursak, yaklaştıkları noktada fonksiyonun limitinin olmadığını anlarız.



ŞEKİL 14.12 (a) $f(x, y) = 2x^2y/(x^4 + y^2)$'nin grafiği. Grafikte görüldüğü ve (b)'deki seviye eğrilerinin doğruladığı gibi, $\lim_{(x, y)\to(0,0)} f(x, y)$ yoktur (Örnek 5).

Bir Limitin Var Olmaması İçin İki-Yol Testi

(x, y) noktası (x_0, y_0)'a yaklaşırken bir $f(x, y)$ fonksiyonunun iki farklı yol boyunca farklı limitleri varsa, $\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$ yoktur.

ÖRNEK 5 İki-Yol Testini Uygulamak

(x, y) noktası $(0, 0)$'a yaklaşırken

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

fonksiyonunun (Şekil 14.12) limitinin olmadığını gösterin.

Çözüm Doğrudan yerine yazmakla limiti bulamayız. $0/0$ belirsiz formu ortaya çıkar. f'nin değerlerini $(0, 0)$'da sona eren yollar boyunca inceleriz. $y = kx^2,\ x \neq 0$ eğrisi boyunca, fonksiyonun değeri sabittir:

$$f(x, y)\Big|_{y=kx^2} = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}\Big|_{y=kx^2} = \frac{2x^2(kx^2)}{x^4 + (kx^2)^2} = \frac{2kx^4}{x^4 + k^2x^4} = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

Dolayısıyla,

$$\lim_{\substack{(x, y)\to(0,0)\\ y = kx^2 \text{ boyunca}}} f(x, y) = \lim_{(x, y)\to(0,0)} \left[f(x, y)\Big|_{y=kx^2} \right] = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

olur. Bu limit yola göre değişir. Örneğin, (x, y) noktası $(0, 0)$'a $y = x^2$ parabolü üzerinden yaklaşırsa, $k = 1$ olur ve limit 1'dir. (x, y) noktası $(0, 0)$'a x-ekseni üzerinden yaklaşırsa, $k = 0$'dır ve limit 0 olur. İki yol testine göre, (x, y) noktası $(0, 0)$'a yaklaşırken f'nin limiti yoktur.

Buradaki ifade çelişkili gözükebilir. "(x, y) orijine yaklaşırken f'nin limiti yoktur demekle neyi kastediyorsunuz—bir sürü limiti var" diyebilirsiniz. Ama sorun da budur.

Yoldan bağımsız tek bir limit yoktur ve dolayısıyla, tanıma göre, $\lim_{(x,y)\to(0,\,0)} f(x,\,y)$ yoktur. ■

Sürekli fonksiyonların bileşkeleri de süreklidir. İspatı, burada ihmal edilmiştir, tek değişkenli fonksiyonlardakine benzerdir (Bölüm 2.6, Teorem 10)

Bileşkelerin Sürekliliği
f fonksiyonu $(x_0,\ y_0)$ noktasında sürekli ise ve g fonksiyonu da $f(x_0,\ y_0)$'da sürekli tek-değişkenli bir fonksiyon ise $h(x,\ y) = g(f(x,\ y))$ ile tanımlı $h = g \circ f$ bileşke fonksiyonu (x_0, y_0)'da süreklidir.

Örneğin,

$$e^{x-y}, \qquad \cos\frac{xy}{x^2+1}, \qquad \ln\left(1+x^2y^2\right)$$

fonksiyonları her (x, y) noktasında süreklidirler.

Tek değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi, genel kural sürekli fonksiyonların bileşkelerinin sürekli olduğudur. Tek koşul her fonksiyonun uygulandığı yerde sürekli olmasıdır.

İkiden Fazla Değişkenli Fonksiyonlar

İki değişkenli fonksiyonların limit ve süreklilik kavramları ile toplam, fark, çarpım, sabitle çarpım, bölüm ve kuvvetlerin limitleri ve süreklilikleriyle ilgili sonuçlar üç veya daha fazla değişkenli fonksiyonlar için de geçerlidir.

$$\ln\left(x+y+z\right) \qquad \text{ve} \qquad \frac{y\sin z}{x-1}$$

gibi fonksiyonlar tanım kümelerinde süreklidirler ve P, (x, y, z) noktasını belirtmek üzere

$$\lim_{P\to(1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^2+\cos\sqrt{xy}} = \frac{e^{1-1}}{(-1)^2+\cos 0} = \frac{1}{2},$$

gibi limitler doğrudan yerine koymayla bulunabilir.

Sürekli Fonksiyonların Kapalı ve Sınırlı Bölgelerde Ekstremum Değerleri

Kapalı ve sınırlı bir $[a,\ b]$ aralığında sürekli olan tek değişkenli bir fonksiyonun, $[a,\ b]$ içinde en az bir defa bir mutlak maksimum değer ve bir mutlak minimum değer aldığını gördük. Aynısı, düzlemin kapalı ve sınırlı bir R bölgesinde (bir doğru parçası, bir disk veya içi dolu bir üçgen gibi) sürekli olan bir $z = f(x,\ y)$ fonksiyonu için doğrudur. Fonksiyon, R'nin bir noktasında bir mutlak maksimum değer ve R'nin bir noktasında da bir mutlak minimum değer alır.

Bunlara ve bu bölümdeki diğer teoremlere benzer teoremler üç veya daha fazla değişkenli fonksiyonlar için de geçerlidir. Örneğin, bir $w = f(x,\ y,\ z)$ sürekli fonksiyonu tanımlı olduğu herhangi bir kapalı ve sınırlı küme üzerinde (katı top veya küp, silindirik kabuk, dikdörtgensel bir katı cisim) mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini alması gerekir.

Bu ekstremum değerleri nasıl bulacağımızı Bölüm 14.7'de öğreneceğiz, fakat önce yüksek boyutlarda türevleri çalışmalıyız. Bu, sıradaki bölümün konusudur.

ALIŞTIRMALAR 14.2

İki Değişkenli Limitler

1–12 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 - y^2 + 5}{x^2 + y^2 + 2}$ **2.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,4)} \frac{x}{\sqrt{y}}$

3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ **4.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-3)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2$

5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\pi/4)} \sec x \tan y$ **6.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos \frac{x^2 + y^3}{x + y + 1}$

7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y}$ **8.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \ln |1 + x^2 y^2|$

9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$ **10.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \cos \sqrt[3]{|xy| - 1}$

11. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x \sin y}{x^2 + 1}$ **12.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi/2,0)} \frac{\cos y + 1}{y - \sin x}$

Bölümlerin Limiti

13–20 alıştırmalarındaki limitleri, önce kesirleri yeniden yazarak bulun.

13. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$ **14.** $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \frac{x^2 - y^2}{x - y}$

15. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq 1}} \frac{xy - y - 2x + 2}{x - 1}$

16. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(2,-4)\\ y\neq -4,\ x\neq x^2}} \frac{y + 4}{x^2 y - xy + 4x^2 - 4x}$

17. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \frac{x - y + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

18. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(2,2)\\ x+y\neq 4}} \frac{x + y - 4}{\sqrt{x + y} - 2}$ **19.** $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(2,0)\\ 2x-y\neq 4}} \frac{\sqrt{2x - y} - 2}{2x - y - 4}$

20. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(4,3)\\ x\neq y+1}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y + 1}}{x - y - 1}$

Üç Değişkenli Limitler

21–26 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

21. $\displaystyle\lim_{P\to(1,3,4)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ **22.** $\displaystyle\lim_{P\to(1,-1,-1)} \frac{2xy + yz}{x^2 + z^2}$

23. $\displaystyle\lim_{P\to(3,3,0)} (\sin^2 x + \cos^2 y + \sec^2 z)$

24. $\displaystyle\lim_{P\to(-1/4,\pi/2,2)} \tan^{-1} xyz$ **25.** $\displaystyle\lim_{P\to(\pi,0,3)} ze^{-2y} \cos 2x$

26. $\displaystyle\lim_{P\to(0,-2,0)} \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Düzlemde Süreklilik

27–30 alıştırmalarındaki fonksiyonlar düzlemin hangi (x, y) noktalarında süreklidir?

27. **a.** $f(x, y) = \sin(x + y)$ **b.** $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

28. **a.** $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$ **b.** $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + 1}$

29. **a.** $g(x, y) = \sin \dfrac{1}{xy}$ **b.** $g(x, y) = \dfrac{x + y}{2 + \cos x}$

30. **a.** $g(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - 3x + 2}$ **b.** $g(x, y) = \dfrac{1}{x^2 - y}$

Uzayda Süreklilik

31–34 alıştırmalarındaki fonksiyonlar uzayın hangi (x, y, z) noktalarında süreklidir?

31. **a.** $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

b. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

32. **a.** $f(x, y, z) = \ln xyz$ **b.** $f(x, y, z) = e^{x+y} \cos z$

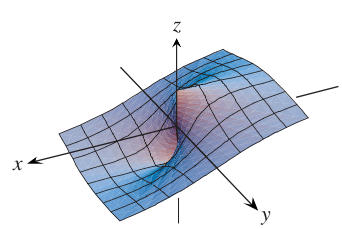
33. **a.** $h(x, y, z) = xy \sin \dfrac{1}{z}$ **b.** $h(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + z^2 - 1}$

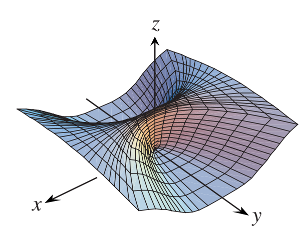
34. **a.** $h(x, y, z) = \dfrac{1}{|y| + |z|}$ **b.** $h(x, y, z) = \dfrac{1}{|xy| + |z|}$

Bir Noktada Limit Bulunmaması

Farklı yaklaşma yolları ele alarak, $(x, y) \to (0, 0)$ iken 35–42 alıştırmalarındaki fonksiyonların limitlerinin olmadığını gösterin.

35. $f(x, y) = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ **36.** $f(x, y) = \dfrac{x^4}{x^4 + y^2}$





37. $f(x, y) = \dfrac{x^4 - y^2}{x^4 + y^2}$ **38.** $f(x, y) = \dfrac{xy}{|xy|}$

39. $g(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$ **40.** $g(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$

41. $h(x, y) = \dfrac{x^2 + y}{y}$ **42.** $h(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 - y}$

Teori ve Örnekler

43. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ ise, f'nin (x_0, y_0)'da tanımlı olması gerekir mi? Yanıtınızı açıklayın.

44. $f(x_0, y_0) = 3$ ise

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$$

için, f fonksiyonu (x_0, y_0)'da sürekli ise? ve $f(x_0, y_0)$'da sürekli değilse ne söyleyebilirsiniz? Yanıtınızı açıklayın.

İki değişkenli **fonksiyonlar için Sandviç Teoremi**, merkezi (x_0, y_0)'da olan bir dairenin içindeki her $(x, y) \leq (x_0, y_0)$ için $g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y)$ ise ve $(x, y) \to (x_0, y_0)$ iken g ile h'nin limitleri sonlu ve aynı L sayısı ise

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

olduğunu söyler. Bu sonucu kullanarak 45–48 alıştırmalarındaki soruları yanıtlayın.

45.

$$1 - \frac{x^2y^2}{3} < \frac{\tan^{-1} xy}{xy} < 1$$

olduğunu bilmek, size

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan^{-1} xy}{xy}$$

hakkında bir şey söyler mi? Yanıtınızı açıklayın.

46.

$$2|xy| - \frac{x^2y^2}{6} < 4 - 4\cos\sqrt{|xy|} < 2|xy|$$

olduğunu bilmek, size

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4 - 4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$$

hakkında bir şey söyler mi? Yanıtınızı açıklayın.

47. $|\sin(1/x)| \leq 1$ |olduğunu bilmek size

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \sin\frac{1}{x}$$

hakkında bir şey söyler mi? Yanıtınızı açıklayın.

48. $|\cos(1/y)| \leq 1$ olduğunu bilmek size

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cos\frac{1}{y}$$

hakkında bir şey söyler mi? Yanıtınızı açıklayın.

49. (*Örnek 4'ün devamı*)

a. Örnek 4'ü yeniden okuyun. Sonra

$$f(x, y)\Big|_{y=mx} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

formülüne $m = \tan\theta$ koyun ve sonucu sadeleştirerek, f'nin değerlerinin doğrunun eğim açısıyla nasıl değiştiğini gösterin.

b. (a) şıkkında elde ettiğiniz sonucu kullanarak $y = mx$ doğrusu boyunca $(x, y) \to (0, 0)$ iken f'nin limitinin yaklaşma açısına bağlı olarak –1'den 1'e değiştiğini gösterin.

50. Sürekli genişleme $f(0, 0)$'ı

$$f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

fonksiyonu orijinde sürekli olacak şekilde tanımlayın.

Kutupsal Koordinatlara Dönüştürme

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ ile ilerleme kaydedemiyorsanız, kutupsal koordinatlara geçmeyi deneyin. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ yazın ve ortaya çıkan ifadenin $r \to 0$ iken limitini araştırın. Başka bir deyişle, aşağıdaki kriteri sağlayan bir L sayısı olup olmadığına karar vermeye çalışın:

$\epsilon > 0$ sayısına karşılık, her r ve θ için

$$|r| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(r, \theta) - L| < \epsilon. \tag{1}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Böyle bir L varsa,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{r\to 0} f(r, \theta) = L$$

olur. Örneğin,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\cos^3\theta = 0.$$

Bu eşitliklerin sonuncusunu doğrulamak için, $f(r, \theta) = r\cos^3\theta$ ve $L = 0$'ın (1) denklemini sağladığını göstermemiz gerekir. Yani, bir $\epsilon > 0$ sayısına karşılık, her r ve θ için,

$$|r| < \delta \quad \Rightarrow \quad |r\cos^3\theta - 0| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının var olduğunu göstermemiz gerekir.

$$|r\cos^3\theta| = |r||\cos^3\theta| \leq |r| \cdot 1 = |r|$$

olduğu için, $\delta = \epsilon$ alırsak, söylenenler doğru olur.

Tam tersine

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta$$

$|r|$'nin küçüklüğünden bağımsız olarak 0'dan 1'e kadar bütün değerleri alır, bu nedenle $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2/(x^2 + y^2)$ yoktur.

Bu örneklerin her birinde, $r \to 0$ iken limitin varlığı veya yokluğu oldukça açıktır. Ama kutupsal koordinatlara geçmek her zaman yararlı olmayabilir ve bizi yanlış sonuçlara götürebilir. Örneğin, limit her θ = sabit doğrusu (veya ışını) üzerinde bulunabilir, ama daha geniş anlamda bulunmayabilir. Örnek 4 bu noktayı belirtmektedir. Kutupsal koordinatlarda, $f(x, y) = (2x^2y)/(x^4 + y^2)$ fonksiyonu, $r \neq 0$ için

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta\sin 2\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}$$

halini alır. θ'yı sabit tutar ve $r \to 0$ alırsak, limit 0'dır. Ancak $y = x^2$ yolu üzerinde, $r \sin\theta = r^2\cos^2\theta$ olur ve

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta\sin 2\theta}{r^2\cos^4\theta + (r\cos^2\theta)^2}$$

$$= \frac{2r\cos^2\theta\sin\theta}{2r^2\cos^4\theta} = \frac{r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta} = 1.$$

bulunur.

51–56 alıştırmalarında, $(x, y) \to (0, 0)$ iken f'nin limitini bulun veya limitin bulunmadığını gösterin.

51. $f(x, y) = \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}$

52. $f(x, y) = \cos\left(\dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right)$

53. $f(x, y) = \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}$

54. $f(x, y) = \dfrac{2x}{x^2 + x + y^2}$

55. $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{|x| + |y|}{x^2 + y^2}\right)$

56. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

57 ve 58 alıştırmalarında, $f(0, 0)$'ı, f fonksiyonu orijinde sürekli olacak şekilde tanımlayın.

57. $f(x, y) = \ln\left(\dfrac{3x^2 - x^2y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}\right)$

58. $f(x, y) = \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2}$

δ-ϵ Tanımlarını Kullanmak

59–62 alıştırmalarının her biri bir $f(x, y)$ fonksiyonu ve pozitif bir ϵ sayısı vermektedir. Her alıştırmada,

$$\sqrt{x^2 - y^2} < \mathrm{d}$$

eşitsizliğini sağlayan her (x, y) için

$$|f(x, y) - f(0, 0)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının var olduğunu gösterin.

59. $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \epsilon = 0.01$

60. $f(x, y) = y/(x^2 + 1), \quad \epsilon = 0.05$

61. $f(x, y) = (x + y)/(x^2 + 1), \quad \epsilon = 0.01$

62. $f(x, y) = (x + y)/(2 + \cos x), \quad \epsilon = 0.02$

63–66 alıştırmalarının her biri bir $f(x, y, z)$ fonksiyonu ve pozitif bir ϵ sayısı vermektedir. Her alıştırmada,

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \mathrm{d}$$

eşitsizliğini sağlayan her (x, y) için

$$|f(x, y, z) - f(0, 0, 0)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının var olduğunu gösterin.

63. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad \epsilon = 0.015$

64. $f(x, y, z) = xyz, \quad \epsilon = 0.008$

65. $f(x, y, z) = \dfrac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}, \quad \epsilon = 0.015$

66. $f(x, y, z) = \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 z, \quad \epsilon = 0.03$

67. $f(x, y, z) = x + y - z$ fonksiyonunun her (x_0, y_0, z_0) noktasında sürekli olduğunu gösterin.

68. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$'nin orijinde sürekli olduğunu gösterin.

14.3 Kısmi Türevler

Çok değişkenli analiz, temelde tek değişkenli analizin her defasında bir değişkene uygulanmasıdır. Bir fonksiyonun bağımsız değişkenlerinden biri dışında hepsini sabit tutar ve o tek değişkene göre türev alırsak, bir "kısmi" türev elde ederiz. Bu bölüm kısmi türevlerin nasıl ortaya çıktıklarını, geometrik olarak nasıl yorumlandıklarını ve tek değişkenli bir fonksiyonun türev kurallarından bir kısmi türevin nasıl hesaplanacağını gösterir.

İki Değişkenli Bir Fonksiyonun Kısmi Türevleri

(x_0, y_0), bir $f(x, y)$ fonksiyonunun tanım kümesinde bir noktaysa, dikey $y = y_0$ düzlemi $z = f(x, y)$ yüzeyini $z = f(x, y_0)$ eğrisinde kesecektir (Şekil 14.13). Bu eğri $y = y_0$ düzlemindeki $z = f(x, y_0)$ fonksiyonunun grafiğidir. Bu düzlemdeki yatay koordinat x; dikey koordinat z'dir. y-değeri y_0'da sabit tutulmaktadır dolayısıyla y bir değişken değildir.

f'nin (x_0, y_0) noktasında, x'e göre kısmi türevini $f(x, y_0)$'ın $x = x_0$ noktasında x'e göre normal türevi olarak tanımlarız. Kısmi türevleri normal türevlerden ayırt etmek için önceden kullandığımız d yerine ∂ sembolünü kullanırız.