

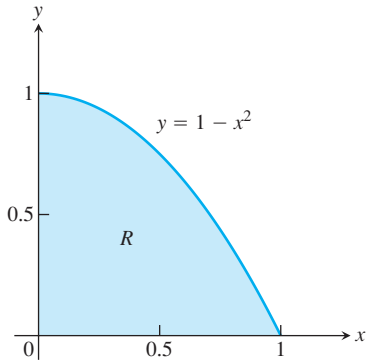
İNTEGRASYON

GİRİŞ Klasik geometrinin muazzam başarılarından biri, üçgenlerin, kürelerin ve konilerin alanları ve hacimleri için formüller elde etmektir. Bu bölümde, bunların ve başka daha genel şekillerin alanlarını ve hacimlerini hesaplamak için bir yöntem öğreneceğiz. Geliştireceğimiz yöntemin adı, alanlar ve hacimlerden çok daha fazlasını hesaplamak için bir araç olan, integrasyon dur. İntegralin istatistik, ekonomi, bilim ve mühendislikte bir çok uygulamaları vardır. Olasılıklardan enerji tüketim ortalamalarına ve bir baraj kapaklarına uygulanan kuvvetlere kadar değişen büyüklükleri hesaplamamızı sağlar.

İntegrasyonun ardındaki fikir, bir çok büyüklüğü, onu küçük parçalara bölerek ve sonra her parçanın katkısını toplayarak etkili bir şekilde hesaplayabileceğimiz fikridir. İntegral teorisini, tabiatını açıkça gösterdiği alan belirlemede geliştiriyoruz. Sonlu toplamlar içeren örneklerle başlıyoruz. Bunlar doğal olarak, daha çok terim toplandığında ne olduğu sorusuna yol açarlar. Terimlerin sayısı sonsuza giderken limite geçmek bir integral verir. İntegrasyon ve türev alma yakından bağlı oldukları halde, türevin ve ters türevin rollerini, Bölüm 5.4 te ortaya çıkana kadar görmeyeceğiz. Analizin Temel Teoremi'nde içerilen bağılıklarının tabiatı, analizdeki en önemli fikirlerden biridir.

5.1

Sonlu Toplamlarla Tahminde Bulunmak



ŞEKİL 5.1 R bölgesinin alanı basit bir geometri formülü ile bulunamaz (Örnek 1).

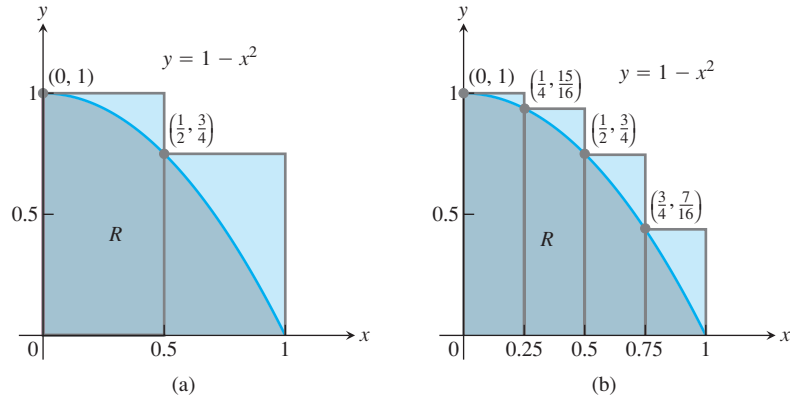
Bu bölüm, alana, ortalama değerlere ve zaman içinde bir parçacık tarafından alınan mesafeye sonlu toplamlarla nasıl yaklaşımda bulunulabileceğini göstermektedir. Sonlu toplamlar, Bölüm 5.3'teki integrali tanımlamanın temelleridir.

Alan

Sınırı eğrisel olan bir bölgenin alanına, bir dikdörtgenler topluluğunun alanlarını toplayarak yaklaşımda bulunulabilir. Daha çok dikdörtgen kullanmak yaklaşımın doğruluk derecesini artırır.

ÖRNEK 1 Alana Yaklaşımda Bulunmak

x -ekseninin üstünde, $y = 1 - x^2$ 'nin grafiği altında ve $x = 0$ ile $x = 1$ dikey doğruları arasında kalan renkli R bölgesinin alanı nedir? (Bkz. Şekil 5.1) Bir mimar, şekli R ile tanımlanan özel bir pencerenin ağırlığını hesaplamak için bu alanı bilmek isteyebilir. Fakat ne yazık ki, R bölgesi gibi eğrisel sınırları olan şekillerin alanlarını hesaplamak için basit bir geometrik formül yoktur.



ŞEKİL 5.2 (a) R bölgesini içeren iki dikdörtgen kullanarak R 'nin alanı için aslından fazla bir tahmin elde ederiz. (b) Dört dikdörtgen daha iyi bir tahmin verir. Her iki tahmin de alanın gerçek değerini aşar.

Henüz R 'nin tam alanını belirlemek için bir yöntemimiz olmamasına rağmen, basit bir şekilde yaklaşımda bulunabiliriz. Şekil 5.2a, birlikte R bölgesini içeren iki dikdörtgen göstermektedir. Her dikdörtgenin genişliği $1/2$ dir ve yükseklikleri soldan sağa 1 ve $3/4$ tür. Her dikdörtgenin yüksekliği, $[0, 1]$ 'de dikdörtgenin tabanını oluşturan alt aralığının sol uç noktasında f 'nin hesaplanmasıyla elde edilen, f fonksiyonunun maksimum değeridir. İki dikdörtgenin toplam alanı, R bölgesinin alanı A 'ya bir yaklaşımdır.

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8} = 0.875$$

İki dikdörtgen R bölgesini içerdiğinden, bu tahmin gerçek alandan daha büyüktür. 0.875 bir **üst toplamdır** deriz çünkü, her bir dikdörtgenin yüksekliği, dikdörtgenin taban aralığındaki bir x için $f(x)$ 'in maksimum (en büyük) değeri olarak alınmıştır. Şekil 5.2b de, her birinin genişliği $1/4$ olan ve birlikte R bölgesini içeren daha ince dört dikdörtgen alarak tahminimizi geliştiriyoruz. Bu dört dikdörtgen, R 'yi içerdiklerinden dolayı hala A dan büyük olan

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{32} = 0.78125$$

yaklaşımını verir.

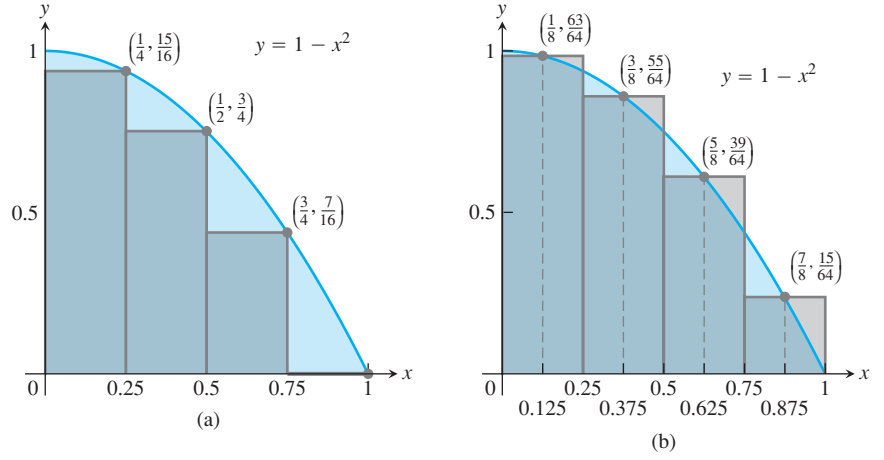
Bunun yerine, alanı tahmin etmek için Şekil 5.3a'daki gibi R bölgesinin içinde kalan dört dikdörtgen kullandığımızı varsayın. Her dikdörtgenin genişliği önceki gibi $1/4$ tür fakat dikdörtgenler daha kısadır ve bütünüyle f 'nin grafiği altında kalırlar. $f(x) = 1 - x^2$ fonksiyonu $[0, 1]$ de azalandır. Dolayısıyla, bu dikdörtgenlerden her birinin yüksekliği, dikdörtgenin tabanını oluşturan alt aralığın sağ uç noktasında f 'nin değeri ile verilir. Dördüncü dikdörtgenin yüksekliği sıfırdır ve bu yüzden alana katkısı yoktur. Yükseklikleri, taban aralıklarındaki birer x için $f(x)$ 'in minimum değerleri olan bu dikdörtgenleri toplamak alanın

$$A \approx \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{32} = 0.53125$$

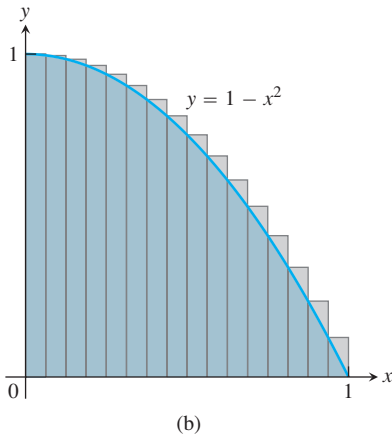
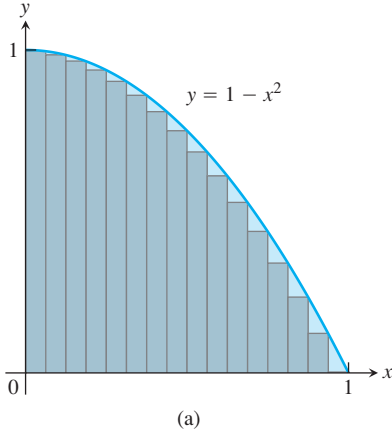
alt toplam yaklaşımını verir

Bütün dikdörtgenler R bölgesinin içinde kaldıklarından, bu tahmin A 'nın gerçek değerinden küçüktür. A 'nın gerçek değeri bu alt ve üst toplamaların arasında bir yerdedir:

$$0.53125 < A < 0.78125$$



ŞEKİL 5.3 (a) R bölgesinin içindeki dikdörtgenler alan için gerçek değerın altında bir tahmin verirler. (b) Orta nokta kuralı, yükseklikleri tabanlarının orta noktalarında $y = f(x)$ 'in değerlerine eşit olan dikdörtgenler kullanır.



ŞEKİL 5.4 (a) $\Delta x = 1/16$ eşit genişlikli 16 dikdörtgen kullanan bir alt toplam. (b) 16 dikdörtgen kullanan bir üst toplam.

Alt ve üst toplam yaklaşımlarının her ikisini birden göz önüne alarak, sadece alan için tahminler değil, alanın gerçek değeri bunlar arasında kaldığından, aynı zamanda bu tahminlerdeki olası hatanın büyüklüğü için bir sınır elde ederiz. Burada hata $0.78125 - 0.53125 = 0.25$ 'ten daha büyük olamaz.

Bir başka tahmin de, yükseklikleri tabanlarının orta noktalarında f 'nin değerlerine eşit olan dikdörtgenler kullanarak elde edilebilir (Şekil 5.3b). Bu tahmin yöntemine, alan tahmini için **orta nokta kuralı** denir. Orta nokta kuralı bir alt toplam ile bir üst toplam arasında bir tahmin verir fakat alanın gerçek değerinden büyük mü yoksa küçük mü olduğu açık değildir. Daha önceki gibi genişlikleri $1/4$ olan dört dikdörtgen ile orta nokta kuralı R bölgesinin alanını

$$A \approx \frac{63}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{55}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{39}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{64} \cdot \frac{1}{4} = \frac{172}{64} \cdot \frac{1}{4} = 0.671875$$

olarak tahmin eder. Hesapladığımız her toplamda, f 'nin tanımlı olduğu $[a, b]$ aralığı $\Delta x = (b - a)/n$ eşit genişlikli (uzunluk da denir) n alt aralığa ayrılmış ve f her bir alt aralıktaki bir noktada hesaplanmıştır: birinci alt aralıkta c_1 , ikinci alt aralıkta c_2 vs. Böylece bütün sonlu toplamlar

$$f(c_1) \Delta x + f(c_2) \Delta x + f(c_3) \Delta x + \cdots + f(c_n) \Delta x$$

şeklindeirler. Her dikdörtgen öncekinden daha ince olacak şekilde daha çok dikdörtgen almakla, bu sonlu toplamların R bölgesinin gerçek alanına çok daha iyi bir yaklaşımda bulundukları görülmektedir.

Şekil 5.4a, R 'nin alanı için eşit genişlikli 16 dikdörtgen kullanan bir alt toplam yaklaşımı göstermektedir. Bunların alanlarının toplamı, gerçek alana yakın gözüken fakat dikdörtgenler R 'nin içinde kaldıklarından gerçek alandan hala küçük olan 0.634765625 tir.

Şekil 5.4b, eşit genişlikli 16 dikdörtgen kullanan bir üst toplam yaklaşımı göstermektedir. Bunların alanlarının toplamı, dikdörtgenler birlikte R 'yi içerdiklerinden, gerçek alandan bir şekilde büyük olan 0.697265625 tir. Orta nokta kuralı bu 16 dikdörtgen için 0.666921875 toplam alanını verir fakat bu tahminin alanın gerçek değerinden büyük mü yoksa küçük mü olduğu açık değildir.

TABLO 5.1 R 'nin alanı için sonlu yaklaşımlar

Alt aralıkların sayısı	Alt toplam	Orta nokta kuralı	Üst toplam
2	.375	.6875	.875
4	.53125	.671875	.78125
16	.634765625	.6669921875	.697265625
50	.6566	.6667	.6766
100	.66165	.666675	.67165
1000	.6661665	.66666675	.6671665

Tablo 5.1, R 'nin alanına yaklaşım için 1000'e kadar dikdörtgen kullanan üst toplam ve alt toplam yaklaşımlarının değerlerini göstermektedir. Bölüm 5.2 de, her bir dikdörtgenin genişliği sıfıra giderken ve dikdörtgenlerin sayısı sonsuza giderken limit olarak, R gibi bölgelerin alanlarının gerçek değerlerinin nasıl elde edileceğini göreceğiz. Orada geliştirilecek teknikle R 'nin alanının tam olarak $2/3$ olduğunu gösterebileceğiz. ■

Gidilen Mesafe

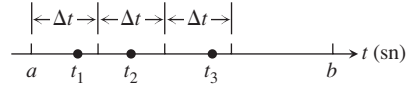
Bir otoyolda yönünü değiştirmeden ilerleyen bir otomobilin $v(t)$ hız fonksiyonunu bildiğimizi ve $t = a$ ile $t = b$ zaman aralığında otomobilin ne kadar ilerleyeceğini bilmek istediğimizi varsayın. $v(t)$ 'nin bir $F(t)$ ters türevini biliyorsak, $s(t) = F(t) + C$ yazarak otomobilin konum fonksiyonu $s(t)$ 'yi bulabiliriz. Sonra, gidilen mesafe konumdaki değişiklik, $s(b) - s(a)$ hesaplanarak bulunabilir (Bkz. Bölüm 4.8 Alıştırma 93). Hız fonksiyonu, otomobildeki hız göstergesinin değişik zamanlardaki kayıtlardan belirlenmişse, hız için bir ters türev fonksiyonu bulabileceğimiz bir formül yoktur. Peki, bu durumda ne yapacağız?

$v(t)$ hız fonksiyonu için bir ters türev bilmiyorsak, gidilen mesafeye aşağıdaki şekilde yaklaşımda bulunabiliriz. $[a, b]$ aralığını, her birinde hız'ın neredeyse sabit olduğu kısa zaman aralıklarına böleriz. Her alt zaman aralığında gidilen mesafeye, bilinen

$$\text{Mesafe} = \text{hız} \times \text{zaman}$$

uzaklık formülüyle yaklaşımda bulunur ve $[a, b]$ boyunca bütün sonuçları toplarız.

Bölünen aralığın aşağıdaki gibi görüldüğünü varsayın:



Burada alt aralıkların hepsinin uzunluğu Δt 'dir. Birinci alt aralıktan bir t_1 noktası alın. Eğer Δt hızın neredeyse sabit olacağı kadar kısaysa, birinci zaman aralığında otomobilin gittiği mesafe yaklaşık $v(t_1) \Delta t$ kadardır. t_2 ikinci alt aralıktaki bir nokta ise ikinci zaman aralığında otomobilin gittiği mesafe yaklaşık $v(t_2) \Delta t$ kadardır. Bütün zaman aralıklarında gidilen mesafelerin toplamı, n alt aralıkların toplam sayısı olmak üzere

$$D \approx v(t_1) \Delta t + v(t_2) \Delta t + \cdots + v(t_n) \Delta t,$$

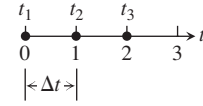
dir.

ÖRNEK 2 Bir Merminin Yüksekliğini Tahmin Etmek

Dik olarak havaya atılan bir merminin hızı $f(t) = 160 - 9.8t$ m/sn'dir. Tanımlanan toplama tekniğini kullanarak merminin ilk 3 saniyede ne kadar yükseldiğini bulun. Toplamlar gerçek sonuç 435.9 m'ye ne kadar yaklaşmaktadır?

Çözüm Farklı aralık sayılarında ve farklı hesaplama noktalarındaki sonuçları araştıracağız. $f(t)$ 'nin azalan olduğuna dikkat edin, bu nedenle sol uç noktaları seçmek bir üst toplam tahmini; sağ uç noktaları seçmek bir alt toplam tahmini verir.

(a) f 'nin sol uç noktalarda hesaplandığı 1 uzunluklu 3 alt aralık. Bir üst toplam:

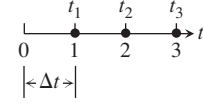


$t = 0, 1$ ve 2 'de hesaplanmış f ile

$$\begin{aligned} D &\approx f(t_1) \Delta t + f(t_2) \Delta t + f(t_3) \Delta t \\ &= [160 - 9.8(0)](1) + [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) \\ &= 450.6. \end{aligned}$$

buluruz.

(b) f 'nin sağ uç noktalarda hesaplandığı 1 uzunluklu 3 alt aralık. Bir alt toplam:

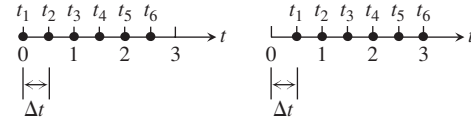


$t = 1, 2$ ve 3 'te hesaplanmış f ile

$$\begin{aligned} D &\approx f(t_1) \Delta t + f(t_2) \Delta t + f(t_3) \Delta t \\ &= [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) + [160 - 9.8(3)](1) \\ &= 421.2. \end{aligned}$$

buluruz.

(c) $1/2$ uzunluğunda 6 alt aralıkla



buluruz.

Sol uç noktaları kullanan bir üst toplam: $D \approx 443.25$ sağ uç noktaları kullanan bir alt toplam: $D \approx 428.55$.

Bu altı aralık tahminleri, üç aralık tahminlerinden biraz daha sonuca yakındır. Alt aralıklar kısaltıldıkça sonuçlar daha da iyileşir.

Tablo 5.2'de görebileceğimiz gibi, sol uç nokta üst toplamları gerçek değer 435.9'a yukarıdan yaklaşırlarken, sağ uç nokta alt toplamları alttan yaklaşır. Gerçek değer bu alt

TABLO 5.2 Gidilen mesafe tahminleri

Alt aralıkların sayısı	Her alt aralığın uzunluğu	Üst toplam	Alt toplam
3	1	450.6	421.2
6	1/2	443.25	428.55
12	1/4	439.57	432.22
24	1/8	437.74	434.06
48	1/16	436.82	434.98
96	1/32	436.36	435.44
192	1/64	436.13	435.67

ve üst toplamların arasında bir yerde bulunmaktadır. En yakın girdilerdeki hatanın büyüklüğü 0.23, yani gerçek değerin ufak bir yüzdesidir:

$$\begin{aligned} \text{Hata büyüklüğü} &= \left| \text{gerçek değer} - \text{hesaplanan değer} \right| \\ &= \left| 435.9 - 435.67 \right| = 0.23 \end{aligned}$$

$$\text{Hata yüzdesi} = \frac{0.23}{435.9} \approx \%0.05.$$

Tablodaki son girdilerden merminin uçuşun ilk üç saniyesinde 436 m civarında yükseldiği sonucunu çıkarmak mantıklıdır. ■

Gidilen Mesafeye Karşı Yerdeğiştirme

Konum fonksiyonu $s(t)$ olan bir cisim bir koordinat doğrusu üzerinde yönünü değiştirmeden hareket ediyorsa $t = a$ ile $t = b$ zaman aralığında gitmiş olduğu toplam mesafeyi, Örnek 2'deki gibi kısa aralıklar üzerinde gitmiş olduğu mesafeleri toplayarak bulabiliriz. Cisim, hareketi süresince bir veya daha fazla defa yön değiştirirse, kat edilen toplam mesafeyi bulmak için cismin $v(t)$ hızının mutlak değeri olan $|v(t)|$, süratini kullanmamız gerekir. Örnek 2'deki gibi yalnızca hızı kullanmak, sadece cismin başlangıç ve bitiş konumları arasındaki fark olan $s(b) - s(a)$ **yer değiştirmesinin** bir tahminini verir.

Nedenini görmek için, $[a, b]$ aralığını, cismin t_{k-1} den t_k 'ya hızının çok değişmediği, yeteri kadar küçük Δt eşit aralıklarına bölelim. Bu durumda $v(t_k)$, bütün alt aralık boyunca cismin hızının iyi bir yaklaşımını verir. Bundan dolayı, zaman aralığı boyunca cismin konumunun koordinatındaki değişim yaklaşık olarak

$$v(t_k) \Delta t$$

dir. $v(t_k)$ pozitif ise değişim pozitif, $v(t_k)$ negatif ise değişim negatiftir.

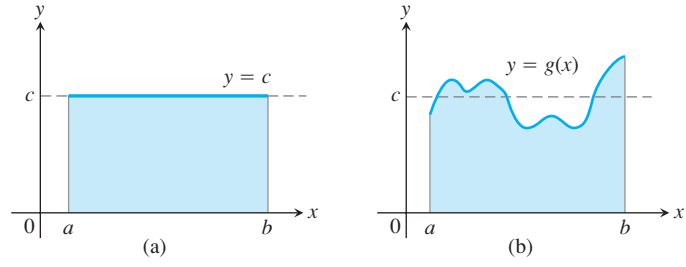
Her iki durumda alt aralık süresince gidilen toplam mesafe yaklaşık olarak

$$|v(t_k)| \Delta t$$

dir. **Alınan toplam yol** yaklaşık olarak

$$|v(t_1)| \Delta t + |v(t_2)| \Delta t + \cdots + |v(t_n)| \Delta t$$

toplamıdır.



ŞEKİL 5.5 (a) $f(x) = c$ 'nin $[a, b]$ aralığı üzerindeki ortalama değeri, dikdörtgen alanının $b - a$ 'ya bölümüdür. (b) $g(x)$ 'in $[a, b]$ aralığı üzerindeki ortalama değeri, grafiği altındaki alanın $b - a$ 'ya bölümüdür.

Negatif Olmayan Bir Fonksiyonun Ortalama Değeri

n sayıdan oluşan bir $x_1, x_2, \dots, x_n$ kümesinin ortalama değeri, sayıların toplamını n 'ye bölmekle elde edilir. Fakat, sürekli bir f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığı üzerindeki ortalama değeri nedir? Böyle bir fonksiyon sonsuz sayıda değer alabilir. Örneğin, bir şehrin belirli bir yerindeki sıcaklık, her gün yükselen ve alçalan sürekli bir fonksiyondur. Bir şehirde, gün içinde ortalama sıcaklık 73 derecedir demek ne anlama gelmektedir?

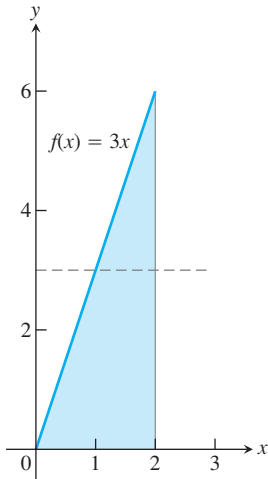
Fonksiyon sabit olduğunda bu soruyu cevaplamak kolaydır. $[a, b]$ aralığı üzerinde değeri sabit ve c olan bir fonksiyonun ortalama değeri c dir. c pozitif ise fonksiyonun $[a, b]$ aralığı üzerindeki grafiği yüksekliği c olan bir dikdörtgen verir. Bu durumda fonksiyonun ortalama değeri geometrik olarak, bu dikdörtgenin alanının $b - a$ genişliğine bölümü olarak yorumlanabilir (Şekil 5.5a).

Şekil 5.5b'deki gibi sabit olmayan bir g fonksiyonunun ortalama değerini bulmak istersek ne olacak? Bu grafiği, $x = a$ ve $x = b$ duvarları ile sınırlı bir deponun içinde çalkalanmakta olan suyun yüksekliğinin bir fotoğrafı olarak düşünebiliriz. Su hareket ederken her noktadaki yüksekliği değişir fakat ortalama yüksekliği sabit kalır. Suyun ortalama yüksekliğini elde etmek için, seviyesi ve yüksekliği sabit olana kadar durulmasını bekleriz. Sonuçtaki c yüksekliği g 'nin grafiği altındaki alanın $b - a$ 'ya bölümüne eşittir. Negatif olmayan bir fonksiyonun bir $[a, b]$ aralığı üzerindeki ortalama değerini, grafiğinin altındaki alanın $b - a$ 'ya bölümü olarak tanımlarız. Bu tanımın geçerli olması için, bir grafiğin altındaki alan ile neyin kastedildiğini tam olarak anlamamız gerekir. Bu, Bölüm 5.3'te elde edilecektir. Şimdilik iki basit örneğe bakalım.

ÖRNEK 3 Bir Lineer Fonksiyonun Ortalama Değeri

$f(x) = 3x$ fonksiyonunun $[0, 2]$ aralığı üzerindeki ortalama değeri nedir?

Çözüm Ortalama, grafiğin altındaki alanın aralığın genişliğine bölümüne eşittir. Bu durumda, grafiğin altındaki alanı kestirmek için sonlu yaklaşımda bulunmak zorunda değiliz: yüksekliği 6 ve tabanı 2 olan bir üçgenin alanı 6 dır (Şekil 5.6). Aralığın genişliği $b - a = 2 - 0 = 2$ dir. Fonksiyonun ortalama değeri $6/2 = 3$ tür. ■

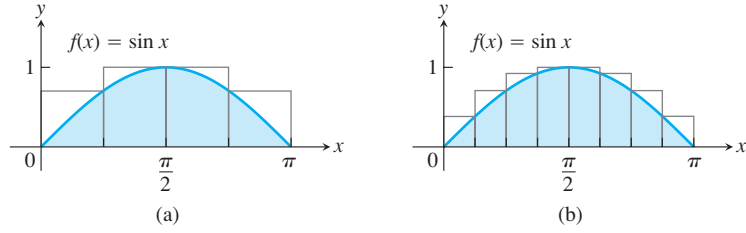


ŞEKİL 5.6 $f(x) = 3x$ fonksiyonunun $[0, 2]$ aralığı üzerindeki ortalama değeri 3 tür (Örnek 3).

ÖRNEK 4 x 'in Ortalama Değeri

$f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığı üzerindeki ortalama değerini kestirin.

Çözüm Şekil 5.7'de $\sin x$ 'in 0 ile π arasındaki grafiğine bakarak, ortalama yüksekliğinin



ŞEKİL 5.7 $f(x) = \sin x$ 'in $[0, \pi]$ aralığı üzerindeki ortalama değerini hesaplamak için 0 ile π arasında $f(x) = \sin x$ 'in altındaki alana (a) dört dikdörtgen; (b) sekiz dikdörtgen kullanarak yaklaşımda bulunmak.

0 ile 1 arasında bir yerde olduğunu görebiliriz. Ortalamayı bulmak için grafiğin altındaki A alanını bulmamız ve bu alanı aralığın uzunluğu $\pi - 0 = \pi$ ile bölmemiz gerekir.

Alanı belirlemek için basit bir yolumuz yoktur, dolayısıyla sonlu toplamlarla yaklaşırız. Bir üst toplam yaklaşımı elde etmek için, $[0, \pi]$ üzerinde $y = \sin x$ 'in altında ve x -ekseninin üstündeki alanı birlikte içiren, genişlikleri eşit ve $\pi/4$ olan dört dikdörtgenin alanlarını toplarız. Dikdörtgenlerin yüksekliklerini, her bir alt aralıkta $\sin x$ 'in en büyük değeri olarak alırız. Özel bir alt aralık üzerinde bu en büyük değer, sol uç noktada, sağ uç noktada veya bunlar arasında bir yerde bulunabilir. Bir üst toplam için dikdörtgenin yüksekliğini bulmak amacıyla $\sin x$ 'i bu noktada hesaplarız. Dikdörtgen alanlarının toplamı toplam alanı kestirir (Şekil 5.7a):

$$\begin{aligned} A &\approx \left(\sin \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{4} + \left(\sin \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{4} + \left(\sin \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{4} + \left(\sin \frac{3\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{\pi}{4} \approx (3.42) \cdot \frac{\pi}{4} \approx 2.69 \end{aligned}$$

$\sin x$ 'in ortalama değerini kestirmek için yaklaşık alanı π ile böleriz ve $2.69/\pi \approx 0.86$ yaklaşımını elde ederiz.

Her biri $y = \sin x$ 'in grafiği üzerinde kalan (Şekil 5.7b), genişlikleri eşit ve $\pi/8$ olan sekiz dikdörtgen kullanırsak

$$\begin{aligned} A &\approx \left(\sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{7\pi}{8}\right) \cdot \frac{\pi}{8} \\ &\approx (.38 + .71 + .92 + 1 + 1 + .92 + .71 + .38) \cdot \frac{\pi}{8} = (6.02) \cdot \frac{\pi}{8} \approx 2.365 \end{aligned}$$

alan yaklaşımını elde ederiz. Bu sonucu aralığın uzunluğu olan π ile bölmek, daha doğru olan 0.753 tahminini verir. Alana yaklaşım için bir üst toplam kullandığımızdan bu tahmin, $\sin x$ 'in $[0, \pi]$ üzerindeki gerçek ortalama değerinden büyüktür. Her bir dikdörtgenin giderek incelendiği daha çok dikdörtgen kullanırsak gerçek ortalama değere daha çok yaklaşırız. Bölüm 5.3'teki tekniği kullanarak gerçek ortalama değerin $2/\pi \approx 0.64$ olduğunu göreceğiz.

Daha önceki gibi, $y = \sin x$ 'in grafiği altında kalan dikdörtgenler de kullanılabilir ve bir alt toplam yaklaşımı hesaplayabilirdik veya orta nokta kuralını da kullanabilirdik. Bölüm 5.3'te, yaklaşım dikdörtgenlerinin bir üst toplam, bir alt toplam veya arada bir toplam verecek şekilde seçilmesinin önemli olmadığını göreceğiz. Her durumda, bütün dikdörtgenler yeteri kadar ince ise, yaklaşımlar gerçek alana yakındırlar. ■

Özet

Pozitif bir fonksiyonun grafiği altındaki alana, yön değiştirmeyen bir cismin kat ettiği yola ve negatif olmayan bir fonksiyonun bir aralık üzerindeki ortalama değerine sonlu toplamlarla yaklaşımda bulunulabilir. Önce aralığı, her bir alt aralıkta f fonksiyonu neredeyse sabit olacak şekilde, alt aralıklara böleriz. Sonra her alt aralığın genişliğini, fonksiyonun bu alt aralıkta bir noktadaki değeri ile çarpıp ve bu çarpımları toplarız. $[a, b]$ aralığı, genişlikleri eşit ve $\Delta x = (b - a)/n$ olan n alt aralığa böldüyse ve $f(c_k)$, fonksiyonun k . alt aralıktan seçilen c_k noktasındaki değeri ise bu işlem

$$f(c_1) \Delta x + f(c_2) \Delta x + f(c_3) \Delta x + \dots + f(c_n) \Delta x$$

şeklinde bir sonlu toplam verir. c_k noktalarının seçimi, fonksiyonun k . alt aralıktaki değerini maksimize veya minimize edebilir veya bu arada bir değer verebilir. Gerçek değer, üst toplamlar ve alt toplamlarla verilen yaklaşımların arasında bir yerde kalır. Gördüğümüz sonlu toplam yaklaşımları, daha ince ve daha çok alt aralık aldığımızda daha iyi sonuçlar vermişlerdir.

ALİŞTIRMALAR 5.1

Alan

1–4 alıştırmalarında, fonksiyonun grafiği altında kalan alanı kestirmek için sonlu yaklaşımlar kullanın.

- eşit genişlikli iki dikdörtgen ile bir alt toplam.
 - eşit genişlikli dört dikdörtgen ile bir alt toplam.
 - eşit genişlikli iki dikdörtgen ile bir üst toplam.
 - eşit genişlikli dört dikdörtgen ile bir üst toplam.
- $f(x) = x^2$, $x = 0$ ve $x = 1$ arasında.
 - $f(x) = x^3$, $x = 0$ ve $x = 1$ arasında.
 - $f(x) = 1/x$, $x = 1$ ve $x = 5$ arasında.
 - $f(x) = 4 - x^2$, $x = -2$ ve $x = 2$ arasında.

Yükseklikleri, tabanının orta noktasındaki fonksiyon değeri ile verilen (*orta nokta kuralı*) dikdörtgenler kullanarak, aşağıdaki fonksiyonların grafikleri altındaki alanları, önce iki sonra dört dikdörtgen kullanarak kestirin.

- $f(x) = x^2$, $x = 0$ ve $x = 1$ arasında.
- $f(x) = x^3$, $x = 0$ ve $x = 1$ arasında.
- $f(x) = 1/x$, $x = 1$ ve $x = 5$ arasında.
- $f(x) = 4 - x^2$, $x = -2$ ve $x = 2$ arasında.

Mesafe

- Kat edilen mesafe** Aşağıdaki tablo 10 saniye süre ile bir yol boyunca ilerleyen bir model tren motorunun hızını göstermektedir. 1 uzunluklu 10 alt aralık kullanarak
 - sol uç nokta değerleri ile
 - sağ uç nokta değerleri ile
 motorun aldığı yolu kestirin.

Zaman (sn)	Hız (inç/sn)	Zaman (sn)	Hız (inç./sn)
0	0	6	11
1	12	7	6
2	22	8	2
3	10	9	6
4	5	10	0
5	13		

- Akıntıya karşı alınan yol** Kabaran bir nehrin kıyısında oturmuş, gelen dalganın bir şişeyi akıntıya karşı götürmesini izliyorsunuz. Bir saat boyunca her 5 dakikada bir akışın hızını aşağıda verilen tabloya kaydediyorsunuz. Şişe bu 1 saat içinde akıntıya karşı ne kadar ilerlemiştir? 5 uzunluklu 12 aralık kullanarak

- sol uç değerlerde
 - sağ uç değerlerde
- bir tahminde bulunun.

Zaman (dak.)	Hız (m/sn)	Zaman (dak.)	Hız (m/sn)
0	1	35	1.2
5	1.2	40	1.0
10	1.7	45	1.8
15	2.0	50	1.5
20	1.8	55	1.2
25	1.6	60	0
30	1.4		

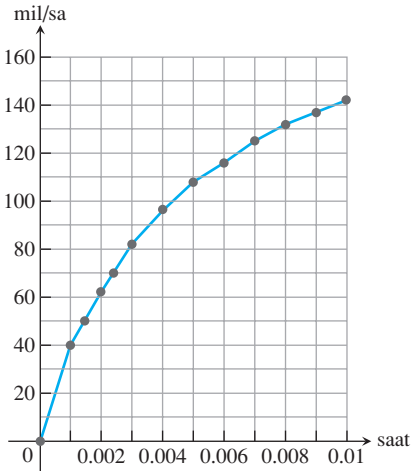
11. Bir yolun uzunluğu Siz ve bir arkadaşınız virajlı ve bozuk bir yolda, hız göstergesi çalışan, fakat mil göstergesi bozuk olan bir arabayla yola çıkmak üzeresiniz. Bu belirli mesafenin ne kadar olduğunu bulmak için, 10 saniyelik aralıklarla arabanın hızını ölçerek aşağıdaki tabloda gösterilen değerleri elde ediyorsunuz. Yolun uzunluğunu

- sol uç nokta değerlerini kullanarak,
- sağ uç nokta değerlerini kullanarak hesaplayın.

Hız		Hız	
Zaman (s)	(ft/sn'ye çevrilmiş) (30 mil/sa = 44 ft/sn)	Zaman (s)	(ft/sn'ye çevrilmiş) (30 mil/sa = 44 ft/sn)
0	0	70	15
10	44	80	22
20	15	90	35
30	35	100	44
40	30	110	30
50	44	120	35
60	35		

12. Hız datasından kat edilen mesafe Aşağıdaki tabloda 0 mil/saat hızlanarak 36 saniyede (bir saatin binde 10'u) 142 mil/sa hızla ulaşan bir yarış arabasının hız verileri bulunmaktadır.

Zaman (sa)	Hız (mil/sa)	Zaman (sa)	Hız (mil/sa)
0.0	0	0.006	116
0.001	40	0.007	125
0.002	62	0.008	132
0.003	82	0.009	137
0.004	96	0.010	142
0.005	108		



- Dikdörtgenler kullanarak arabanın 142 mil/saat hızla çıkması için gereken 36 saniyede ne kadar yol aldığını bulun.
- Arabanın yarı yola varması kabaca ne kadar sürer? O anda arabanın hızı nedir?

Hız ve Mesafe

13. Hava direnci ile serbest düşüş Bir cisim bir uçaktan aşağı doğru atılıyor. Cisim giderek hızlanıyor, ancak ivme hava direnci yüzünden zamanla azalıyor. İvme ft/sn^2 olarak ölçülüyor ve atılıştan sonraki 5 s boyunca her saniyede bir aşağıdaki tabloya işleniyor.

t	0	1	2	3	4	5
a	32.00	19.41	11.77	7.14	4.33	2.63

- $t = 5$ sn iken sürat için tahmini bir üst değer bulun.
- $t = 5$ sn iken sürat için tahmini bir alt değer bulun.
- $t = 3$ sn iken, düşülen mesafe için bir üst tahmin bulun.

14. Bir merminin aldığı yol Bir cisim deniz seviyesinden yukarı doğru $400 \text{ ft}/\text{sn}$ 'lik bir ilk hızla atılmıştır.

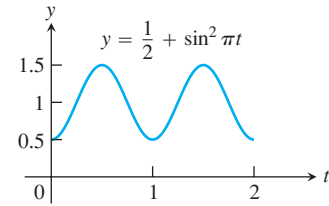
- Cisme etkiyen tek kuvvetin yerçekimi olduğunu varsayarak, 5 sn geçtikten sonraki sürat için tahmini bir üst değer bulun. Yerçekimi sabitini $g = 32 \text{ ft}/\text{sn}^2$ olarak alın.
- 5 sn sonra gelinen yükseklik için bir alt değer bulun.

Bir Fonksiyonun Ortalama Değeri

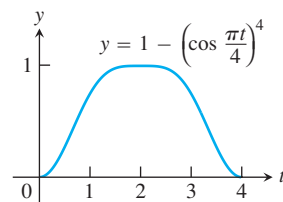
15–18 alıştırmalarında, sonlu bir toplam kullanarak f 'nin verilen aralıktaki ortalama değerini aralığı eşit uzunluklu dört alt aralığa bölerek ve f 'yi bu aralıkların orta noktalarında hesaplayarak bulun.

15. $f(x) = x^3$, $[0, 2]$ 16. $f(x) = 1/x$, $[1, 9]$

17. $f(t) = (1/2) + \sin^2 \pi t$, $[0, 2]$



18. $f(t) = 1 - \left(\cos \frac{\pi t}{4}\right)^4$, $[0, 4]$



Kirlilik Kontrolü

19. **Su kirliliği** Hasarlı bir tankerden denize yağ sızmaktadır. Tankerdeki hasar, aşağıdaki tabloya kaydedilen sızmanın her saat daha da artmasından anlaşılacağı gibi artmaktadır.

Zaman (sa)	0	1	2	3	4
Sızma (gal/sa)	50	70	97	136	190

Zaman (sa)	5	6	7	8
Sızma (gal/sa)	265	369	516	720

- a. 5 saat sonra sızmış olan yağ miktarı için bir alt ve üst değer bulun.
- b. (a) şıkkını 8 saat sonra sızmış olan yağ miktarı için tekrarlayın.
- c. ilk 8 saatten sonra tanker 720 gal/sa yağ sızdırmaya devam etmektedir. Eğer tankerde başlangıçta 25.000 gal yağ varsa, en kötü ve en iyi durumlarda bütün yağın boşalması için ortalama kaç saat daha geçmesi gerekir?

20. **Air pollution** Bir güç santrali petrol yakarak elektrik üretmektedir. Yanma işleminin sonucunda ortaya çıkan zararlı maddeler duman bacalarında gaz temizleyicilerle temizlenmektedir. Zamanla, temizleyiciler etkinliklerini kaybederler ve kirlilik geçerli hükümet standartlarını aştığı zaman değiştirilmeleri gerekir. Kirlilik ölçümleri her ayın sonunda alınarak zehirli maddelerin ne hızla atmosfere yayıldıkları belirlenir. Aşağıdaki tabloda bu ölçümler verilmektedir.

Ay	Oc.	Şub.	Mart	Nis.	May.	Haz.
Zehirli madde sızma hızı (ton/gün)	0.20	0.25	0.27	0.34	0.45	0.52

Ay	Tem.	Ağu.	Eyl.	Ekim	Kas.	Ara.
Zehirli madde sızma hızı (ton/gün)	0.63	0.70	0.81	0.85	0.89	0.95

- a. Bir ayın 30 gün olduğunu ve yeni gaz temizleyicilerin sadece 0.05 ton/gün sızmaya izin verdiklerini varsayarak, Haziran sonuna kadar sızan kirliliğin toplam tonajının üst değerini hesaplayın. Alt değer nedir?
- b. En iyi durumda, yaklaşık olarak ne zaman toplam 125 ton zehirli madde atmosfere karışır?

Bir Çemberin Alanı

21. Yarıçapı 1 olan bir çember içine bir düzgün n -kenarlı çokgen yerleştirin ve n 'nin aşağıdaki değerleri için çokgenin alanını hesaplayın.
- a. 4 (kare) b. 8 (sekizgen) c. 16
- d. (a), (b) ve (c) deki alanları çemberin alanı ile karşılaştırın
22. (Alıştırma 21'in devamı)
- a. Yarıçapı 1 olan bir çember içine bir düzgün n -kenarlı çokgen yerleştirin ve çokgenin köşelerine çizilen yarıçapların oluşturduğu n eş üçgenden birinin alanını hesaplayın.
- b. Çizilen çokgenin alanının limitini $n \rightarrow \infty$ iken bulun.
- c. (a) ve (b) de yaptığınız hesaplamaları r yarıçaplı bir çember için tekrarlayın

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

23–26 alıştırmaalarında, aşağıdaki adımları gerçekleştirmek için bir BCS kullanın.

- a. Verilen aralıkta fonksiyonları çizin.
- b. Aralığı $n = 100, 200$ ve 1000 alt aralığa bölün ve fonksiyonun her alt aralığın orta noktasındaki değerini bulun.
- c. (b) şıkkında üretilen fonksiyon değerlerinin ortalamasını bulun.
- d. (c) şıkkında $n = 1000$ alt aralık için hesaplanan ortalama değeri kullanarak $f(x) = (\text{ortalama değer})$ denklemini çözün.
23. $f(x) = \sin x$, $[0, \pi]$ 24. $f(x) = \sin^2 x$, $[0, \pi]$

25. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

26. $f(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}$, $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

5.2

Sigma Gösterimi ve Sonlu Toplamların Limitleri

Bölüm 5.1 de sonlu toplamlarla tahmin etmede çoğunlukla çok sayıda terim içeren toplamlarla (örneğin Tablo 5.1 de 1000'e kadar) karşılaştık. Bu bölümde çok sayıda terim içeren toplamları yazmak için bir gösterim tanıtıyoruz. Gösterimi tanımladıktan ve birkaç özelliğini belirttikten sonra terimleri sayısı sonsuza yaklaşan bir sonlu toplam yaklaşımına ne olduğuna bakacağız.

Sonlu Toplamlar ve Sigma Gösterimi

Sigma Gösterimi, çok sayıda terimi olan bir sonlu toplamı

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

şeklinde kısa olarak yazmamızı sağlar. Büyük Yunan harfi Σ (Sigma'nın baş harfi S'ye karşılık gelir) ve "toplam" anlamındadır. **Toplama indisi** k , toplamın nereden başladığını (Σ sembolünün altındaki sayıdan) ve nerede sona erdiğini söyler (Σ sembolünün üstündeki sayıda). İndisi göstermek için herhangi bir harf kullanılabilir fakat i, j ve k gelenek-seldir.

$\sum_{k=1}^n a_k$

Toplama sembolü (Yunan harfi sigma) — $\sum$ — a_k — k terim için bir formüldür

n — k indisi $k = n$ da sonlanır.
 $k=1$ — k indisi $k = 1$ den başlar.

Böylece,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 = \sum_{k=1}^{11} k^2$$

ve

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(100) = \sum_{i=1}^{100} f(i)$$

yazabiliriz. Bu eşitliklerin sağ tarafında kullanılan sigma gösterimi sol taraftaki toplam ifadelerinden daha sadedir (daha bir bütündür).

ÖRNEK 1 Sigma Gösterimini Kullanmak

Sigma gösteriminde toplam	Toplamın açık hali, her k değeri için bir terim	Toplamın değeri
$\sum_{k=1}^5 k$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$	15
$\sum_{k=1}^3 (-1)^k k$	$(-1)^1(1) + (-1)^2(2) + (-1)^3(3)$	$-1 + 2 - 3 = -2$
$\sum_{k=1}^2 \frac{k}{k+1}$	$\frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1}$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$
$\sum_{k=4}^5 \frac{k^2}{k-1}$	$\frac{4^2}{4-1} + \frac{5^2}{5-1}$	$\frac{16}{3} + \frac{25}{4} = \frac{139}{12}$

Toplamanın alt limiti 1 olmak zorunda değildir; herhangi bir tamsayı olabilir.

ÖRNEK 2 Farklı İndis Başlangıç Değerleri Kullanmak

$1 + 3 + 5 + 7 + 9$ toplamını sigma gösteriminde yazın.

Çözüm Terimleri üreten formül toplamın alt sınırı ile değişir fakat üretilen terimler aynı kalır. Çoğunlukla $k = 0$ veya $k = 1$ ile başlamak en basitidir.

$$k = 0 \text{ ile başlamak: } 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=0}^4 (2k + 1)$$

$$k = 1 \text{ ile başlamak: } 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=1}^5 (2k - 1)$$

$$k = 2 \text{ ile başlamak: } 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=2}^6 (2k - 3)$$

$$k = -3 \text{ ile başlamak: } 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=-3}^1 (2k + 7) \quad \blacksquare$$

Eğer,

$$\sum_{k=1}^3 (k + k^2)$$

şeklinde bir toplam söz konusu ise terimleri aşağıdaki şekilde yeniden düzenleyebiliriz.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 (k + k^2) &= (1 + 1^2) + (2 + 2^2) + (3 + 3^2) \\ &= (1 + 2 + 3) + (1^2 + 2^2 + 3^2) \quad \text{Terimleri tekrar gruplama} \\ &= \sum_{k=1}^3 k + \sum_{k=1}^3 k^2 \end{aligned}$$

Bu, sonlu toplamlar için genel bir kural gösterir:

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

Bu şekilde dört kural aşağıda verilmiştir. Bunların doğru olduklarının bir ispatı matematik tümevarım yöntemi ile elde edilebilir (Bkz. Ek 1).

Sonlu Toplamlar için Cebir Kuralları

1. *Toplam Kuralı:* $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$
2. *Fark Kuralı:* $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$
3. *Sabit Çarpım Kuralı:* $\sum_{k=1}^n c a_k = c \cdot \sum_{k=1}^n a_k$ (Herhangi bir c sayısı)
4. *Sabit Değer Kuralı:* $\sum_{k=1}^n c = n \cdot c$ (c herhangi bir sabit değer)

ÖRNEK 3 Sonlu Toplamlar için Cebir Kurallarını Kullanmak

$$(a) \sum_{k=1}^n (3k - k^2) = 3 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2$$

$$(b) \sum_{k=1}^n (-a_k) = \sum_{k=1}^n (-1) \cdot a_k = -1 \cdot \sum_{k=1}^n a_k = - \sum_{k=1}^n a_k$$

$$(c) \sum_{k=1}^3 (k + 4) = \sum_{k=1}^3 k + \sum_{k=1}^3 4$$

$$= (1 + 2 + 3) + (3 \cdot 4)$$

$$= 6 + 12 = 18$$

$$(d) \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

Fark kuralı ve
Sabitler çarpım
kuralı.

$n = 4$ ile (2) ve (1)
denklemleri

Toplam kuralı

Sabit değer
kuralı

Sabit değer kuralı
($1/n$ bir sabittir)

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

Yıllar boyu insanlar sonlu toplamların değerleri için bir çok formül geliştirmişlerdir. Bunların en ünlüleri ilk n tamsayının toplamı (Gauss bunu 8 yaşındayken bulmuştur) ve ilk n tamsayının kareleri ile küplerinin toplamı için olan formüllerdir.

ÖRNEK 4 İlk n Tamsayının Toplamı

İlk n tamsayının toplamının

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

olduğunu gösterin.

Çözüm: Formül, ilk 4 sayının toplamının

$$\frac{(4)(5)}{2} = 10$$

olduğunu söyler. Toplama bu iddiayı gerçekler:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Formülü genel olarak ispatlamak için toplamdaki terimleri iki defa yazarız, bir ileriye ve bir de geriye doğru

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 1 \end{array}$$

Birinci sütundaki iki terimi toplarsak $1 + n = n + 1$ elde ederiz. Benzer şekilde, ikinci sütundaki iki terimi toplarsak $2 + (n-1) = n + 1$ elde ederiz. Herhangi bir sütundaki iki terimin toplamı $n + 1$ dir. n sütunu topladığımızda, her biri $n + 1$ 'e eşit olan n terim elde ederiz ve toplam $n(n + 1)$ 'e eşittir. Bu istenen değer iki katı olduğundan ilk n sayının toplamı $n(n + 1)/2$ dir. ■

İlk n tamsayının kareleri ile küpleri toplamı için olan formüller matematik tümevarım yöntemi ile ispatlanır (Bkz. Ek 1). Aşağıda bunları belirtiyoruz.

$$\begin{array}{ll} \text{İlk } n \text{ kare:} & \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \text{İlk } n \text{ küp:} & \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \end{array}$$

Sonlu Toplamların Limitleri

Bölüm 5.1’de ele alınan sonlu toplam yaklaşımları, terim sayısı arttırıldığında ve alt aralıkların genişlikleri (uzunlukları) kısaltıldığında daha doğru hale geldiler. Aşağıdaki örnek, alt aralıkların genişlikleri sıfıra giderken ve sayıları sonsuza giderken bir limit değerinin nasıl hesaplanacağını göstermektedir.

ÖRNEK 5 Bir Alana Sonlu Yaklaşımların Limiti

Sayıları sonsuza ve genişlikleri sıfıra giden eşit genişlikli dikdörtgenler kullanarak, $y = 1 - x^2$ ’nin grafiğinin altında ve x -eksenin $[0, 1]$ aralığının üst kısmındaki R bölgesinin alanının alt yaklaşımlarının limit değerini bulun (Bkz. Şekil 5.4a).

Çözüm Genişlikleri eşit ve $\Delta x = (1 - 0)/n$ olan n tane dikdörtgen kullanarak bir alt toplam yaklaşımı hesaplarız ve $n \rightarrow \infty$ iken ne olduğuna bakarız. $[0, 1]$ aralığını eşit genişlikli n alt aralığa ayırmakla başlarız

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, n\right].$$

Her alt aralığın genişliği $1/n$ dir. $1 - x^2$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığı üzerinde azalandır ve bir alt aralıktaki en küçük değeri, alt aralığın sağ uç noktasındadır. Dolayısıyla, $[(k-1)/n, k/n]$ alt aralığı üzerinde yüksekliği $f(k/n) = 1 - (k/n)^2$ olan dikdörtgenlerle oluşturulan ve toplamı

$$f\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right).$$

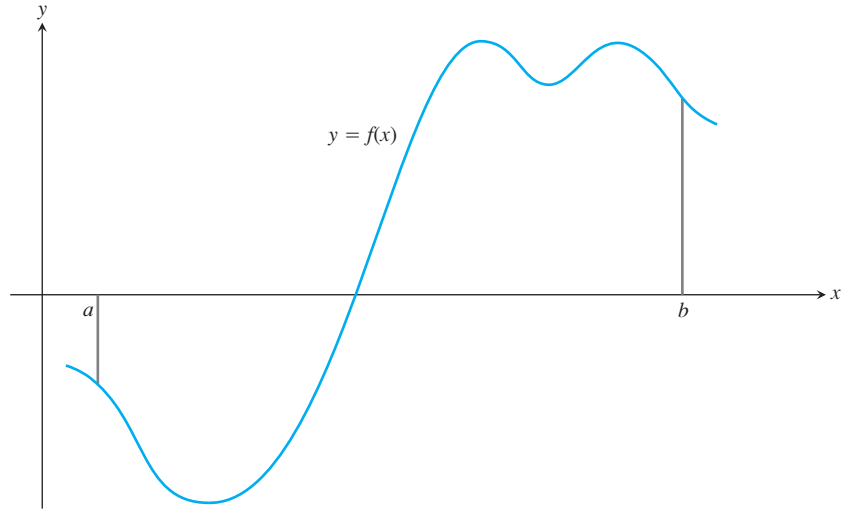
olan bir alt toplam elde edilir. Bunu sigma gösterimiyle yazar ve basitleştiririz

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=1}^n \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} && \text{Fark Kuralı} \\ &= n \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 && \text{Sabit değer ve Sabit Kat Kuralı} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{n^3}\right) \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} && \text{İlk } n \text{ Sayının Kareleri Kuramı} \\ &= 1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} && \text{Pay Açılmış} \end{aligned}$$

Her n için sağlanan bir alt toplam ifadesi elde ettik. $n \rightarrow \infty$ için bu ifadenin limitini alarak, alt aralıkların sayısı artarken ve alt aralıkların genişlikleri sıfıra giderken alt toplamların yakınsadığını görürüz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}\right) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

Alt toplam yaklaşımları $2/3$ ’e yakınsar. Benzer bir hesaplama üst toplam yaklaşımlarının da $2/3$ ’e yakınsadığını gösterir (Alıştırma 35). Bölüm 5.1’in sonundaki özet anlamında, her sonlu yaklaşım da aynı $2/3$ değerine yakınsar. Her sonlu yaklaşımının,



ŞEKİL 5.8 Bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli tipik bir $y = f(x)$ fonksiyonu.

alt toplam ile üst toplam yaklaşımları arasında sıkıştırılmış olduğu gösterilebileceğinden bu doğrudur. Bu nedenle R bölgesinin alanını bu limit değeri olarak tanımlarız. Bölüm 5.3'te bu şekildeki sonlu yaklaşımların limitlerini daha genel olarak çalışacağız. ■

Riemann Toplamları

Sonlu yaklaşımların limitleri teorisi, Alman matematikçi Bernhard Riemann tarafından kesinleştirilmiştir. Şimdi, bir sonraki bölümde incelenecek olan belirli integral teorisinin altını çizen *Riemann toplamı* tanımını veriyoruz.

Bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı keyfi bir f fonksiyonu ile başlıyoruz. Şekil 5.8 de gösterilen fonksiyon gibi, f 'nin pozitif değerleri olduğu gibi negatif değerleri de bulunabilir. $[a, b]$ kapalı aralığını eşit genişlikte (veya uzunlukta) olması gerekmeyen alt aralıklara ayırırız ve Bölüm 5.1'deki sonlu yaklaşımlar için yapıldığı gibi aynı yolla toplamlar oluştururuz. Bunu yapmak için a ve b arasında

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

olacak şekilde $n - 1$ tane $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}\}$ noktaları seçeriz. Notasyonu tutarlı yapmak için a 'yı x_0 ile ve b 'yi x_n ile gösteririz:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ kümesine $[a, b]$ 'nin bir **bölünüşü** denir.

P bölünüşü $[a, b]$ kapalı aralığını n tane kapalı alt aralığa böler.

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

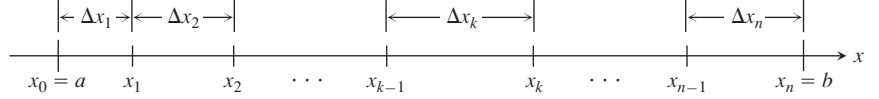
Bu alt aralıklardan birincisi $[x_0, x_1]$, ikincisi $[x_1, x_2]$ ve $k - 1$ ile n arasında bir tam sayı olmak üzere, P 'nin **k . alt aralığı** $[x_{k-1}, x_k]$, dır.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Georg Friedrich
Bernhard Riemann
(1826–1866)



Birinci $[x_0, x_1]$ alt aralığının genişliği Δx_1 ile, ikinci $[x_1, x_2]$ aralığının genişliği Δx_2 ile gösterilir. k . alt aralığın uzunluğu $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ 'dir. Bütün alt aralıkların genişlikleri eşitse ortak genişlik Δx , $(b - a)/n$ dir.



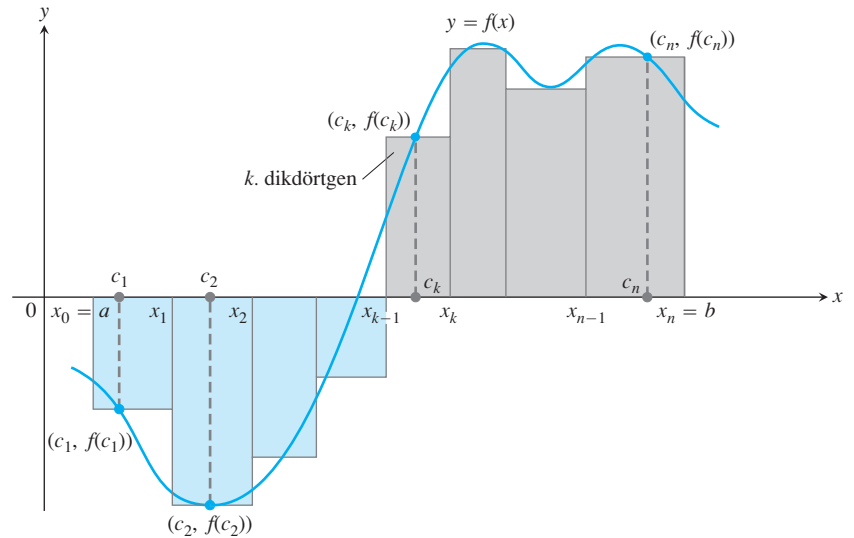
Her alt aralıkta bir nokta seçeriz. $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığından seçilen noktaya c_k denir. Sonra her alt aralık üzerinde, x -ekseninden eğriye $(c_k, f(c_k))$ noktasında değecek şekilde uzanan bir dikdörtgen kurarız. Bu dikdörtgenler, $f(c_k)$ 'nin pozitif veya negatif olmasına göre x -ekseninin üst tarafında veya alt tarafında bulunabilir veya $f(c_k) = 0$ ise x -eksenindedir. (Şekil 5.9).

Her alt aralık üzerinde $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ çarpımını oluştururuz. Bu çarpım, $f(c_k)$ 'nin işaretine bağlı olarak pozitif, negatif veya sıfırdır. $f(c_k) > 0$ ise $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ çarpımı, yüksekliği $f(c_k)$ ve genişliği Δx_k olan bir dikdörtgenin alanıdır. $f(c_k) < 0$ ise $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ çarpımı negatif bir sayıdır, genişliği Δx_k olan ve x -ekseninden negatif $f(c_k)$ sayısına kadar uzanan bir dikdörtgenin alanın negatifi.

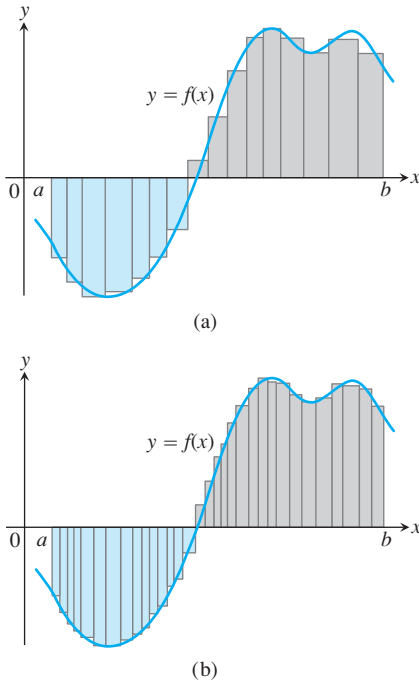
Son olarak, bütün bu çarpımları

$$S_P = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

toplamını elde etmek üzere toplarız.



ŞEKİL 5.9 Dikdörtgenler, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile x -ekseni arasındaki alana yaklaşımda bulunurlar.



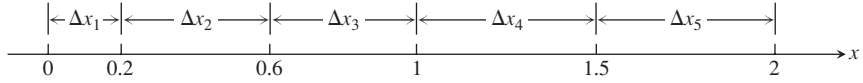
ŞEKİL 5.10 $[a, b]$ 'nin daha iyi bölünüşlerindeki dikdörtgenlerle Şekil 5.9'daki eğri. Daha iyi bölünüşler, artan bir doğrulukla f 'nin grafiği ile x -ekseni arasındaki alana yaklaşan, daha kısa tabanlı dikdörtgen kümeleri oluştururlar.

S_P toplamına **$[a, b]$ aralığı üzerinde f fonksiyonu için bir Riemann toplamı** denir. Seçtiğimiz P bölünüşüne ve alt aralıklardan c_k noktalarının seçimine bağlı olarak bu şekilde birçok toplam vardır.

Bütün alt aralıkların genişliklerinin eşit ve $\Delta x = 1/n$ olduğu Örnek 5'te, basitçe dikdörtgenlerin sayısı n 'yi arttırarak onları daha ince yapabildik. Bir bölünüş farklı genişlikli dikdörtgenlerden oluştuğunda, en geniş (en uzun) alt aralığın genişliğini kontrol ederek hepsinin ince olduğundan emin olabiliriz. Bir P bölünüşünün normu'nu, en geniş alt aralığın genişliği olarak tanımlarız ve $\|P\|$ ile gösteririz. $\|P\|$ küçük bir sayı ise P bölünüşündeki bütün alt aralıkların genişlikleri küçüktür. Bu fikirlerin bir örneğine bakalım.

ÖRNEK 6 Bir Kapalı Aralığın Bölünüşü

$P = \{0, 0.2, 0.6, 1, 1.5, 2\}$ kümesi $[0, 2]$ aralığının bir bölünüşüdür. P 'nin 5 alt aralığı vardır $[0, 0.2]$, $[0.2, 0.6]$, $[0.6, 1]$, $[1, 1.5]$ ve $[1.5, 2]$:



Alt aralıkların uzunlukları $\Delta x_1 = 0.2$, $\Delta x_2 = 0.4$, $\Delta x_3 = 0.4$, $\Delta x_4 = 0.5$ ve $\Delta x_5 = 0.5$ 'tir. En uzun alt aralığın uzunluğu 0.5 olduğu için, bölünüşün normu $\|P\| = 0.5$ 'tir. Bu örnekte, bu uzunlukta iki alt aralık vardır.

Bir $[a, b]$ kapalı aralığının bir bölünüşüne karşı gelen herhangi bir Riemann toplamı, sürekli bir f fonksiyonunun grafiği ile x -ekseni arasındaki bölgeye yaklaşımda bulunan dikdörtgenler tanımlar. Şekil 5.10'dan edinilen izlenime göre normu sıfıra yaklaşan bölünüşler, artan bir doğrulukla bu bölgeye yaklaşımda bulunan birer dikdörtgenler topluluğu tanımlarlar. Takip eden bölümde, f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ise bir Riemann toplamı oluşturmak üzere P bölünüşü ve alt aralıklarındaki c_k noktaları nasıl seçilirlerse seçilsinler, P bölünüşünün normu tarafından kontrol edilen alt aralıkların genişlikleri sıfıra yaklaşırken, bir tek limit değerine yaklaşıldığını göreceğiz.

ALİŞTİRMALAR 5.2

Toplam Notasyonu

1-6 1-6 alıştırmalarındaki toplamaları sigma gösterimi kullanmadan yazın. Sonra hesaplayın.

1. $\sum_{k=1}^2 \frac{6k}{k+1}$

2. $\sum_{k=1}^3 \frac{k-1}{k}$

3. $\sum_{k=1}^4 \cos k\pi$

4. $\sum_{k=1}^5 \sin k\pi$

5. $\sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} \sin \frac{\pi}{k}$

6. $\sum_{k=1}^4 (-1)^k \cos k\pi$

7. Aşağıdakilerden hangisi $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$ toplamını sigma gösteriminde ifade eder?

a. $\sum_{k=1}^6 2^{k-1}$

b. $\sum_{k=0}^5 2^k$

c. $\sum_{k=1}^4 2^{k+1}$

8. Aşağıdakilerden hangisi $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32$ toplamını sigma gösteriminde ifade eder?

a. $\sum_{k=1}^6 (-2)^{k-1}$

b. $\sum_{k=0}^5 (-1)^k 2^k$

c. $\sum_{k=2}^3 (-1)^{k+1} 2^{k+2}$

9. Hangi formül diğer ikisine eşdeğer değildir?

a. $\sum_{k=2}^4 \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}$

b. $\sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k}{k+1}$

c. $\sum_{k=-1}^1 \frac{(-1)^k}{k+2}$

10. Hangi formül diğer ikisine eşdeğer değildir?

a. $\sum_{k=1}^4 (k-1)^2$

b. $\sum_{k=-1}^3 (k+1)^2$

c. $\sum_{k=-3}^{-1} k^2$

11–16 alıştırmalarındaki toplamaları sigma gösteriminde ifade edin. Yanıtınızın şekli toplamın alt limitindeki seçiminize bağlı olacaktır.

11. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ 12. $1 + 4 + 9 + 16$

13. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ 14. $2 + 4 + 6 + 8 + 10$

15. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ 16. $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{3}{5} + \frac{4}{5} - \frac{5}{5}$

Sonlu Toplamların Değerleri

17. $\sum_{k=1}^n a_k = -5$ ve $\sum_{k=1}^n b_k = 1$ olduğunu varsayın. Aşağıdaki toplamaları bulun.

a. $\sum_{k=1}^n 3a_k$ b. $\sum_{k=1}^n \frac{b_k}{6}$ c. $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$

d. $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k)$ e. $\sum_{k=1}^n (b_k - 2a_k)$

18. $\sum_{k=1}^n a_k = 0$ ve $\sum_{k=1}^n b_k = 1$ olduğunu varsayın. Aşağıdaki toplamaları bulun.

a. $\sum_{k=1}^n 8a_k$ b. $\sum_{k=1}^n 250b_k$
c. $\sum_{k=1}^n (a_k + 1)$ d. $\sum_{k=1}^n (b_k - 1)$

19–28 alıştırmalarındaki toplamaları hesaplayın.

19. a. $\sum_{k=1}^{10} k$ b. $\sum_{k=1}^{10} k^2$ c. $\sum_{k=1}^{10} k^3$

20. a. $\sum_{k=1}^{13} k$ b. $\sum_{k=1}^{13} k^2$ c. $\sum_{k=1}^{13} k^3$

21. $\sum_{k=1}^7 (-2k)$ 22. $\sum_{k=1}^5 \frac{\pi k}{15}$

23. $\sum_{k=1}^6 (3 - k^2)$ 24. $\sum_{k=1}^6 (k^2 - 5)$

25. $\sum_{k=1}^5 k(3k + 5)$

26. $\sum_{k=1}^7 k(2k + 1)$

27. $\sum_{k=1}^5 \frac{k^3}{225} + \left(\sum_{k=1}^5 k \right)^3$

28. $\left(\sum_{k=1}^7 k \right)^2 - \sum_{k=1}^7 \frac{k^3}{4}$

Riemann Toplamları İçin Dikdörtgenler

29–32 alıştırmalarında, her $f(x)$ fonksiyonunu verilen aralıkta çizin. Aralığı eşit uzunluklu dört alt aralığa bölün. Sonra çiziminize, c_k k . alt aralığın (a) sol uç noktası, (b) sağ uç noktası ve (c) orta noktası olmak üzere, $\sum_{k=1}^4 f(c_k) \Delta x_k$, Riemann toplamıyla ilişkili dikdörtgenleri ekleyin. (Her dikdörtgen kümesi için ayrı bir resim çizin.)

29. $f(x) = x^2 - 1$, $[0, 2]$

30. $f(x) = -x^2$, $[0, 1]$

31. $f(x) = \sin x$, $[-\pi, \pi]$

32. $f(x) = \sin x + 1$, $[-\pi, \pi]$

33. $P = \{0, 1.2, 1.5, 2.3, 2.6, 3\}$ bölünüşünün normunu bulun.

34. $P = \{-2, -1.6, -0.5, 0, 0.8, 1\}$ bölünüşünün normunu bulun.

Üst Toplamların Limitleri

35–40 alıştırmalarındaki fonksiyonlar için, $[a, b]$ aralığını n tane eşit alt aralığa bölmekle elde edilen üst toplam için bir formül bulunuz. Sonra, aralığı üzerinde eğrinin altında kalan alanı hesaplamak için bu toplamaların $n \rightarrow \infty$ iken limitlerini alın.

35. $f(x) = 1 - x^2$, $[0, 1]$ üzerinde.

36. $f(x) = 2x$, $[0, 3]$ üzerinde.

37. $f(x) = x^2 + 1$, $[0, 3]$ üzerinde.

38. $f(x) = 3x^2$, $[0, 1]$ üzerinde.

39. $f(x) = x + x^2$, $[0, 1]$ üzerinde.

40. $f(x) = 3x + 2x^2$, $[0, 1]$ üzerinde.

5.3

Belirli İntegral

Bölüm 5.2 de, bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon için eşit $(b - a)/n$ genişlikli (veya uzunluklu) n tane alt aralık kullanarak oluşturulan bir sonlu toplamın limitini araştırdık. Bu bölümde, daha genel Riemann toplamalarının limitlerini, $[a, b]$ 'nin bölünüşlerinin normları sıfıra yaklaşırken ele alıyoruz. Genel Riemann toplamaları için bölünüşlerin alt aralıklarının genişlikleri eşit olmak zorunda değildir. Bu durumda limit alma işlemi, bir fonksiyonun bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerindeki belirli integrali tanımına götürür.

Riemann Toplamalarının Limitleri

Belirli integralin tanımı, bazı fonksiyonlar için, $[a, b]$ 'nin bölünüşlerinin normları sıfıra yaklaşırken, karşı gelen Riemann toplamalarının bir I limit değerine yaklaştıkları fikrine

dayanmaktadır. Bu yakınsama fikriyle kastettiğimiz şey şudur: bir Riemann toplamı, bölünüşünün normunun yeteri kadar küçük olması koşuluyla (ki, bütün alt aralıklarının genişlikleri yeterince küçük olur), I sayısına yakın olacaktır. Riemann toplamının I sayısına ne kadar yakın olması gerektiğini belirleyen ϵ sembolünü küçük bir pozitif sayı olarak ve bunun gerçekleşmesi için, bir bölünüşün normunun ne kadar küçük olması gerektiğini belirleyen δ sembolünü de ikinci bir pozitif küçük sayı olarak tanıtırız. Kesin formülasyon aşağıdadır.

TANIM Riemann Toplamlarının Limiti Olarak Belirli İntegral

$f(x)$ bir $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa, f 'nin $[a, b]$ kapalı aralığı üzerindeki belirli integrali I dir ve $\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$ Riemann toplamlarının limiti I dir deriz:

Verilen her $\epsilon > 0$ sayısına bir $\delta > 0$ sayısı karşılık gelir öyle ki, $[a, b]$ 'nin, $\|P\| < \delta$ koşulunu sağlayan her $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bölünüşü ve c_k 'nin $[x_{k-1}, x_k]$ aralığından her seçimi için

$$\left| \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k - I \right| < \epsilon.$$

sağlanır.

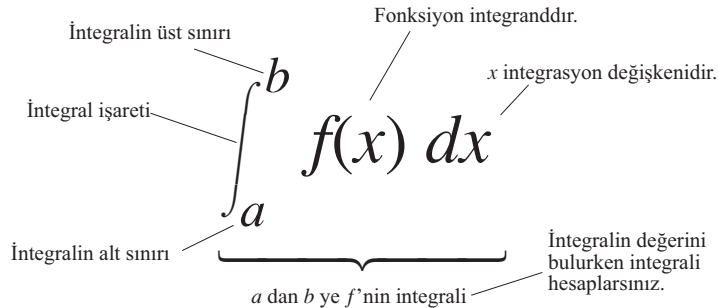
Leibniz, belirli integral için, Riemann toplamlarının bir limiti olarak oluşturulmasını ihtiva eden bir notasyon tanıtmıştır. O, $\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$ Riemann toplamının, $f(x)$ fonksiyon değerleri ile alt aralıkların “sonsuz küçük” dx genişliklerinin çarpımlarının bir sonsuz toplamı haline dönüştüğünü düşünmüştür. $\sum$ sembolü limitte aslı “S” olan $\int$, integral sembolü ile değiştirilir. $f(c_k)$ fonksiyon değerleri $f(x)$ sürekli seçim değerleri ile değiştirilir. Alt aralıkların Δx_k genişlikleri dx diferansiyeli haline gelir. x , a dan b ye giderken bütün $f(x) \cdot dx$ çarpımlarını topluyoruz gibidir. Bu notasyon bir integralin oluşturulmasını ihtiva etmesine rağmen, belirli integrale tam anlamını veren, Riemann tanımıdır.

Notasyon ve Belirli İntegralin Varlığı

Belirli integralin tanımındaki I sayısının sembolü, “ a dan b ye kadar $f(x)$ de x integrali” veya bazen “ a dan b ye kadar $f(x)$ 'in x 'e göre integrali” diye okunan

$$\int_a^b f(x) dx$$

dir. Ayrıca integral sembolündeki bileşenlerin isimleri şöyledir:



Tanım sağlandığında, f 'nin $[a, b]$ aralığı üzerindeki Riemann toplamaları $I = \int_a^b f(x) dx$ belirli integraline **yakınsar** deriz. Ayrıca, f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde **integral-lenebilir** deriz. Normu sıfıra giden bir P bölünüşü için ve her bölünüşün c_k noktaları için birçok seçenek vardır. Hangi seçim yapılırsa yapılsın, daima aynı I limitini elde ettiğimizde belirli integral vardır. Limit var olduğunda bunu belirli integral olarak yazarız:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = I = \int_a^b f(x) dx$$

Her bölünüşün, genişliği $\Delta x = (b - a)/n$ olan n tane eşit alt aralığı var olduğunda ayrıca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x = I = \int_a^b f(x) dx$$

yazarız. Limit, daima bölünüşlerin normları sıfıra giderken ve alt aralıkların sayısı sonsuza giderken alınır.

Bir fonksiyonun herhangi belirli bir aralık üzerindeki belirli integralinin değeri, bağımsız değişkeni göstermek için seçtiğimiz harfe değil, fonksiyonun kendisine bağlıdır. x yerine t veya u kullanmaya karar verirsek integrali basitçe

$$\int_a^b f(x) dx \text{ yerine } \int_a^b f(t) dt \text{ veya } \int_a^b f(u) du$$

olarak yazarız. İntegrali nasıl yazarsak yazalım, hala Riemann toplamalarının limiti olarak tanımlanan aynı sayıdır. Hangi harfi kullandığımızın önemi olmadığından integralinin değişkenine **sessiz değişken** denir.

Bir Riemann toplamının limitini alırken yapılabilecek birçok seçenek bulunduğundan böyle bir limitin varlığını göstermek zor olabilir. Ancak, hangi seçim yapılırsa yapılsın, bir **sürekli** fonksiyona karşı gelen Riemann toplamaları aynı limite yakınsar.

TEOREM 1 Belirli İntegralerin Varlığı

Bir sürekli fonksiyon integre edilebilir. Yani, bir f fonksiyonu bir $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ise, $[a, b]$ aralığında belirli integrali vardır.

Ekstreum Değer Teoremine göre (Bölüm 4.1, Teorem 1), f sürekli olduğunda $[x_{k-1}, x_k]$ üzerinde c_k 'yi $f(c_k)$ maksimum olacak ve bir **üst toplam** verecek şekilde seçebiliriz. c_k 'yi, bir **alt toplam** veren, f 'nin $[x_{k-1}, x_k]$ üzerindeki minimum değerini verecek şekilde seçebiliriz. c_k 'yi $[x_{k-1}, x_k]$ 'nin orta noktası olarak, en sağdaki noktası x_k olarak veya rastgele olarak seçebiliriz. Bölünüşleri eşit genişlikli veya değişen genişlikli olarak seçebiliriz. Her durumda, $\|P\| \rightarrow 0$ iken $\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$ limiti için aynı limiti elde ederiz. Teorem 1'in ardındaki fikir, bir bölünüşe karşı gelen bir Riemann toplamının bu bölünüşün üst toplamından daha büyük ve alt toplamından daha küçük olamayacağıdır. $\|P\| \rightarrow 0$ iken alt ve üst toplamlar aynı değere yakınsarlar. Bütün diğer Riemann toplamaları alt toplam ile üst toplam arasına kalırlar ve aynı limiti yakınsarlar. Teorem 1'in bir ispatı, fonksiyonların, bölünüşlerin ve limitlerin bu düşünce doğrultusunda dikkatli bir analizini içerir ve daha ileri seviye derslere bırakılmıştır. Bu ispatın bir gösterimi Alıştırma 80 ve 81 de verilmiştir.

Teorem 1, belirli integralin nasıl *hesaplanacağı* hakkında bir şey söylememektedir. Ters türev alma işlemine bir bağlantı aracılığı ile Bölüm 5.4'te bir hesaplama yöntemi geliştirilecektir.

İntegrallenebilen ve İntegrallenemeyen Fonksiyonlar

Teorem 1, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olan fonksiyonların burada integrallenebilir olduklarını söylemektedir. Sürekli olmayan fonksiyonlar integrallenebilen veya integrallenemeyen olabilirler. İntegrallenebilen süreksiz fonksiyonlar, $[a, b]$ aralığı üzerinde artan fonksiyonları (Alıştırma 77) ve bu bölümün sonundaki Ek-Alıştırmalarda tanımlanan *parçalı-süreklili fonksiyonları* içermektedir. (İkinciler, sonlu sayıda nokta hariç $[a, b]$ aralığı içinde sürekli oldukları.) İntegrallenemeyen fonksiyonların, grafikleri ile x -ekseni arasındaki alana, sayıca artan ince dikdörtgenlerle iyi bir yaklaşımda bulunulamayacak kadar çok süreksizliklerinin bulunması gerekir. İntegrallenemeyen bir fonksiyon örneği aşağıdadır.

ÖRNEK 1 $[0, 1]$ Üzerinde İntegrallenemeyen Bir Fonksiyon

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rasyonel ise} \\ 0 & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığı üzerinde Riemann integrali yoktur. Herhangi iki sayı arasında hem bir rasyonel sayı ve hem de bir irrasyonel sayı vardır. Böylece, fonksiyon $[0, 1]$ üzerinde çok istikrarsız bir şekilde yukarı aşağı sıçrama yapar. Dikdörtgenler ne kadar ince olursa olsun, grafiğin altında ve x -ekseninin üstünde kalan alana iyi bir yaklaşımda bulunulamaz. Aslında, üst toplam yaklaşımları ile alt toplam yaklaşımlarının farklı limitlere yakınsadığını göstereceğiz.

$[0, 1]$ 'in bir P bölünüşünü seçip c_k noktasını f 'nin $[x_{k-1}, x_k]$ üzerindeki maksimum değerini verecek şekilde seçersek, her $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığı, $f(c_k) = 1$ olacak şekilde bir rasyonel sayı içerdiğinden karşı gelen Riemann toplamı

$$U = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (1) \Delta x_k = 1,$$

olur. Bölünüşteki alt aralıkların uzunlukları toplamının 1 olduğuna dikkat edin, $\sum_{k=1}^n \Delta x_k = 1$. Dolayısıyla, bu şekildeki her Riemann toplamı 1'e eşittir ve bu seçimleri kullanan Riemann toplamlarının bir limiti 1 dir.

Diğer taraftan, c_k noktasını f 'nin $[x_{k-1}, x_k]$ üzerindeki minimum değerini verecek şekilde seçersek, her $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığı, $f(c_k) = 0$ olacak şekilde bir irrasyonel sayı içerdiğinden Riemann toplamı

$$L = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (0) \Delta x_k = 0,$$

olur. Bu seçimleri kullanan Riemann toplamlarının limiti sıfırdır. Limit, c_k noktalarının seçimine bağlı olduğundan f integrallenemeyen bir fonksiyondur. ■

Belirli İntegrallerin Özellikleri

$\int_a^b f(x) dx$ belirli integralini $\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$ toplamının bir limiti olarak tanımlarken $[a, b]$ aralığı üzerinde soldan sağa doğru hareket ettik. Bunun yerine, $x_0 = b$ ile başlayan ve $x_n = a$ da sona eren sağdan sola hareket etseydik ne olurdu? Riemann toplamındaki her işaret değiştirirdi, $x_k - x_{k-1}$ pozitif olmak yerine bu defa negatif olurdu. Her alt aralıktan aynı c_k noktalarını seçmekle herhangi bir Riemann toplamı işaret değiştirirdi. Dolayısıyla

limit ve $\int_b^a f(x) dx$ integrali işaret değiştirdi. Daha önce geriye doğru integral almaya bir anlam vermiş olmadığımızdan şu tanımı veriyoruz:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

İntegralin başka bir genişlemesi $a = b$ ile sıfır uzunluğundaki bir aralıktır. Aralık genişliği $\Delta x_k = 0$ olduğunda $f(c_k) \Delta x_k$ sıfır olacağından

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

olarak tanımlarız. Teorem 2, sağladıkları kurallar olarak verilen ve yukarıdaki iki özelliği de içeren integrallerin 7 özelliğini ifade eder. Bu kurallar integralleri hesaplama sürecinde çok yararlıdırlar. Hesaplamalarımızı basitleştirmek için bunlara tekrar tekrar başvuracağız.

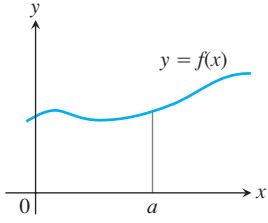
2'den 7'ye kuralların, Şekil 5.11 de gösterilen geometrik yorumları vardır. Bu şekillerdeki grafikler pozitif fonksiyonlara aittir fakat kurallar genel olarak integralenebilen fonksiyonlara uygulanabilir.

TEOREM 2

f ve g integrallenebilir ise belirli integral Tablo 5.3'teki 1'den 7'ye kadar kuralları sağlar.

TABLO 5.3 Belirli İntegrallerin Sağladığı Kurallar

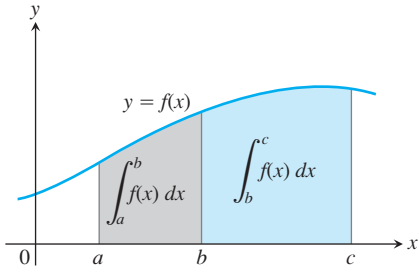
1. <i>İntegrasyon Sırası:</i>	$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$	Bir tanım
2. <i>Sıfır Genişliğinde Aralık:</i>	$\int_a^a f(x) dx = 0$	Başka Bir Tanım
3. <i>Sabitte Çarpım:</i>	$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$	k herhangi bir sayı
	$\int_a^b -f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$	$k = -1$
4. <i>Toplam ve Farklar:</i>	$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$	
5. <i>Toplanabilirlik:</i>	$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$	
6. <i>Max-Min eşitsizliği:</i>	$\max f$ ve $\min f$ 'nin $[a, b]$ aralığındaki maksimum ve minimum değerleri ise,	
	$\min f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \max f \cdot (b - a).$	
7. <i>Baskınlık:</i>	$[a, b]$ üzerinde $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$	
	$[a, b]$ üzerinde $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$	(Özel durum)



(a) Sıfır Genişliğinde Aralık:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

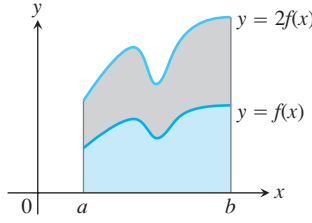
(Bir nokta üzerindeki alan 0 dır.)



(d) Belirli integraller için toplanabilirlik:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

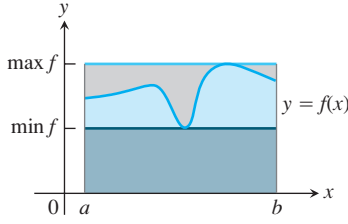
ŞEKİL 5.11



(b) Sabitle Çarpım:

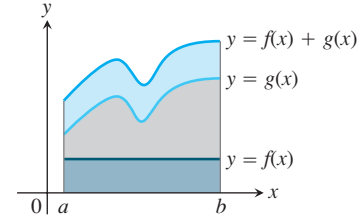
$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

($k = 2$ için gösterilmiştir)



(e) Max-Min eşitsizliği:

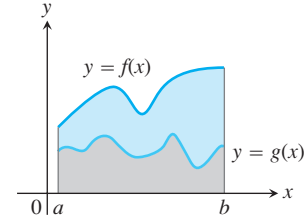
$$\min f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \max f \cdot (b - a)$$



(c) Toplam:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

(Alanlar toplanır)



(f) Baskınlık:

$$[a, b] \text{ aralığında } f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

1 ve 2 kuralları tanımlar olduğu halde, 3'ten 7'ye kuralların ispatlanması gerekmektedir. İspatlar, Belirli integrallerin, Riemann toplamalarının bir limiti olarak tanımlanmasına dayanmaktadır. Bu kurallardan birinin ispatı aşağıdadır. Tablo 5.3'teki diğer özellikleri sağlamak için benzer ispatlar verilebilir.

Kural 6'nın İspatı Kural 6 f 'nin $[a, b]$ aralığı üzerindeki integralinin hiçbir zaman f 'nin minimum değeri ile aralığın uzunluğu çarpımından küçük ve f 'nin maksimum değeri ile aralığın uzunluğu çarpımından büyük olamayacağını söyler. Bunun nedeni, $[a, b]$ 'nin her bölünüşünde ve c_k noktalarının herhangi bir seçiminde,

$$\begin{aligned} \min f \cdot (b - a) &= \min f \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k && \sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a \\ &= \sum_{k=1}^n \min f \cdot \Delta x_k && \text{Sabitle Çarpım Kuralı} \\ &\leq \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k && \min f \leq f(c_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \max f \cdot \Delta x_k && f(c_k) \leq \max f \\ &= \max f \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k && \text{Sabitle Çarpım Kuralı} \\ &= \max f \cdot (b - a) \end{aligned}$$

olmasıdır.

Kısaca, f 'nin $[a, b]$ aralığındaki bütün Riemann toplamları

$$\min f \cdot (b - a) \leq \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k \leq \max f \cdot (b - a)$$

eşitsizliğini sağlarlar. Dolayısıyla limitleri, yani integral de bu eşitsizliği sağlar. ■

ÖRNEK 2 Belirli İntegral Kurallarını Kullanmak

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 5, \quad \int_1^4 f(x) dx = -2, \quad \int_{-1}^1 h(x) dx = 7$$

olduğunu varsayın.

1. $\int_4^1 f(x) dx = -\int_1^4 f(x) dx = -(-2) = 2$ Kural 1
2. $\int_{-1}^1 [2f(x) + 3h(x)] dx = 2 \int_{-1}^1 f(x) dx + 3 \int_{-1}^1 h(x) dx$ Kural 3 ve 4
 $= 2(5) + 3(7) = 31$
3. $\int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = 5 + (-2) = 3$ Kural 5 ■

ÖRNEK 3 Bir İntegral İçin Sınır Bulmak

$\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} dx$ integralinin değerinin $3/2$ den küçük olduğunu gösterin.

Çözüm Belirli integraller için Max-Min eşitsizliği (Kural 6), $\min f \cdot (b - a)$ 'nın $\int_a^b f(x) dx$ için bir *alt sınır* olduğunu ve $\max f \cdot (b - a)$ bir *üst sınır* olduğunu söyler $[0, 1]$ aralığında $\sqrt{1 + \cos x}$ 'in maksimum değeri $\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ 'dir, dolayısıyla

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} dx \leq \sqrt{2} \cdot (1 - 0) = \sqrt{2}.$$

olur. $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} dx$, üstten $\sqrt{2}$ (1.414...) ile sınırlı olduğundan integral $3/2$ den küçüktür. ■

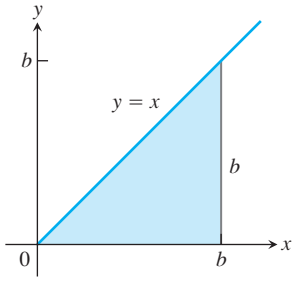
Negatif Olmayan Bir Fonksiyonun Grafiğinin Altındaki Alan

Şimdi, giderek artan sayıda dikdörtgenlerle bir bölgeye yaklaşım fikrini içeren, sınırı eğrisel olan bir bölgenin alanı kavramını kesinleştiriyoruz. Negatif olmayan sürekli bir fonksiyonun grafiği altındaki alan bir belirli integral olarak tanımlanır.

TANIM Bir Belirli İntegral Olarak Bir Eğri Altındaki Alan

$y = f(x)$ fonksiyonu negatif olmayan ve $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde integral-lenebilen bir fonksiyon ise **$[a, b]$ aralığı üzerinde $y = f(x)$ eğrisi altındaki alan**, f 'nin a 'dan b 'ye kadar integralidir.

$$A = \int_a^b f(x) dx$$



ŞEKİL 5.12 Örnek 4'teki bölge bir üçgendir.

İlk defa olarak sınırları herhangi bir sürekli fonksiyonun grafiği olan bölgenin alanı için kuvvetli bir tanımımız vardır. Şimdi bunu, yeni tanımımızın önceki alan kavramımızla uyduğuna sağlayabileceğimiz basit bir örneğe, bir doğru altındaki alana uyguluyoruz.

ÖRNEK 4 $y = x$ Doğrusu Altındaki Alan

$\int_0^b x \, dx$ 'i hesaplayın ve $[0, b]$, $b > 0$ aralığı üzerinde $y = x$ altındaki A alanını bulun.

Çözüm Söz konusu bölge bir üçgendir (Şekil 5.12). Alanı iki yolla hesaplıyoruz.

- (a) Belirli integrali Riemann toplamlarının limiti olarak hesaplamak üzere normları sıfıra giden bölünüşler için $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$ 'yı hesaplarız. Teorem 1'e göre normları sıfıra gittiği sürece bölünüşlerin veya c_k noktalarının seçiminin bir önemi yoktur. Bütün seçimler tam olarak aynı limiti verirler. Dolayısıyla, P bölünüşünün $[0, b]$ aralığını genişlikleri eşit ve $\Delta x = (b - 0)/n = b/n$ olan n alt aralığa böldüğünü düşünelim ve c_k noktalarını her alt aralıkta sağ uç nokta olarak seçelim. Bölünüş $P = \left\{ 0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, \dots, \frac{nb}{n} \right\}$ ve $c_k = \frac{kb}{n}$ dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x &= \sum_{k=1}^n \frac{kb}{n} \cdot \frac{b}{n} & f(c_k) &= c_k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{kb^2}{n^2} \\ &= \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k & \text{Sabitle Çarpım Kuralı} \\ &= \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} & \text{İlk } n \text{ Tamsayının Toplamı} \\ &= \frac{b^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ ve $\|P\| \rightarrow 0$ iken sağ taraftaki son ifadenin limiti $b^2/2$ 'dir. Bu nedenle

$$\int_0^b x \, dx = \frac{b^2}{2}.$$

dir.

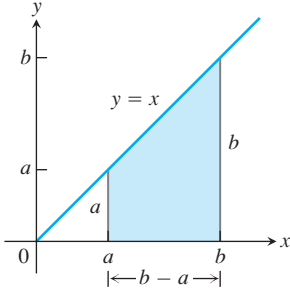
- (b) Alan, negatif olmayan bir fonksiyonun belirli integraline eşit olduğundan, taban uzunluğu b ve yüksekliği $y = b$ olan bir üçgenin alanı için alan formülünü kullanarak belirli integrali hemen elde edebiliriz. Alan, $A = (1/2) b \cdot b = b^2/2$ dir. Yine, $\int_0^b x \, dx = b^2/2$ buluruz.

Örnek 4, $f(x) = x$ 'i herhangi bir $[a, b]$, $0 < a < b$ kapalı aralığı üzerinde integre edecek şekilde genelleştirilebilir.

$$\begin{aligned} \int_a^b x \, dx &= \int_a^0 x \, dx + \int_0^b x \, dx & \text{Kural 5} \\ &= -\int_0^a x \, dx + \int_0^b x \, dx & \text{Kural 1} \\ &= -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} & \text{Örnek 4} \end{aligned}$$

Sonuç olarak, $y = f(x)$ 'in integrali için şu kuralı buluruz:

$$\int_a^b x \, dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, \quad a < b \quad (1)$$



ŞEKİL 5.13 Yamuğun alanı
 $A = (b^2 - a^2)/2$ dir.

Bu hesaplama bir yamuğun alanını verir (Şekil 5.13). (1) denklemi a ve b negatif iken de geçerlidir. $a < b < 0$ iken belirli integralin değeri $(b^2 - a^2)/2$ negatiftir, x -ekseninin altında $y = x$ doğrusuna kadar inen yamuğun alanının negatiftir. $a < 0$ ve $b > 0$ iken (1) denklemi hala geçerlidir ve belirli integral iki alan arasındaki farkı verir; $[0, b]$ üzerinde grafiğin altındaki alan eksi $[a, 0]$ altında ve grafiğin üstündeki alan.

Aşağıdaki sonuçlar da Örnek 4'tekine benzer bir Riemann toplamı hesabı kullanarak gerçekleştirilebilir (Alıştırma 75 ve 76).

$$\int_a^b c \, dx = c(b - a), \quad c \text{ herhangi bir sabit} \quad (2)$$

$$\int_a^b x^2 \, dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, \quad a < b \quad (3)$$

Bir Sürekli Fonksiyonun Ortalama Değeri, Tekrar

Bölüm 5.1 de, bir $[a, b]$ aralığı üzerinde negatif olmayan sürekli bir f fonksiyonunun ortalama değerini tanıtmıştık ve bu ortalama $y = f(x)$ 'in grafiği altındaki alanın $b - a$ ile bölümü olarak tanımlamıştık. İntegral notasyonu ile bunu

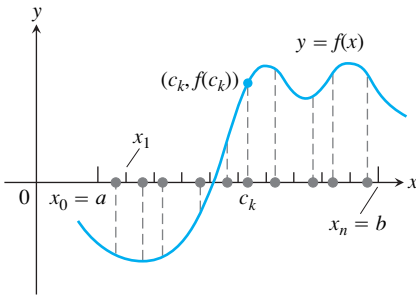
$$\text{Ortalama} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx$$

olarak yazarız. Bu formülü, herhangi pozitif, negatif veya ikisinde olan sürekli (veya integrallenebilir) bir fonksiyonun ortalama değerinin tanımını kesin olarak vermek için kullanabiliriz.

Sırasıyla, aşağıdaki fikir yürütmeyi kullanabiliriz. n tane sayının ortalamasının sayıların toplamının n ile bölünmesi olduğunu söyleyen aritmetik fikriyle başlayacağız. Bir $[a, b]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonunun sonsuz tane değeri olabilir, fakat bunları sıralı bir şekilde örnekleyebiliriz. $[a, b]$ 'yi genişlikleri eşit ve $\Delta x = (b - a)/n$ olan n alt aralığa böler ve f 'yi her alt aralıktaki bir c_k noktasında hesaplarız (Şekil 5.14). Örneklenen n değerlerin ortalaması

$$\begin{aligned} \frac{f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(c_k) \\ &= \frac{\Delta x}{b - a} \sum_{k=1}^n f(c_k) \quad \Delta x = \frac{b - a}{n}, \text{ dolayısıyla } \frac{1}{n} = \frac{\Delta x}{b - a} \\ &= \frac{1}{b - a} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x \end{aligned}$$

dir.



ŞEKİL 5.14 Bir fonksiyonun bir $[a, b]$ aralığı üzerindeki değerlerinin bir örneği.

Ortalama, f 'nin $[a, b]$ üzerindeki bir Riemann toplamını $(b - a)$ ile bölmekle elde edilir. Örneklerin boyutunu arttırır ve bölünüşün normunun sıfıra gitmesine izin verirsek, ortalama $(1/(b - a)) \int_a^b f(x) dx$ 'e yaklaşır. Her iki bakış açısı bizi aşağıdaki tanıma götürür.

TANIM Bir Fonksiyonun Ortalama Değeri

f , $[a, b]$ aralığında integre edilebilirse, $[a, b]$ üzerindeki ortalama değeri

$$\text{ort}(f) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

ile verilir.

ÖRNEK 5 Bir Ortalama Değer Bulmak

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ 'nin $[-2, 2]$ üzerindeki ortalama değerini bulun.

Çözüm $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ 'yi grafiği, merkezi orijinde ve 2 yarıçaplı üst yarı çember olan bir fonksiyon olarak tanıyoruz (Şekil 5.15).

-2 den 2 'ye kadar yarı çember ile x -ekseni arasındaki alan

$$\text{Alan} = \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi (2)^2 = 2\pi$$

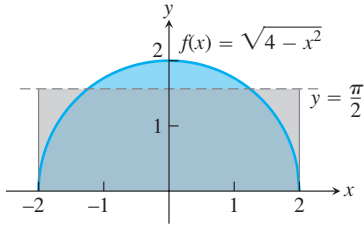
geometri formülünü kullanarak hesaplanabilir. f negatif olmayan bir fonksiyon olduğundan, alan aynı zamanda -2 den 2 'ye f 'nin integralidir;

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx = 2\pi$$

Bu nedenle, f 'nin ortalama değeri

$$\text{ort}(f) = \frac{1}{2 - (-2)} \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{1}{4} (2\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

dir.



ŞEKİL 5.15 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ 'nin $[-2, 2]$ üzerindeki ortalama değeri $\pi/2$ dir (Örnek 5).

ALİŞTIRMALAR 5.3

Limitleri İntegral Olarak İfade Etmek

1–8 alıştırmalarındaki limitleri belirli integral olarak yazın

1. $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n c_k^2 \Delta x_k$, P $[0, 2]$ 'nin bir bölünüşü.

2. $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n 2c_k^3 \Delta x_k$, P $[-1, 0]$ 'in bir bölünüşü.

3. $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (c_k^2 - 3c_k) \Delta x_k$, P $[-7, 5]$ 'in bir bölünüşü.

4. $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{c_k} \right) \Delta x_k$, P $[1, 4]$ 'ün bir bölünüşü.

5. $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - c_k} \Delta x_k$, P $[2, 3]$ 'ün bir bölünüşü.

6. $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{4 - c_k^2} \Delta x_k$, P $[0, 1]$ 'in bir bölünüşü.

7. $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\sec c_k) \Delta x_k$, P $[-\pi/4, 0]$ 'in bir bölünüşü.

8. $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\tan c_k) \Delta x_k$, P $[0, \pi/4]$ 'ün bir bölünüşü.

Özellikleri ve Bilinen Değerleri Kullanarak Başka İntegralleri Bulmak

9. f ve g 'nin integrallenebilir olduklarını ve

$$\int_1^2 f(x) dx = -4, \int_1^5 f(x) dx = 6, \int_1^5 g(x) dx = 8$$

olduğunu varsayın. Tablo 5.3'teki kuralları kullanarak aşağıdakileri bulun.

a. $\int_2^2 g(x) dx$

b. $\int_5^1 g(x) dx$

c. $\int_1^2 3f(x) dx$

d. $\int_2^5 f(x) dx$

e. $\int_1^5 [f(x) - g(x)] dx$

f. $\int_1^5 [4f(x) - g(x)] dx$

10. f ve h 'nin sürekli olduklarını ve

$$\int_1^9 f(x) dx = -1, \int_7^9 f(x) dx = 5, \int_7^9 h(x) dx = 4.$$

olduğunu varsayın. Tablo 5.3'teki kuralları kullanarak aşağıdakileri bulun.

a. $\int_1^9 -2f(x) dx$

b. $\int_7^9 [f(x) + h(x)] dx$

c. $\int_7^9 [2f(x) - 3h(x)] dx$

d. $\int_9^1 f(x) dx$

e. $\int_1^7 f(x) dx$

f. $\int_9^7 [h(x) - f(x)] dx$

11. $\int_1^2 f(x) dx = 5$ olduğunu varsayarak aşağıdakileri bulun.

a. $\int_1^2 f(u) du$

b. $\int_1^2 \sqrt{3}f(z) dz$

c. $\int_2^1 f(t) dt$

d. $\int_1^2 [-f(x)] dx$

12. $\int_{-3}^0 g(t) dt = \sqrt{2}$ olduğunu varsayarak aşağıdakileri bulun.

a. $\int_0^{-3} g(t) dt$

b. $\int_{-3}^0 g(u) du$

c. $\int_{-3}^0 [-g(x)] dx$

d. $\int_{-3}^0 \frac{g(r)}{\sqrt{2}} dr$

13. f 'nin integrallenebilir olduğunu ve $\int_0^3 f(z) dz = 3$ ve $\int_0^4 f(z) dz = 7$ olduğunu varsayarak aşağıdakileri bulun.

a. $\int_3^4 f(z) dz$

b. $\int_4^3 f(t) dt$

14. h 'nin integrallenebilir olduğunu ve $\int_{-1}^1 h(r) dr = 0$ ve $\int_{-1}^3 h(r) dr = 6$ olduğunu varsayarak aşağıdakileri bulun.

a. $\int_1^3 h(r) dr$

b. $-\int_3^1 h(u) du$

İntegralleri Hesaplamak İçin Alan Kullanmak

15–22 alıştırmalarında integrandları çizin ve integralleri hesaplamak için alanları kullanın.

15. $\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx$

16. $\int_{1/2}^{3/2} (-2x + 4) dx$

17. $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$

18. $\int_{-4}^0 \sqrt{16 - x^2} dx$

19. $\int_{-2}^1 |x| dx$

20. $\int_{-1}^1 (1 - |x|) dx$

21. $\int_{-1}^1 (2 - |x|) dx$

22. $\int_{-1}^1 (1 + \sqrt{1 - x^2}) dx$

23–26 alıştırmalarında integralleri hesaplamak için alanları kullanın.

23. $\int_0^b \frac{x}{2} dx, b > 0$

24. $\int_0^b 4x dx, b > 0$

25. $\int_a^b 2s ds, 0 < a < b$

26. $\int_a^b 3t dt, 0 < a < b$

Hesaplamalar

27–38. denklem (1) ve (3)'ün sonuçlarını kullanarak, 27–38 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

27. $\int_1^{\sqrt{2}} x dx$

28. $\int_{0.5}^{2.5} x dx$

29. $\int_{\pi}^{2\pi} \theta d\theta$

30. $\int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} r dr$

31. $\int_0^{\sqrt[3]{7}} x^2 dx$

32. $\int_0^{0.3} s^2 ds$

33. $\int_0^{1/2} t^2 dt$

34. $\int_0^{\pi/2} \theta^2 d\theta$

35. $\int_a^{2a} x dx$

36. $\int_a^{\sqrt[3]{3a}} x dx$

37. $\int_0^{\sqrt[3]{b}} x^2 dx$

38. $\int_0^{3b} x^2 dx$

39–50 alıştırmalarındaki integralleri hesaplamak için Tablo 5.3 'teki kuralları ve (1)–(3) Denklemlerini kullanın.

39. $\int_3^1 7 dx$

40. $\int_0^{-2} \sqrt{2} dx$

41. $\int_0^2 5x dx$

42. $\int_3^5 \frac{x}{8} dx$

43. $\int_0^2 (2t - 3) dt$

44. $\int_0^{\sqrt{2}} (t - \sqrt{2}) dt$

45. $\int_2^1 \left(1 + \frac{z}{2}\right) dz$

46. $\int_3^0 (2z - 3) dz$

47. $\int_1^2 3u^2 du$

48. $\int_{1/2}^1 24u^2 du$

49. $\int_0^2 (3x^2 + x - 5) dx$

50. $\int_1^0 (3x^2 + x - 5) dx$

Alan Bulmak

51–54 alıştırmalarında, $[0, b]$ aralığında verilen eğri ile x -ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulmak için bir belirli integral kullanın.

51. $y = 3x^2$

52. $y = \pi x^2$

53. $y = 2x$

54. $y = \frac{x}{2} + 1$

Ortalama Değer

55–62 alıştırımlarında, verilen aralıkta fonksiyonun grafiğini çizin ve ortalama değerini bulun.

55. $f(x) = x^2 - 1$, $[0, \sqrt{3}]$

56. $f(x) = -\frac{x^2}{2}$, $[0, 3]$ 57. $f(x) = -3x^2 - 1$, $[0, 1]$

58. $f(x) = 3x^2 - 3$, $[0, 1]$

59. $f(t) = (t - 1)^2$, $[0, 3]$

60. $f(t) = t^2 - t$, $[-2, 1]$

61. $g(x) = |x| - 1$, a. $[-1, 1]$, b. $[1, 3]$, c. $[-1, 3]$

62. $h(x) = -|x|$, a. $[-1, 0]$, b. $[0, 1]$, c. $[-1, 1]$

Teori ve Örnekler

63. Hangi a ve b değerleri

$$\int_a^b (x - x^2) dx$$

integralini maksimize eder? (İpucu: İntegrand nerede pozitifdir?)

64. Hangi a ve b değerleri

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2) dx$$

integralini minimize eder?

65. Max-Min Eşitsizliğini kullanarak

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

integralinin değerinin alt ve üst sınırlarını bulun.

66. (Alıştırma 65'in devamı) Max-Min Eşitsizliğini kullanarak

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^2} dx \quad \text{ve} \quad \int_{0.5}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

integrallerinin değerlerinin alt ve üst sınırlarını bulun. Bunları oynayarak

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

integralinin değerini bulun.

67. $\int_0^1 \sin(x^2) dx$ 'in değerinin 2 olamayacağını gösterin.

68. $\int_1^0 \sqrt{x+8} dx$ 'in değerinin $2\sqrt{2} \approx 2.8$ ile 3 arasında olduğunu gösterin.

69. **Negatif olmayan fonksiyonların integralleri.** f integre edilebilirse, Max-Min Eşitsizliğini kullanarak

$$[a, b] \text{de } f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

olduğunu gösterin.

70. **Pozitif olmayan fonksiyonların integralleri.** f integre edilebilirse,

$$[a, b] \text{de } f(x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx \leq 0$$

olduğunu gösterin.

71. $x \geq 0$ için geçerli olan $\sin x \leq x$ eşitsizliğini kullanarak, $\int_0^1 \sin x dx$ 'in değeri için bir üst sınır bulun.

72. $\sec x \geq 1 + (x^2/2)$ eşitsizliği $(-\pi/2, \pi/2)$ 'de geçerlidir. Bunu kullanarak, $\int_0^1 \sec x dx$ 'in değeri için bir alt sınır bulun.

73. f ort (f) gerçekten $[a, b]$ aralığında integre edilebilir $f(x)$ fonksiyonunun tipik bir değeriye, ort (f) sayısının $[a, b]$ aralığındaki integralinin f^* 'nin o aralıktaki integraliyle aynı olması gerekir. Öyle midir? Yani

$$\int_a^b av(f) dx = \int_a^b f(x) dx$$

olur mu? Yanıtınızı açıklayın.

74. İntegre edilebilir fonksiyonların bir $[a, b]$ aralığında aşağıdaki koşullara uyması hoş olurdu:

a. $\text{ort}(f+g) = \text{ort}(f) + \text{ort}(g)$

b. $\text{ort}(kf) = k \text{ort}(f)$ (k herhangi bir sayı)

c. $[a, b]$ aralığında $f(x) \leq g(x)$ ise $\text{ort}(f) \leq \text{ort}(g)$

Bu kurallar geçerli midir? Yanıtınızı açıklayın.

75. Denklem (2)'yi gerçeklemek için Örnek 4'teki gibi Riemann toplamlarının limitlerini kullanın.

76. Denklem (3)'ü gerçeklemek için Örnek 4'teki gibi Riemann toplamlarının limitlerini kullanın.

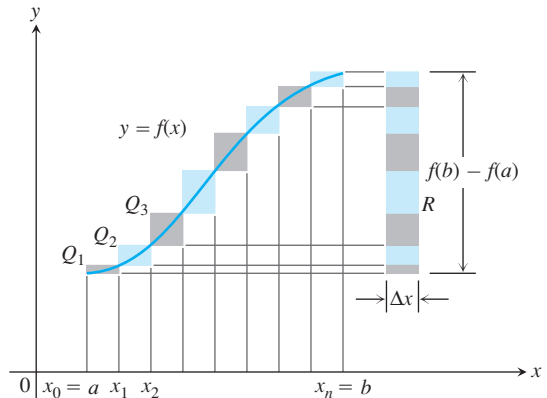
77. **Artan fonksiyonlar için alt ve üst toplamlar**

a. Sürekli bir $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin, x bir $[a, b]$ aralığı boyunca soldan sağa doğru artarken, düzgün olarak yükseldiğini varsayın. $P[a, b]$ 'nin $\Delta x = (b-a)/n$ uzunluklu n tane alt aralığa bölünüşü olsun. Aşağıdaki şekle bakarak, f 'nin bu bölünüşteki alt ve üst toplamlarının arasındaki farkın boyutları $[f(b) - f(a)]$ ile Δx olan bir R dikdörtgeninin alanıyla grafik olarak temsil edilebileceğini gösterin. (İpucu: $U - L$ farkı, $Q_0Q_1, Q_1Q_2, \dots, Q_{n-1}Q_n$ köşgenleri eğri üzerinde bulunan dikdörtgenlerin alanlarının toplamıdır. Bu dikdörtgenler yatay olarak R 'ye kaydırılırsa, bir üst üste binme olmaz.)

b. $[a, b]$ 'nin bölünüşünün alt aralıklarının uzunlukları Δx_k 'lerin eşit olmak yerine değiştiklerini varsayın. $\Delta x_{\max}$ P 'nin normu olmak üzere

$$U - L \leq |f(b) - f(a)| \Delta x_{\max}$$

ve dolayısıyla $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} (U - L) = 0$ olduğunu gösterin.



78. Azalan fonksiyonlar için alt ve üst toplamlar (Alıştırma 77'nin devamı)

- a. Değerleri, x bir $[a, b]$ aralığı boyunca soldan sağa doğru giderken, düzgün olarak azalan sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu için Alıştırma 77'deki gibi bir şekil çizin. $P[a, b]$ 'nin eşit uzunluklu alt aralıklara bölünüşü olsun. $U - L$ için Alıştırma 77(a)'da bulduğunuzdakine benzer bir ifade bulun.
- b. $[a, b]$ 'nin bölünüşünün alt aralıklarının uzunlukları Δx_k 'lerin eşit olmak yerine değiştiklerini varsayın. Alıştırma 77(b)'deki

$$U - L \leq |f(b) - f(a)| \Delta x_{\max}$$

eşitsizliğinin doğru ve dolayısıyla $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} (U - L) = 0$ olduğunu gösterin.

79. $x = 0$ 'dan $x = \pi/2$ 'ye kadar $y = \sin x$ eğrisinin altında kalan alanı

$$\begin{aligned} & \sin h + \sin 2h + \sin 3h + \cdots + \sin mh \\ &= \frac{\cos(h/2) - \cos((m + (1/2))h)}{2 \sin(h/2)} \end{aligned}$$

formülünü kullanarak iki adımda bulun:

- a. $[0, \pi/2]$ aralığını eşit uzunluklu n alt aralığa bölün ve bunlara karşılık gelen U üst toplamını bulun.
- b. $n \rightarrow \infty$ ve $\Delta x = (b - a)/n \rightarrow 0$ iken U 'nun limitini bulun.
- 80.** f , sağdaki şekildeki gibi, $[a, b]$ üzerinde sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun.

$$x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_{n-1}$$

noktalarını gösterildiği gibi ekleyerek $[a, b]$ aralığını, $\Delta x_1 = x_1 - a$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = b - x_{n-1}$, uzunlukları eşit olması gerekmeyen n alt aralığa bölün.

- a. $m_k = \min \{f(x) : x \text{ k. alt aralıkta}\}$ ise

$$L = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \cdots + m_n \Delta x_n$$

alt toplamı ile şeklin birinci bölümündeki renkli bölge arasındaki bağlantıyı açıklayın.

- b. $M_k = \max \{f(x) : x \text{ k. alt aralıkta}\}$ ise

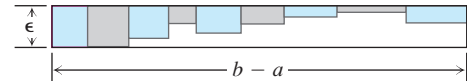
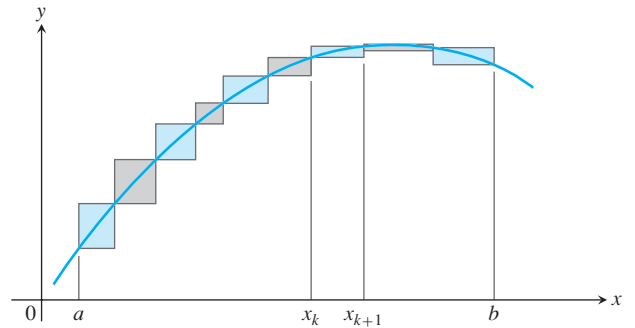
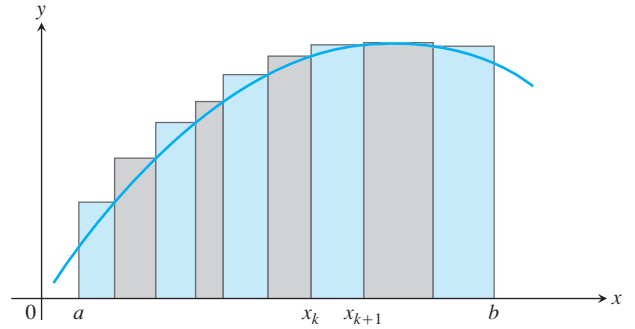
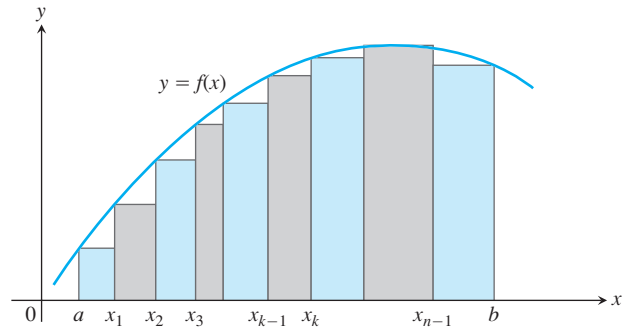
$$U = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \cdots + M_n \Delta x_n$$

üst toplamı ile şeklin ikinci bölümündeki renkli bölge arasındaki bağlantıyı açıklayın.

- c. $U - L$ ile şeklin üçüncü bölümünde, eğri boyunca renkli bölgeler arasındaki bağlantıyı açıklayın.

- 81.** Verilen her $\epsilon > 0$ için, $x_1, x_2 \in [a, b]$ ve $|x_1 - x_2| < \delta$ iken $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunabilirse f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde **düzgün sürekli** denir. $[a, b]$ üzerinde sürekli olan bir fonksiyonun düzgün sürekli olduğu gösterilebilir. Bunu ve sağdaki şekli kullanarak, f sürekli ise ve $\epsilon > 0$ verilmişse, Δx_k 'lerin en büyüğünü yeterince küçük yaparak $U - L \leq \epsilon \cdot (b - a)$ yapılabileceğini gösterin.

- 82.** 150 millik bir yolculukta ortalama 30 mil/sa hız yapar ve aynı 150 mili ortalama 50 mil/sa hızla geri dönerseniz, yolculuktaki ortalama hızınız ne olur? Yanıtınızı açıklayın. (Kaynak: David H.



Pleacher, *The Mathematics Teacher*, Vol. 85. No.6, sayfa. 445-446, Eylül 1992.)

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Riemann Toplamlarını Bulmak

BCS'niz Riemann toplamlarıyla ilişkili dikdörtgenleri çizebiliyorsa, 83-88 alıştırmalarındaki integrallere yakınsayan Riemann toplamlarıyla ilişkili dikdörtgenleri çizin. Her durumda eşit uzunluklu $n = 4, 10, 20$ ve 50 alt aralık kullanın.

83. $\int_0^1 (1 - x) dx = \frac{1}{2}$

84. $\int_0^1 (x^2 + 1) dx = \frac{4}{3}$

$$85. \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx = 0$$

$$86. \int_0^{\pi/4} \sec^2 x \, dx = 1$$

$$87. \int_{-1}^1 |x| \, dx = 1$$

$$88. \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx \text{ (İntegralin değeri yaklaşık } 0.693 \text{ 'tür.)}$$

Ortalama Değer

89–92 alıştırmalarında aşağıdaki adımları gerçekleştirmek için bir BCS kullanın.

- Fonksiyonları verilen aralıkta çizin.
- Aralığı, eşit uzunluklu 100, 200 ve 1000 alt aralığa bölün ve fonksiyonu her bir alt aralığın orta noktasında hesaplayın.

c. Fonksiyonun, (b) de elde edilen değerlerinin ortalama değerini bulun.

d. $n = 1000$ bölünüşü ile (c) de hesapladığınız ortalama değeri kullanarak $f(x)$ (ortalama değer) eşitliğinden x 'i çözün.

$$89. f(x) = \sin x, \quad [0, \pi]$$

$$90. f(x) = \sin^2 x, \quad [0, \pi]$$

$$91. f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad \left[\frac{\pi}{4}, \pi \right]$$

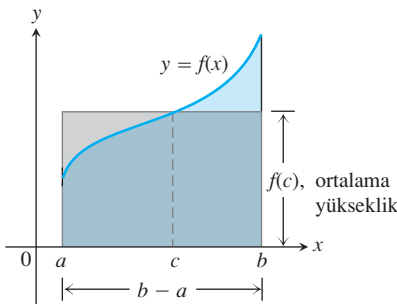
$$92. f(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}, \quad \left[\frac{\pi}{4}, \pi \right]$$

5.4

Analizin Temel Teoremi

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Sir Isaac Newton
(1642–1727)



ŞEKİL 5.16 Ortalama Değer Teoremindeki $f(c)$ değeri, bir bakıma, f 'nin $[a, b]$ üzerindeki ortalama yüksekliğidir. $f \geq 0$ iken, dikdörtgenin alanı a 'dan b 'ye kadar f 'nin grafiği altındaki alandır,

$$f(c)(b - a) = \int_a^b f(x) \, dx$$

Bu bölümde integral hesabın ana teoremi olan Analizin Temel Teoremini tanıtıyoruz. Teorem, integrasyon ile türev almayı birbirine bağlar ve bu bağlantı, integralleri Bölüm 5.3'te yaptığımız gibi Riemann toplamalarının limitlerini alarak hesaplamak yerine integral fonksiyonun bir ters türevini kullanarak hesaplamamızı sağlar. Leibniz ve Newton bu bağlantıyı keşfettiler ve sonraki 200 yıl için bilimsel devrimi ateşleyen matematiksel gelişmeyi başlattılar.

Yolumuz boyunca, integral hesabın önemli bir başka teoremi olan ve Temel Teoremi ispat etmek için kullanılan Ortalama Değer Teoreminin integral versiyonunu tanıtıyoruz.

Belirli İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi

Önceki bölümde, bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli olan bir fonksiyonun ortalama değerini, $\int_a^b f(x) \, dx$ belirli integralinin aralığın $b - a$ uzunluğu veya genişliği ile bölümü olarak tanımlamıştık. Belirli integraller için Ortalama Değer Teoremi, bu ortalama değer *daima* f fonksiyonu tarafından aralık içinde en az bir defa alındığını ileri sürer.

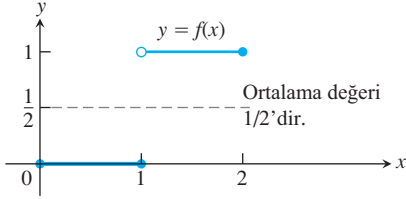
Şekil 5.16'daki grafik, $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı *pozitif* sürekli bir $y = f(x)$ fonksiyonunu göstermektedir. Geometrik olarak, Ortalama Değer Teoremi şunu söyler; $[a, b]$ aralığı içinde, yüksekliği fonksiyonun $f(c)$ ortalama değerine ve taban genişliği $b - a$ 'ya eşit olan dikdörtgenin alanı tam olarak a 'dan b 'ye kadar f 'nin grafiği altındaki bölgenin alanına eşit olacak şekilde bir c sayısı vardır.

TEOREM 3 Belirli İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi

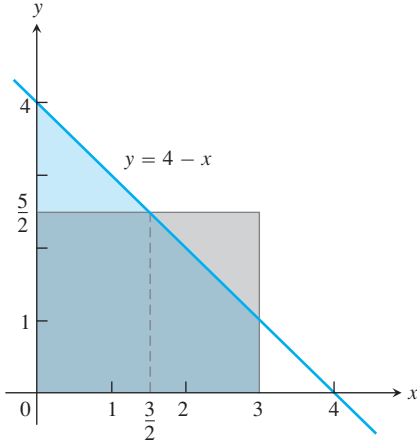
f , $[a, b]$ aralığında sürekli ise $[a, b]$ içindeki bir c noktasında

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx$$

olur.



ŞEKİL 5.17 Sürekli olmayan bir fonksiyon ortalama değerini almak zorunda değildir.



ŞEKİL 5.18 Tabanı $[0, 3]$ ve yüksekliği $5/2$ ($f(x) = 4 - x$ fonksiyonunun ortalama değeri) olan bir dikdörtgenin alanı 0'dan 3'e kadar f 'nin grafiği ile x -ekseni arasındaki alana eşittir (Örnek 1).

İspat Max-Min Eşitsizliğinin (Tablo 5.3, Kural 6) iki tarafını da $(b - a)$ ile bölersek,

$$\min f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \max f$$

elde ederiz. f sürekli olduğundan, Sürekli Fonksiyonlar İçin Ara Değer Teoremi (Bölüm 2.6) f 'nin $\min f$ ile $\max f$ arasındaki her değeri alması gerektiğini söyler. Dolayısıyla, fonksiyon $[a, b]$ aralığındaki bir c noktasında $(1/(b-a)) \int_a^b f(x) dx$ değerini almak zorundadır.

Burada f 'nin sürekliliği önemlidir. Süreksiz bir fonksiyon ortalama değerine hiçbir zaman eşit olmayabilir (Şekil 5.17).

ÖRNEK 1 İntegraller için Ortalama Değer Teoremini Uygulamak

$f(x) = 4 - x$ fonksiyonunun $[0, 3]$ aralığındaki ortalama değerini ve f 'nin bu değeri aralıktaki hangi noktada aldığını bulun.

Cözüm

$$\begin{aligned} \text{ort}(f) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ &= \frac{1}{3-0} \int_0^3 (4-x) dx = \frac{1}{3} \left(\int_0^3 4 dx - \int_0^3 x dx \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(4(3-0) - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) \right) \\ &= 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Bölüm 5.3, Denk. (1) ve (2)

$f(x) = 4 - x$ fonksiyonunun $[0, 3]$ aralığındaki ortalama değeri $5/2$ dir. Fonksiyon bu değeri $4 - x = 5/2$ veya $x = 3/2$ iken alır. (Şekil 5.18) ■

Örnek 1'de $f(x)$ 'i hesaplanan ortalama değere eşitleyip x 'i çözmekle gerçekten f 'nin ortalama değerini aldığı bir c noktası bulduk. Her zaman c değerini bulmak kolay olmayabilir. İntegraller için Ortalama Değer Teoreminden başka neler öğrenebiliriz? Bir örnek aşağıdadır.

ÖRNEK 2 f , $[a, b]$ aralığında sürekli, $a \neq b$ ve

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

ise, $[a, b]$ aralığında en az bir kere $f(x) = 0$ olacağını gösterin.

Cözüm $[a, b]$ aralığında f 'nin ortalama değeri

$$\text{ort}(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \cdot 0 = 0$$

olur. Teorem 2 dolayısıyla, f bu değeri $[a, b]$ 'deki bir c noktasında alır. ■

Temel Teorem, Kısım 1

$f(t)$, sonlu bir I aralığı üzerinde integre edilebilir bir fonksiyon ise, herhangi sabit bir $a \in I$ sayısından başka bir $x \in I$ sayısına kadar integrali, x 'teki değeri

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1)$$

olan yeni bir F fonksiyonunu tanımlar. Örneğin f negatif olmuyorsa ve x a 'nın sağında bulunuyorsa, $F(x)$ a 'dan x 'e kadar grafiğin altında kalan alanı verir (Şekil 5.19). x değişkeni bir integralin üst sınırıdır, fakat F reel değişkenli reel değerli başka bir fonksiyon gibidir. Verilen her x değerinde, iyi tanımlı bir sayısal değer bulunur; buradaki durumda f 'nin a 'dan x 'e integralidir.

(1) denklemi yeni fonksiyonlar tanımlamanın bir yolunu verir, fakat buradaki önemi, integrallerle türevler arasında kurduğu ilişkidir. f herhangi bir sürekli fonksiyonsa, Temel Teorem şunu ileri sürer; F , x 'in türevlenebilir bir fonksiyonudur ve türevi f 'nin kendisidir. Her x değerinde,

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

olur. Bu sonucun neden sağlandığını anlamak için arkasındaki geometriye bakalım.

$[a, b]$ aralığı üzerinde $f \geq 0$ ise $F'(x)$ 'in türevin tanımından hesaplanması, $h \rightarrow 0$ iken

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

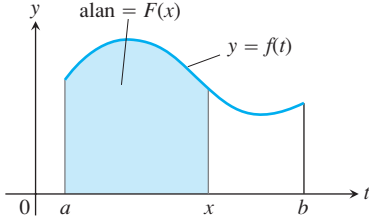
fark oranının limitini almak demektir. $h > 0$ için pay, iki alanın farkıdır. Dolayısıyla, x 'ten $x+h$ 'ye kadar f 'nin grafiği altındaki alandır (Şekil 5.20). Yani,

$$F(x+h) - F(x) \approx hf(x)$$

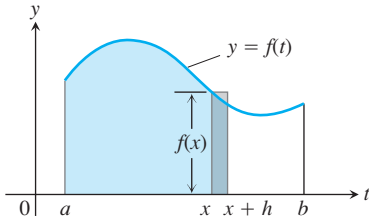
dir. Bu yaklaşımın her iki tarafını h ile bölmek ve $h \rightarrow 0$ iken

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

olmasını beklemek mantıklıdır. Bu sonuç, f fonksiyonu pozitif olmasa bile geçerlidir ve Analizin Temel Teoreminin birinci kısmını oluşturur.



ŞEKİL 5.19 Denklem (1) tarafından tanımlanan $F(x)$ fonksiyonu, f negatif olmayan bir fonksiyon ve $x > a$ olduğunda a 'dan x 'e kadar f 'nin grafiği altındaki alanı verir.



ŞEKİL 5.20 Denklem (1) de $F(x)$ x 'in solundaki alanıdır. Ayrıca, $F(x+h)$ $x+h$ 'nin solundaki alanıdır. Bu durumda $[F(x+h) - F(x)]/h$ fark denklemi yaklaşık olarak burada gösterilen dikdörtgenin yüksekliği $f(x)$ 'e eşittir.

TEOREM 4 Analizin Temel Teoremi, Kısım 1

f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ise, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve (a, b) 'de türevlenebilirdir ve türevi $f(x)$ 'dir;

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x). \quad (2)$$

Teorem 4'ü ispat etmeden önce ne söylediğini daha iyi anlamak için birkaç örneğe bakalım.

ÖRNEK 3 Temel Teoremi Uygulamak

Aşağıdakileri bulmak için Temel Teoremi Kullanın

(a) $\frac{d}{dx} \int_a^x \cos t \, dt$

(b) $\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$

(c) $\frac{dy}{dx}$ if $y = \int_x^5 3t \sin t \, dt$

(d) $\frac{dy}{dx}$ if $y = \int_1^{x^2} \cos t \, dt$

Çözüm

(a) $\frac{d}{dx} \int_a^x \cos t \, dt = \cos x$ $f(t) = \cos t$ ile Denklem (2)

(b) $\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{1+x^2}$ $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ ile Denklem (2)

(c) Bölüm 5.3, Tablo 5.3'teki integraller için Kural 1, Temel Teorem için bunu düzenler.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \int_x^5 3t \sin t \, dt = \frac{d}{dx} \left(- \int_5^x 3t \sin t \, dt \right) && \text{Kural 1} \\ &= - \frac{d}{dx} \int_5^x 3t \sin t \, dt \\ &= -3x \sin x \end{aligned}$$

(d) İntegrasyonun üst sınırı x değil, x^2 dir. Bu y 'yi

$$y = \int_1^u \cos t \, dt \quad \text{ve} \quad u = x^2$$

fonksiyonlarının bileşkesi yapar. Bu nedenle dy/dx 'i bulmak için Zincir Kuralını uygulamamız gerekir.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \left(\frac{d}{du} \int_1^u \cos t \, dt \right) \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \cos u \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \cos(x^2) \cdot 2x \\ &= 2x \cos x^2 \end{aligned}$$



ÖRNEK 4 Verilen Türev ve Değer ile bir Fonksiyon Kurmak

$(-\pi/2, \pi/2)$ tanım kümesinde türevi

$$\frac{dy}{dx} = \tan x$$

olan ve $f(3) = 5$ koşulunu sağlayan bir $y = f(x)$ fonksiyonu bulun.

Çözüm Temel Teorem, türevi $\tan x$ ve $x = 3$ 'teki değeri 0 olan bir fonksiyon kurmayı kolaylıkla yapar:

$$y = \int_3^x \tan t \, dt$$

$y(3) = \int_3^3 \tan t \, dt = 0$ olduğundan, $x = 3$ 'teki değeri 5 olan bir fonksiyon kurmak için bu fonksiyona sadece 5 eklememiz gerekir:

$$f(x) = \int_3^x \tan t \, dt + 5$$

Örnek 4'teki problemin çözümü istenen iki koşulu sağlamasına rağmen, kullanışlı bir formda olup olmadığını sorabilirsiniz. Bu gün integrallere yakınsamada yetenekli bilgisayar ve hesap makinelerimiz bulunduğundan cevap evet'tir. Bölüm 7'de Örnek 4'teki çözümü tam olarak

$$y = \ln \left| \frac{\cos 3}{\cos x} \right| + 5$$

şeklinde yazmasını öğreneceğiz.

Şimdi, herhangi bir sürekli fonksiyon için Temel Teoremin bir ispatını verelim.

Teorem 4'ün İspatı Temel Teoremi, x ve $x + h$ noktaları (a, b) 'de iken türev tanımını doğrudan $F(x)$ fonksiyonuna uygulayarak ispat edeceğiz. Bu

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} \quad [3]$$

farklar oranını yazmak ve (a, b) 'deki her x için $h \rightarrow 0$ iken limitinin $f(x)$ sayısı olduğunu göstermek anlamına gelir.

Böylece

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$

Tablo 5.3, Kural 5

Belirli İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremine göre, (4) denkleminin son ifadesindeki değer, x ve $x + h$ arasındaki aralıkta f 'nin aldığı değerlerden biridir. Yani, bu aralıktaki bir c sayısı için

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(c) \quad (4)$$

olur. Dolayısıyla, $h \rightarrow 0$ iken $x + h$ değeri x 'e gider ve c 'yi de x 'e yaklaştırmaya zorlar (çünkü c , x ile $x + h$ arasında sıkıştırılmıştır). f fonksiyonu x 'te sürekli olduğundan $f(c)$ de $f(x)$ 'e yaklaşır:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x) \quad (5)$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{x+h} f(t) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(c) && \text{Denklem (4)} \\ &= f(x) && \text{Denklem (5)} \end{aligned}$$

buluruz. $x = a$ veya b ise (3) denkleminin limiti sırasıyla $h \rightarrow 0^+$ veya $h \rightarrow 0^-$ ile tek taraflı bir limit olarak yorumlanır. Bu durumda Bölüm 3.1'deki Teorem 1, F 'nin $[a, b]$ 'deki her nokta için sürekli olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Temel Teorem, Kısım 2 (Hesaplama Teoremi)

Şimdi Analizin Temel Teoreminin ikinci kısmına geldik. Bu kısım, Riemann toplamalarının limitlerini hesaplamadan belirli integrallerin nasıl bulunacağını açıklamaktadır. Bir ters türev bulur ve integralin üst ve alt sınırlarında hesaplarız.

TEOREM 4 (Devam) Analizin Temel Teoremi, Kısım 2

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığının her noktasında sürekli ve F 'de f 'nin $[a, b]$ aralığındaki herhangi bir ters türevi ise

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

olur.

İspat Temel Teoremin 1. Kısım, f 'nin

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

gibi bir ters türevinin var olduğunu söyler. Dolayısıyla F , f 'nin herhangi bir ters türevi ise bir C sabiti ve $a < x < b$ için $F(x) = G(x) + C$ 'dir (Bölüm 4.2, Türevler için Ortalama Değer Teoremi, Sonuç 2). F ve G 'nin her ikisi $[a, b]$ 'de sürekli olduklarından, tek taraflı limitler olarak ($x \rightarrow a^+$ ve $x \rightarrow b^-$) $x = a$ ve $x = b$ iken de $F(x) = G(x) + C$ 'nin sağlandığını görürüz.

$F(b) - F(a)$ 'yı hesaplamakla,

$$\begin{aligned}
 F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] \\
 &= G(b) - G(a) \\
 &= \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt \\
 &= \int_a^b f(t) dt - 0 \\
 &= \int_a^b f(t) dt
 \end{aligned}$$

buluruz.

Teorem şunu söyler: f 'nin $[a, b]$ üzerindeki belirli integralini hesaplamak için bütün yapmamız gereken:

1. f 'nin bir F ters türevini bulun ve
2. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ sayısını hesaplayın.

$F(b) - F(a)$ için alışılmış notasyon, F 'nin birden fazla teriminin olup olmamasına bağlı olarak

$$F(x) \Big|_a^b \quad \text{veya} \quad \left[F(x) \right]_a^b$$

dir.

ÖRNEK 5 İntegralleri Hesaplamak

$$(a) \int_0^\pi \cos x dx = \sin x \Big|_0^\pi = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$$

$$(b) \int_{-\pi/4}^0 \sec x \tan x dx = \sec x \Big|_{-\pi/4}^0 = \sec 0 - \sec \left(-\frac{\pi}{4} \right) = 1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \int_1^4 \left(\frac{3}{2} \sqrt{x} - \frac{4}{x^2} \right) dx &= \left[x^{3/2} + \frac{4}{x} \right]_1^4 \\
 &= \left[(4)^{3/2} + \frac{4}{4} \right] - \left[(1)^{3/2} + \frac{4}{1} \right] \\
 &= [8 + 1] - [5] = 4.
 \end{aligned}$$

Örnek 5'teki işlem, bir Riemann toplamının hesaplanmasından çok daha kolaydır.

Temel Teoremin sonuçları, bize birkaç şey söylerler. Denklem (2)

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = \frac{dF}{dx} = f(x)$$

olarak yazılabilir. Bu bize, f 'nin önce integralini alıp sonra sonucun türevini alırsak tekrar f fonksiyonunu bulacağımızı söyler. Benzer şekilde

$$\int_a^x \frac{dF}{dt} dt = \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

denklemini, F fonksiyonunu önce türetip sonra sonucun integralini alırsak tekrar F fonksiyonunu bulacağımızı söyler (bir integrasyon sabiti ile). Bir anlamda, integrasyon ve türev

işlemleri birbirinin “tersi”dir. Temel Teorem ayrıca şunu da söyler; her sürekli f fonksiyonunun bir F ters türevi vardır. Ayrıca, $dy/dx = f(x)$ diferansiyel denkleminin her sürekli f fonksiyonu için bir ($y = F(x)$ ile verilen) çözümü vardır.

Toplam Alan

Riemann toplamaları, $f(c_k)$ pozitif iken bir dikdörtgenin alanını veren $f(c_k) \Delta_k$ gibi terimler içerirler. $f(c_k)$ negatif olduğunda $f(c_k) \Delta_k$ çarpımı dikdörtgenin alanının negatifidir. Negatif bir fonksiyon için böyle terimleri toplarsak eğri ile x -ekseni arasındaki alanın negatifini elde ederiz. Sonra, mutlak değer alırsak gerçek pozitif alanı buluruz.

ÖRNEK 6 Ters Türevleri Kullanarak Alan Bulmak

x -ekseni ve $y = 6 - x - x^2$ parabolü ile sınırlı bölgenin alanını bulun.

Çözüm

$$y = 0 = 6 - x - x^2 = (3 + x)(2 - x),$$

yazarak eğrinin x -eksenini nerede kestiğini buluruz;

$$x = -3 \quad \text{veya} \quad x = 2$$

Eğri Şekil 5.21’de çizilmiştir ve $[-3, 2]$ üzerinde negatif olmaz.

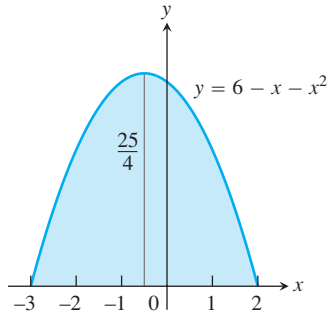
Alan

$$\begin{aligned} \int_{-3}^2 (6 - x - x^2) dx &= \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^2 \\ &= \left(12 - 2 - \frac{8}{3} \right) - \left(-18 - \frac{9}{2} + \frac{27}{3} \right) = 20\frac{5}{6} \end{aligned}$$

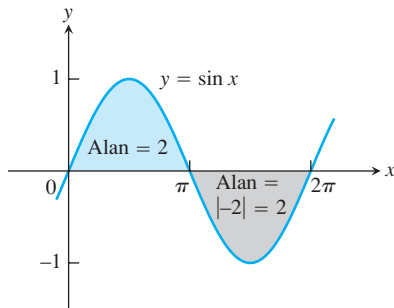
dır. Şekil 5.21’deki eğri bir parabol yayıdır ve böyle bir yayın altındaki alanın, tabanı kere yüksekliğinin tam olarak üçte ikisi olduğunu not etmek ilginçtir:

$$\frac{2}{3}(5) \left(\frac{25}{4} \right) = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}$$

■



ŞEKİL 5.21 Bu parabolik yayın alanı bir belirli integral ile hesaplanır (Örnek 6)



ŞEKİL 5.22 $0 \leq x \leq 2\pi$ için $y = \sin x$ ve x -ekseni arasındaki toplam alan, iki integralin mutlak değerleri toplamıdır (Örnek 7).

Bir $y = f(x)$ fonksiyonu ve x -ekseni ile sınırlı bölgenin alanını hesaplamak, fonksiyon hem pozitif ve hem de negatif değerler alıyorsa daha çok dikkat gerektirir. $[a, b]$ aralığını, fonksiyonun üzerinde işaret değiştirmeyeceği alt aralıklara bölmekte dikkatli olmalıyız. Aksi halde pozitif ve negatif işaretli alanlar arasında kısaltmalar meydana gelebilir ve bu yanlış bir toplam alana neden olabilir. Doğru toplam alan, $f(x)$ ’in işaret değiştirmedeği her bir alt aralık üzerindeki belirli integrallerin mutlak değerleri toplamı ile elde edilir. “Alan” terimi *toplam alan* anlamında alınacaktır.

ÖRNEK 7 Alanları Kısaltmak

Şekil 5.22, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $x = 0$ ve $x = 2\pi$ arasındaki grafiğini göstermektedir. Aşağıdakileri hesaplayın.

- $f(x)$ ’in $[0, 2\pi]$ üzerindeki belirli integrali.
- $[0, 2\pi]$ üzerinde $f(x)$ ’in grafiği ve x -ekseni arasındaki alan.

Çözüm $f(x) = \sin x$ için belirli integral

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -[\cos 2\pi - \cos 0] = -[1 - 1] = 0$$

ile verilir. Belirli integral sıfıra eşittir çünkü grafiğin x -ekseninin üzerindeki ve altındaki bölümleri birbirini götüren katkılar yaparlar.

$[0, 2\pi]$ üzerinde $f(x)$ 'in grafiği ile x -ekseni arasındaki alan, $\sin x$ 'in tanım kümesini iki parçaya ayırarak hesaplanır: negatif değer almadığı $[0, \pi]$ aralığı ve pozitif değer almadığı $[\pi, 2\pi]$ aralığı.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x \, dx &= -\cos x \Big|_0^{\pi} = -[\cos \pi - \cos 0] = -[-1 - 1] = 2 \\ \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx &= -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -[\cos 2\pi - \cos \pi] = -[1 - (-1)] = -2 \end{aligned}$$

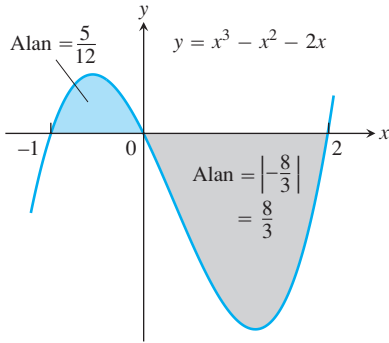
İkinci integral negatif bir değer verir. Grafik ile x -ekseni arasındaki alan mutlak değerlerin toplamı ile bulunur

$$\text{Alan} = |2| + |-2| = 4$$

Özet:

$[a, b]$ üzerinde $y = f(x)$ 'in grafiği ile x -ekseni arasındaki alanı bulmak için aşağıdakileri yapın:

1. $[a, b]$ aralığını f 'nin sıfırlarından bölün.
2. Her bir alt aralıkta f 'yi integre edin.
3. İntegrallerin mutlak değerlerini toplayın.



ŞEKİL 5.23 $y = x^3 - x^2 - 2x$ eğrisi ve x -ekseni arasındaki bölge (Örnek 8).

ÖRNEK 8 Ters Türevleri Kullanarak Alan Bulmak

x -ekseni ile $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, $-1 \leq x \leq 2$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanını bulun.

Çözüm Önce f 'nin sıfırlarını bulun.

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x + 1)(x - 2)$$

olduğu için, sıfırlar $x = 0, -1$ ve 2 'dir (Şekil 5.23). Sıfırlar $[-1, 2]$ aralığını iki alt aralığa böler: $f \geq 0$ olan $[-1, 0]$ ve $f \leq 0$ olan $[0, 2]$ alt aralıkları. f fonksiyonunu her alt aralıkta integre eder ve hesaplanan değerlerin mutlak değerlerini toplarız.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) \, dx &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 = 0 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right] = \frac{5}{12} \\ \int_0^2 (x^3 - x^2 - 2x) \, dx &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 = \left[4 - \frac{8}{3} - 4 \right] - 0 = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

Sınırlanan toplam alan, hesaplanan integrallerin mutlak değerlerini toplamakla elde edilir,

$$\text{Sınırlanan toplam alan} = \frac{5}{12} + \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{37}{12}$$

ALİŞTIRMALAR 5.4

İntegralleri Hesaplamak

1–26 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

1. $\int_{-2}^0 (2x + 5) dx$
2. $\int_{-3}^4 \left(5 - \frac{x}{2}\right) dx$
3. $\int_0^4 \left(3x - \frac{x^3}{4}\right) dx$
4. $\int_{-2}^2 (x^3 - 2x + 3) dx$
5. $\int_0^1 (x^2 + \sqrt{x}) dx$
6. $\int_0^5 x^{3/2} dx$
7. $\int_1^{32} x^{-6/5} dx$
8. $\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^2} dx$
9. $\int_0^{\pi} \sin x dx$
10. $\int_0^{\pi} (1 + \cos x) dx$
11. $\int_0^{\pi/3} 2 \sec^2 x dx$
12. $\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \csc^2 x dx$
13. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc \theta \cot \theta d\theta$
14. $\int_0^{\pi/3} 4 \sec u \tan u du$
15. $\int_{\pi/2}^0 \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$
16. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt$
17. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (8y^2 + \sin y) dy$
18. $\int_{-\pi/3}^{-\pi/4} \left(4 \sec^2 t + \frac{\pi}{t^2}\right) dt$
19. $\int_1^{-1} (r + 1)^2 dr$
20. $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t + 1)(t^2 + 4) dt$
21. $\int_{\sqrt{2}}^1 \left(\frac{u^7}{2} - \frac{1}{u^5}\right) du$
22. $\int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{v^3} - \frac{1}{v^4}\right) dv$
23. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{s^2 + \sqrt{s}}{s^2} ds$
24. $\int_9^4 \frac{1 - \sqrt{u}}{\sqrt{u}} du$
25. $\int_{-4}^4 |x| dx$
26. $\int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\cos x + |\cos x|) dx$

İntegrallerin Türevleri

27–30 alıştırmalarındaki türevleri bulun

- a. integrali hesaplayıp, sonucun türevini alarak
- b. integralin doğrudan türevini alarak bulun.

27. $\frac{d}{dx} \int_0^{\sqrt{x}} \cos t dt$
28. $\frac{d}{dx} \int_1^{\sin x} 3t^2 dt$
29. $\frac{d}{dt} \int_0^{t^4} \sqrt{u} du$
30. $\frac{d}{d\theta} \int_0^{\tan \theta} \sec^2 y dy$

31–36 alıştırmalarında dy/dx 'i bulun.

31. $y = \int_0^x \sqrt{1 + t^2} dt$
32. $y = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$
33. $y = \int_{\sqrt{x}}^0 \sin(t^2) dt$
34. $y = \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} dt$

$$35. y = \int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$36. y = \int_{\tan x}^0 \frac{dt}{1 + t^2}$$

Alan

37–42 alıştırmalarında, eğri ile x -ekseni arasındaki toplam alanını bulun.

$$37. y = -x^2 - 2x, \quad -3 \leq x \leq 2$$

$$38. y = 3x^2 - 3, \quad -2 \leq x \leq 2$$

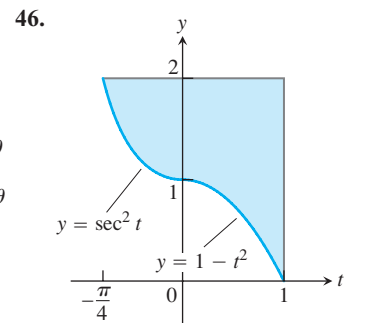
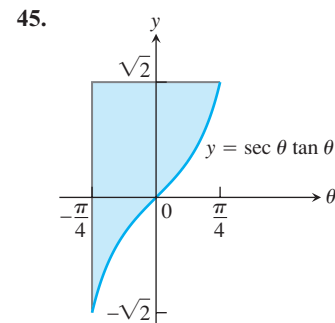
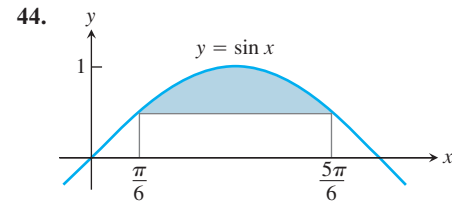
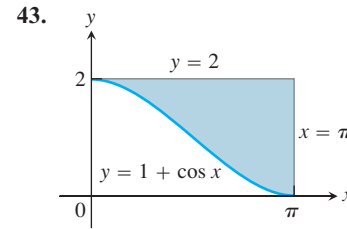
$$39. y = x^3 - 3x^2 + 2x, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$40. y = x^3 - 4x, \quad -2 \leq x \leq 2$$

$$41. y = x^{1/3}, \quad -1 \leq x \leq 8$$

$$42. y = x^{1/3} - x, \quad -1 \leq x \leq 8$$

43–46 alıştırmalarındaki renkli bölgelerin alanlarını bulun.



Başlangıç Değer Problemleri

Aşağıdaki fonksiyonlardan her biri 47–50 alıştırmalarındaki başlangıç değer problemlerinden birinin çözümüdür. Hangi fonksiyon hangi problemin çözümüdür? Yanıtlarınızı kısaca açıklayın.

$$\begin{array}{ll} \text{a. } y = \int_1^x \frac{1}{t} dt - 3 & \text{b. } y = \int_0^x \sec t dt + 4 \\ \text{c. } y = \int_{-1}^x \sec t dt + 4 & \text{d. } y = \int_{\pi}^x \frac{1}{t} dt - 3 \\ 47. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad y(\pi) = -3 & 48. y' = \sec x, \quad y(-1) = 4 \end{array}$$

$$49. y' = \sec x, \quad y(0) = 4 \quad 50. y' = \frac{1}{x}, \quad y(1) = -3$$

51–54 problemlerindeki başlangıç değer problemlerinin çözümlerini integral şeklinde yazın.

$$51. \frac{dy}{dx} = \sec x, \quad y(2) = 3$$

$$52. \frac{dy}{dx} = \sqrt{1+x^2}, \quad y(1) = -2$$

$$53. \frac{ds}{dt} = f(t), \quad s(t_0) = s_0$$

$$54. \frac{dv}{dt} = g(t), \quad v(t_0) = v_0$$

Uygulamalar

55. Paraboller için Arşimed alan formülü Arşimed (M.Ö. 287–212), mucit, askeri mühendis, fizikçi ve batı dünyasının klasik zamanlarının en büyük matematikçisi, bir parabolik yayın altındaki alanın, taban kere yüksekliğin üçte ikisi olduğunu keşfetmiştir. h ve b 'nin pozitif olduklarını varsayarak, $y = h - (4h/b^2)x^2$, $-b/2 \leq x \leq b/2$, parabolik yayını çizin. Sonra analiz kullanarak yay ile x -ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulun.

56. Marjinal gelirden gelir bulma Bir şirketin yumurta çırpıcı üretimi ve satışından marjinal kazancının, r bin dolar ve x bin birim olmak üzere

$$\frac{dr}{dx} = 2 - 2/(x+1)^2$$

ile verildiğini varsayın. Şirket $x = 3$ bin tane yumurta çırpıcı üretiminin ne kadar para beklemelidir? Bulmak için, marjinal kazancı $x = 0$ 'dan $x = 3$ 'e kadar integre edin.

57. Marjinal masraftan masraf bulma x poster basılmışsa, bir poster daha basmanın marjinal masrafı

$$\frac{dc}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

dolardır. 2–100 tane poster basmanın masrafı $c(100) - c(1)$ 'i bulun.

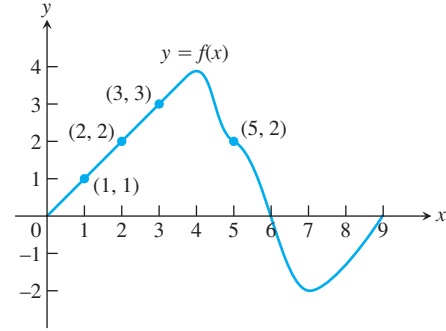
58. (Alıştırma 57'nin devamı) 101–400 tane poster basmanın masrafı $c(400) - c(100)$ 'ü bulun.

Grafikten Hareket Hakkında Sonuç Çıkarmak

59. f 'nin aşağıdaki grafikte gösterilen türevlenebilir fonksiyon olduğunu ve bir koordinat ekseninde hareket eden bir parçacığın t (saniye) anındaki konumunun

$$s = \int_0^t f(x) dx$$

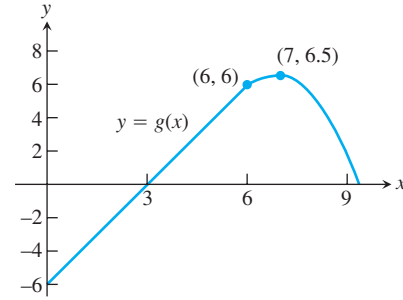
metre şeklinde verildiğini varsayın. Aşağıdaki soruları yanıtlamak için grafikten yararlanın. Yanıtlarınızı açıklayın.



- $t = 5$ anında parçacığın hızı nedir?
 - Parçacığın ivmesi $t = 5$ anında pozitif mi, yoksa negatif midir?
 - $t = 3$ anında parçacığın konumu nedir?
 - İlk 9 sn içinde s en büyük değerini ne zaman alır?
 - Yaklaşık olarak ne zaman ivme sıfırdır?
 - Parçacık ne zaman orijine doğru ilerlemekte, ne zaman orijinden uzaklaşmaktadır?
 - $t = 9$ anında parçacık orijinin hangi tarafında bulunmaktadır?
- 60.** g 'nin aşağıdaki grafikte gösterilen türevlenebilir fonksiyon olduğunu ve bir koordinat ekseninde hareket eden bir parçacığın t (saniye) anındaki konumunun

$$s = \int_0^t g(x) dx$$

metre şeklinde verildiğini varsayın. Aşağıdaki soruları yanıtlamak için grafikten yararlanın. Yanıtlarınızı açıklayın.



- a. $t = 3$ anında parçacığın hızı nedir?
- b. İvme $t = 3$ anında pozitif mi, yoksa negatif midir?
- c. $t = 3$ anında parçacığın konumu nedir?
- d. Parçacık orijinden ne zaman geçer?
- e. İvme ne zaman sıfırdır?
- f. Parçacık ne zaman orijinden uzaklaşmakta, ne zaman orijine doğru ilerlemektedir?
- g. $t = 9$ anında parçacık orijinin hangi tarafında bulunmaktadır?

Teori ve Örnekler

61. k pozitif bir sabitse, x -ekseni ile $y = \sin kx$ eğrisinin bir yayı arasında kalan alanın $2/k$ olduğunu gösterin.

62.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t^4 + 1} dt$$

limitini bulun.

63. $\int_1^x f(t) dt = x^2 - 2x + 1$ olsun. $f(x)$ 'i bulun.

64. $\int_0^x f(t) dt = x \cos \pi x$. ise $f(4)$ 'ü bulun.

65.

$$f(x) = 2 - \int_2^{x+1} \frac{9}{1+t} dt$$

fonksiyonunun $x = 1$ 'deki lineerizasyonunu bulun.

66.

$$g(x) = 3 + \int_1^{x^2} \sec(t-1) dt$$

fonksiyonunun $x = 1$ 'deki lineerizasyonunu bulun.

67. f 'nin her x değerinde pozitif bir türevi bulunduğunu ve $f(1) = 0$ olduğunu varsayın.

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

fonksiyonu için aşağıda söylenenlerden hangileri doğrudur? Yanıtlarınızı açıklayın.

- a. g x 'in türevlenebilir bir fonksiyonudur.
 - b. g x 'in sürekli bir fonksiyonudur.
 - c. g 'nin grafiğinin $x = 1$ 'de yatay bir teğeti vardır.
 - d. g 'nin $x = 1$ 'de yerel bir maksimumu vardır.
 - e. g 'nin $x = 1$ 'de yerel bir minimumu vardır.
 - f. g 'nin grafiğinin $x = 1$ 'de bir büküm noktası vardır.
 - g. dg/dx 'in grafiği x -eksenini $x = 1$ 'de keser.
68. f 'nin her x değerinde negatif bir türevi bulunduğunu ve $f(1) = 0$ olduğunu varsayın.

$$h(x) = \int_0^x f(t) dt$$

fonksiyonu için aşağıda söylenenlerden hangileri doğrudur? Yanıtlarınızı açıklayın.

- a. h x 'in iki kere türevlenebilir bir fonksiyonudur.
- b. Hem h hem de dh/dx sürekli dir.
- c. h 'nin grafiğinin $x = 1$ 'de yatay bir teğeti vardır.
- d. h 'nin $x = 1$ 'de yerel bir maksimumu vardır.
- e. h 'nin $x = 1$ 'de yerel bir minimumu vardır.
- f. h 'nin grafiğinin $x = 1$ 'de bir büküm noktası vardır.
- g. dh/dx 'in grafiği x -eksenini $x = 1$ 'de keser.

T 69. **Temel Teorem.** f sürekli ise,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

limitinin, Temel teoremin birinci kısmının ispatındaki gibi, $f(x)$ 'e eşit olmasını bekleriz. Örneğin, $f(t) = \cos t$ ise,

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} \cos t dt = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \quad (7)$$

olur. (7) denkleminin sağ tarafı sinüsün türevinin farklar oranıdır ve $h \rightarrow 0$ iken limitinin $\cos x$ olmasını bekleriz.

$-\pi \leq x \leq 2\pi$ aralığında $\cos x$ 'in grafiğini çizin. Sonra, mümkünse başka bir renkle, (7) denkleminin sağ tarafını $h = 2, 1, 0.5$ ve 0.1 değerleri için x 'in bir fonksiyonu olarak çizin. $h \rightarrow 0$ iken bu eğrilerin kosinüs grafiğine nasıl yakınsadıklarına bakın.

T 70. Alıştırma 69'u $f(t) = 3t^2$ için tekrarlayın.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} 3t^2 dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

nedir? $-1 \leq x \leq 1$ aralığında $f(x) = 3x^2$ 'nin grafiğini çizin. Sonra $((x+h)^3 - x^3)/h$ oranını $h = 1, 0.5, 0.2$ ve 0.1 değerleri için x 'in bir fonksiyonu olarak çizin. $h \rightarrow 0$ iken bu eğrilerin $3x^2$ 'nin grafiğine nasıl yakınsadıklarına bakın.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

71–74 alıştırma larında, belirlenmiş f fonksiyonu ve $[a, b]$ aralığı için $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ olsun. Bir BCS kullanarak, aşağıdaki adımları gerçekleştirin ve soruları yanıtlayın.

- a. f ve F fonksiyonlarını $[a, b]$ aralığında birlikte çizin.
- b. $F'(x) = 0$ denklemini çözün. $F'(x) = 0$ olduğu yerlerde f ve F 'nin grafikleri hakkında doğru olan neler görüyorsunuz? Temel Teoremin birinci kısmından gözlemledikleriniz, birinci türevden edindiğiniz bilgilerle uyuyor mu? Yanıtınızı açıklayın.
- c. Hangi aralıklarda (yaklaşık olarak) F fonksiyonu artmakta ve azalmaktadır? Bu aralıklarda f hakkında ne denebilir?
- d. f' türevini hesaplayın ve bunu F ile birlikte çizin. $f'(x) = 0$ olduğu noktalarda, F hakkında doğru olan ne söyleyebilirsiniz? Temel Teoremin birinci kısmından gözlemledikleriniz, birinci türevden edindiğiniz bilgilerle uyuyor mu? Yanıtınızı açıklayın.

71. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, $[0, 4]$

72. $f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 46x^2 - 43x + 12$, $\left[0, \frac{9}{2}\right]$

73. $f(x) = \sin 2x \cos \frac{x}{3}$, $[0, 2\pi]$

74. $f(x) = x \cos \pi x$, $[0, 2\pi]$

75–78 alıştırmalarında, belirlenmiş a değerleri ile u ve f fonksiyonları için $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt$ olsun. Bir BCS kullanarak, aşağıdaki adımları gerçekleştirin ve soruları yanıtlayın.

- F 'nin tanım kümesini bulun.
- $F'(x)$ 'i hesaplayın ve sıfırlarını belirleyin. Tanım kümesinin hangi aralıklarında F artar, hangi aralıklarında azalır?
- $F''(x)$ 'i hesaplayın ve sıfırını belirleyin. F' 'nin yerel ekstremumlarını ve büküm noktalarını tanımlayın.

d. (a)–(c) şıklarındaki bilgileri kullanarak, $y = F(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi içinde elle grafiğini çizin. Sonra $F(x)$ 'i BCS kullanarak çizerek, grafikleri karşılaştırın.

75. $a = 1$, $u(x) = x^2$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

76. $a = 0$, $u(x) = x^2$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

77. $a = 0$, $u(x) = 1 - x$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$

78. $a = 0$, $u(x) = 1 - x^2$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$

79–80 Alıştırmalarında f 'nin sürekli olduğunu ve $u(x)$ 'in iki kere türevlenebilir olduğunu kabul edin.

79. $\frac{d}{dx} \int_a^{u(x)} f(t) dt$ 'yi hesaplayın ve yanıtınızı bir BCS kullanarak doğrulayın.

80. $\frac{d^2}{dx^2} \int_a^{u(x)} f(t) dt$ 'yi hesaplayın ve yanıtınızı bir BCS kullanarak doğrulayın.

5.5

Belirsiz İntegraller ve Dönüşüm Kuralı

Bir belirli integral, normu sıfıra giden sonlu, kapalı bir aralığın bölünüşleri ile ilişkilendirilen Riemann toplamalarının limitini alarak tanımlanan bir sayıdır. Analizin Temel Teoremi, sürekli bir fonksiyonun belirli integralinin, fonksiyonun bir ters türevi bulunabilirse kolayca hesaplanabileceğini söyler. Ters türevleri bulmak, genelde türevleri bulmaktan daha zordur. Ancak, integralleri hesaplamak için teknikleri öğrenmek gayrete değerlidir.

Bölüm 4.8'den f fonksiyonunun *bütün* ters türevlerinin kümesine f 'nin x 'e göre **belirsiz integrali** dendiği ve

$$\int f(x) dx$$

ile sembolize edildiğini hatırlayın. Temel Teoremden ifade edilen, ters türevlerle belirli integral arasındaki bağıntı şimdi bu notasyonu açıklamaktadır. Bir f fonksiyonunun belirsiz integralini bulurken daima keyfi bir C sabitini içerdiğini hatırlayın.

Belirli ve belirsiz integralleri dikkatlice ayırmalıyız. Bir $\int_a^b f(x) dx$ belirli integrali bir *sayı*dır. Bir $\int f(x) dx$ belirsiz integrali bir fonksiyon artı keyfi bir C sabitidir.

Şimdiye kadar sadece türev olarak açıkça tanıyabildiğimiz fonksiyonların ters türevlerini bulabildik. Bu bölümde, ters türevleri bulmak için daha genel teknikler geliştirmeye başlayacağız. Geliştireceğimiz ilk integrasyon teknikleri, Kuvvet Kuralı ve Zincir Kuralı gibi türev alma kurallarının tersine çevrilmesiyle elde edilirler.

İntegral Formunda Kuvvet Kuralı

u x 'in türevlenebilir bir fonksiyonu ve n , -1 'den farklı bir rasyonel sayı ise Zincir Kuralı bize

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u^{n+1}}{n+1} \right) = u^n \frac{du}{dx}$$

olduğunu söyler. Bu aynı denklem, başka bir bakış açısıyla, $u^{n+1}/(n+1)$ fonksiyonunun ters türevlerinden birinin $u^n(du/dx)$ olduğunu söyler. Dolayısıyla,

$$\int \left(u^n \frac{du}{dx} \right) dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

olur. Bu denklemin sol tarafındaki integral genellikle daha basit olan ve dx 'lere sadeleştirilebilen diferansiyeller gözüyle bakılarak elde edilen

$$\int u^n du$$

“diferansiyel” formunda yazılır. Böylece aşağıdaki kuralı elde ederiz.

u türevlenebilir herhangi bir fonksiyonsa,

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1, n \text{ rasyonel}) \quad (1)$$

olur.

Bölüm 7’de göreceğimiz gibi, (1) denklemini aslında herhangi bir $n \neq -1$ reel kuvveti için sağlanır.

(1) denklemini türetirken, u ’nun x ’in türevlenebilir bir fonksiyonu olduğunu varsaydık, fakat değişkenin isminin önemi yoktur ve son formülde görünmez. Değişkeni θ , t , y veya herhangi başka bir harfle gösterebilirdik. (1) denklemini, bir integrali, u türevlenebilir bir fonksiyon ve du onun diferansiyeli olmak üzere

$$\int u^n du, \quad (n \neq -1)$$

şeklinde yazabilirsek, integrali $[u^{n+1}/(n+1)] + C$ şeklinde hesaplayabileceğimizi söyler.

ÖRNEK 1 Kuvvet Kuralını Kullanmak

$$\int \sqrt{1+y^2} \cdot 2y \, dy = \int \sqrt{u} \cdot \left(\frac{du}{dy} \right) dy$$

$$= \int u^{1/2} du$$

$$= \frac{u^{(1/2)+1}}{(1/2)+1} + C$$

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{3} (1+y^2)^{3/2} + C$$

$u = 1 + y^2$,
 $du/dy = 2y$
olsun.

$n = 1/2$ ile (1)
denklemini kullanarak
integre edin.
Daha basit şekil

u yerine $1 + y^2$ yazın



ÖRNEK 2 İntegrandı bir sabit ile ayarlamak

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{4t-1} \, dt &= \int \frac{1}{4} \cdot \sqrt{4t-1} \cdot 4 \, dt \\
&= \frac{1}{4} \int \sqrt{u} \cdot \left(\frac{du}{dt} \right) dt && u = 4t - 1, \text{ ve } du/dt = 4. \text{ olsun.} \\
&= \frac{1}{4} \int u^{1/2} \, du && 1/4 \text{ dışarı alındığında, integral standart şekline girer.} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C && n = 1/2 \text{ ile (1) denklemini kullanarak integre edin.} \\
&= \frac{1}{6} u^{3/2} + C && \text{Daha basit şekil} \\
&= \frac{1}{6} (4t - 1)^{3/2} + C && u \text{ yerine } 4t - 1 \text{ yazın.} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Değişken Dönüşümü: Zincir Kuralını Tersine İşletmek

Örnek 1 ve 2 deki dönüşümler aşağıdaki daha genel kuralın örnekleridir.

TEOREM 5 Değişken Dönüşümü Kuralı

$u = g(x)$ değer kümesi bir I aralığı olan türevlenebilir bir fonksiyon ise ve f , I üzerinde sürekli ise

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx = \int f(u) \, du$$

olur.

İspat Kural doğrudur çünkü, F f 'nin bir ters türeviyse, $F(g(x))$ de $f(g(x)) \cdot g'(x)$ 'in bir ters türevidir:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} F(g(x)) &= F'(g(x)) \cdot g'(x) && \text{Zincir kuralı} \\
&= f(g(x)) \cdot g'(x). && F' = f \text{ olduğu için}
\end{aligned}$$

$u = g(x)$ dönüşümü yaparsak

$$\begin{aligned}
\int f(g(x))g'(x) \, dx &= \int \frac{d}{dx} F(g(x)) \, dx \\
&= F(g(x)) + C && \text{Temel Teorem} \\
&= F(u) + C && u = g(x) \\
&= \int F'(u) \, du && \text{Temel Teorem} \\
&= \int f(u) \, du && F' = f \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Değişken Dönüşümü Kuralı, f ve g' fonksiyonları sürekli iken

$$\int f(g(x))g'(x) dx$$

integralini hesaplamak için aşağıdaki yöntemini verir.

1.

$$\int f(u) du$$

integralini elde etmek için $u = g(x)$ ve $du = g'(x) dx$ yazın.

2. u 'ya göre integre edin.

3. Sonuçta u yerine $g(x)$ yazın.

ÖRNEK 3 Değişken Dönüşümü Kullanmak

$$\begin{aligned} \int \cos(7\theta + 5) d\theta &= \int \cos u \cdot \frac{1}{7} du && u = 7\theta + 5, du = 7 d\theta, \\ &= \frac{1}{7} \int \cos u du && (1/7) du = d\theta \text{ olsun.} \\ &= \frac{1}{7} \sin u + C && 1/7 dışarı alındığında, integral standart şeklini alır. \\ &= \frac{1}{7} \sin(7\theta + 5) + C && u'ya göre integre edin, Tablo 4.2. \\ &&& u yerine 7\theta + 5 yazın. \end{aligned}$$

Türev alarak ve $\cos(7\theta + 5)$ fonksiyonunu elde ettiğimizi kontrol ederek bu çözümü gerçekleyebiliriz. ■

ÖRNEK 4 Değişken Dönüşümü Kullanmak

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin(x^3) dx &= \int \sin(x^3) \cdot x^2 dx \\ &= \int \sin u \cdot \frac{1}{3} du && u = x^3, du = 3x^2 dx, \\ &= \frac{1}{3} \int \sin u du && (1/3) du = x^2 dx \text{ olsun.} \\ &= \frac{1}{3} (-\cos u) + C && u'ya göre integre edin.. \\ &= -\frac{1}{3} \cos(x^3) + C && u yerine x^3 yazın. \end{aligned}$$

■

ÖRNEK 5 Özdeşlik ve Değişken Dönüşümü Kullanmak

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos^2 2x} dx &= \int \sec^2 2x dx & \frac{1}{\cos 2x} &= \sec 2x \\
&= \int \sec^2 u \cdot \frac{1}{2} du & u &= 2x, du = 2 dx, \\
& & dx &= (1/2) du \text{ olsun.} \\
&= \frac{1}{2} \int \sec^2 u du \\
&= \frac{1}{2} \tan u + C & \frac{d}{du} \tan u &= \sec^2 u \\
&= \frac{1}{2} \tan 2x + C & u &= 2x
\end{aligned}$$

Değişken dönüşümü yönteminin başarısı hesaplayamadığımız bir integrali hesaplayabileceğimiz bir integrale dönüştürecek bir dönüşüm bulunmasına dayanır. İlk değişken dönüşümü işe yaramazsa, bir veya iki değişken dönüşümü daha yaparak, integrandı en basit hale getirmeye çalışırız (Bkz. Alıştırma 49 ve 50). Ya da baştan başlarız. Aşağıdaki örnekte olduğu gibi başlangıç için birden fazla iyi yol olabilir.

ÖRNEK 6 Farklı Değişken Dönüşümleri Kullanmak

$$\int \frac{2z dz}{\sqrt[3]{z^2 + 1}}$$

integralini hesaplayın.

Çözüm Değişken dönüşümü yöntemini araştırmacı bir araç olarak kullanabiliriz: integrandın en karmaşık kısmı için bir değişken dönüşümü yapıp, işlerin nasıl gittiğine bakabiliriz. Buradaki integral için, $u = z^2 + 1$ 'i deneyebilir veya u 'yu tüm küp kök olarak alabiliriz. Her iki durumda da neler olduğu aşağıdadır.

Çözüm 1: $u = z^2 + 1$ alın.

$$\begin{aligned}
\int \frac{2z dz}{\sqrt[3]{z^2 + 1}} &= \int \frac{du}{u^{1/3}} & u &= z^2 + 1, \\
& & du &= 2z dz \text{ olsun.} \\
&= \int u^{-1/3} du & \int u^n du &\text{ şeklinde} \\
&= \frac{u^{2/3}}{2/3} + C & u &\text{'ya göre integre edin.} \\
&= \frac{3}{2} u^{2/3} + C \\
&= \frac{3}{2} (z^2 + 1)^{2/3} + C & u &\text{ yerine } z^2 + 1 \text{ yazın.}
\end{aligned}$$

Çözüm 2: $u = \sqrt[3]{z^2 + 1}$ alın.

$$\begin{aligned} \int \frac{2z \, dz}{\sqrt[3]{z^2 + 1}} &= \int \frac{3u^2 \, du}{u} \\ &= 3 \int u \, du \\ &= 3 \cdot \frac{u^2}{2} + C \\ &= \frac{3}{2} (z^2 + 1)^{2/3} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{z^2 + 1}, \\ u^3 &= z^2 + 1, \\ 3uz^2 \, du &= 2z \, dz \text{ olsun.} \end{aligned}$$

u 'ya göre integre edin.

u yerine $(z^2 + 1)^{1/3}$ yazın. ■

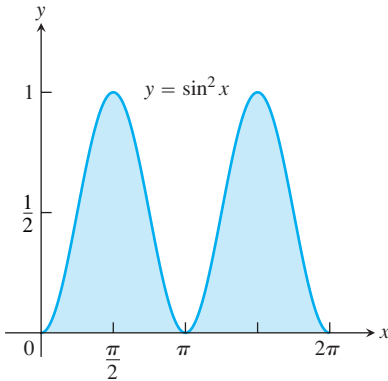
$\sin^2 x$ ve $\cos^2 x$ İntegralleri

Nasıl hesaplayacağımızı bilmediğimiz integralleri, hesaplayabileceğimiz integrallere dönüştürmek için bazen trigonometrik özdeşlikleri kullanırız. $\sin^2 x$ ve $\cos^2 x$ 'in integral formülleri ile uygulamalarda çok sık karşılaşılır.

ÖRNEK 7

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int \sin^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \\ \text{(b)} \quad \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C & \text{(a) şıkkındaki gibi,} & \\ & & \text{fakat işaret farkı var.} & \end{aligned}$$

■



ŞEKİL 5.24 $[0, 2\pi]$ aralığında $y = \sin^2 x$ eğrisinin altındaki alan π birim karedir (Örnek 8)

ÖRNEK 8 $y = \sin^2 x$ Eğrisinin Altındaki Alan

Şekil 5.24, $g(x) = \sin^2 x$ 'in $[0, 2\pi]$ aralığındaki grafiğini göstermektedir. Aşağıdakileri bulun.

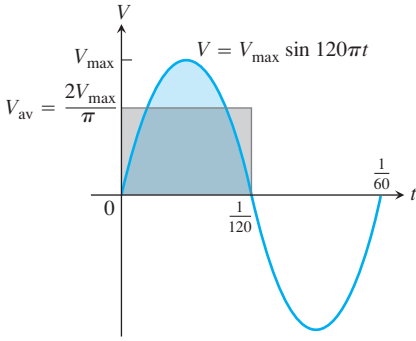
- (a) $g(x)$ 'in $[0, 2\pi]$ aralığındaki belirli integrali.
- (b) $[0, 2\pi]$ aralığında fonksiyonun grafiği ile x -ekseni arasındaki alan

Çözüm

- (a) Örnek 7(a) dan belirli integral

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx &= \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{2\pi} = \left[\frac{2\pi}{2} - \frac{\sin 4\pi}{4} \right] - \left[\frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4} \right] \\ &= [\pi - 0] - [0 - 0] = \pi \end{aligned}$$

- (b) $\sin^2 x$ fonksiyonu negatif olmaz dolayısıyla alan belirli integrale, π 'ye eşittir ■



ŞEKİL 5.25 Ev gerilimi

$V = V_{\max} \sin 120\pi t$ 'nin tam bir dönüşü.

Yarım dönüşteki ortalama değeri

$2V_{\max}/\pi$ 'dir. Tam dönüşteki ortalaması ise sıfırdır (Örnek 9).

ÖRNEK 9 Ev elektriği

Ev kablolarımızdaki gerilimi saniye birimiyle t zamanının bir fonksiyonu olarak

$$V = V_{\max} \sin 120\pi t,$$

şeklinde ifade edebiliriz. Fonksiyon her saniyede 60 dönüş tamamlar (frekansı 60 hertz veya 60 Hz'dir). Pozitif $V_{\max}$ sabiti **tepe gerilimidir**.

V 'nin, 0 dan $1/120$ sn'ye kadar olan bir yarım dönüşteki ortalama değeri (Şekil 5.25'e bakın) şöyle bulunur:

$$\begin{aligned} V_{\text{ort}} &= \frac{1}{(1/120) - 0} \int_0^{1/120} V_{\max} \sin 120\pi t \, dt \\ &= 120V_{\max} \left[-\frac{1}{120\pi} \cos 120\pi t \right]_0^{1/120} \\ &= \frac{V_{\max}}{\pi} [-\cos \pi + \cos 0] \\ &= \frac{2V_{\max}}{\pi} \end{aligned}$$

Tam bir dönüşte gerilimin ortalama değeri, Şekil 5.25'ten görebileceğimiz gibi, sıfırdır. (Ayrıca Alıştırma 63'e bakın). Gerilimi standart bir hareketli sarım galvanometresiyle ölçseydik, alet sıfır okurdu.

Gerilimi efektif olarak ölçmek için, geriliminin karesinin ortalama değerinin karekökünü, yani

$$V_{\text{okk}} = \sqrt{(V^2)_{\text{ort}}}$$

değerini ölçen bir alet kullanırız. “okk” alt indisi “ortalama karenin karekökü” anlamındadır. $V^2 = (V_{\max})^2 \sin^2 120\pi t$ 'nin ortalama değeri

$$(V^2)_{\text{ort}} = \frac{1}{(1/60) - 0} \int_0^{1/60} (V_{\max})^2 \sin^2 120\pi t \, dt = \frac{(V_{\max})^2}{2}$$

olduğu için (Alıştırma 63 c), okk gerilim

$$V_{\text{okk}} = \sqrt{\frac{(V_{\max})^2}{2}} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$$

olarak bulunur. Evlerde kullanılan akım ve gerilimler için verilen değerler her zaman okk değerleridir. Yani, “115 V AC” okk gerilimin 115 olduğu anlamına gelir. Son denklemden elde edilen tepe gerilimi,

$$V_{\max} = \sqrt{2} V_{\text{okk}} = \sqrt{2} \cdot 115 \approx 163 \text{ volt}$$

oldukça yüksektir. ■

ALİŞTIRMALAR 5.5

İntegral Hesaplama

1-12 alıştırmalarındaki integralleri, verilen değişken dönüşümlerini kullanarak standart hale getirip hesaplayın.

1. $\int \sin 3x \, dx, \quad u = 3x$

2. $\int x \sin(2x^2) \, dx, \quad u = 2x^2$

3. $\int \sec 2t \tan 2t \, dt, \quad u = 2t$

4. $\int \left(1 - \cos \frac{t}{2}\right)^2 \sin \frac{t}{2} \, dt, \quad u = 1 - \cos \frac{t}{2}$

5. $\int 28(7x - 2)^{-5} dx, \quad u = 7x - 2$
 6. $\int x^3(x^4 - 1)^2 dx, \quad u = x^4 - 1$
 7. $\int \frac{9r^2 dr}{\sqrt{1 - r^3}}, \quad u = 1 - r^3$
 8. $\int 12(y^4 + 4y^2 + 1)^2(y^3 + 2y) dy, \quad u = y^4 + 4y^2 + 1$
 9. $\int \sqrt{x} \sin^2(x^{3/2} - 1) dx, \quad u = x^{3/2} - 1$
 10. $\int \frac{1}{x^2} \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) dx, \quad u = -\frac{1}{x}$
 11. $\int \csc^2 2\theta \cot 2\theta d\theta$
 a. $u = \cot 2\theta$ kullanarak, b. $u = \csc 2\theta$ kullanarak.
 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x + 8}}$
 a. $u = 5x + 8$ kullanarak, b. $u = \sqrt{5x + 8}$ kullanarak.

13–48 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

13. $\int \sqrt{3 - 2s} ds$ 14. $\int (2x + 1)^3 dx$
 15. $\int \frac{1}{\sqrt{5s + 4}} ds$ 16. $\int \frac{3 dx}{(2 - x)^2}$
 17. $\int \theta \sqrt[4]{1 - \theta^2} d\theta$ 18. $\int 8\theta \sqrt[3]{\theta^2 - 1} d\theta$
 19. $\int 3y \sqrt{7 - 3y^2} dy$ 20. $\int \frac{4y dy}{\sqrt{2y^2 + 1}}$
 21. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2} dx$ 22. $\int \frac{(1 + \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx$
 23. $\int \cos(3z + 4) dz$ 24. $\int \sin(8z - 5) dz$
 25. $\int \sec^2(3x + 2) dx$ 26. $\int \tan^2 x \sec^2 x dx$
 27. $\int \sin^5 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} dx$ 28. $\int \tan^7 \frac{x}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx$
 29. $\int r^2 \left(\frac{r^3}{18} - 1\right)^5 dr$ 30. $\int r^4 \left(7 - \frac{r^5}{10}\right)^3 dr$
 31. $\int x^{1/2} \sin(x^{3/2} + 1) dx$ 32. $\int x^{1/3} \sin(x^{4/3} - 8) dx$
 33. $\int \sec\left(v + \frac{\pi}{2}\right) \tan\left(v + \frac{\pi}{2}\right) dv$
 34. $\int \csc\left(\frac{v - \pi}{2}\right) \cot\left(\frac{v - \pi}{2}\right) dv$
 35. $\int \frac{\sin(2t + 1)}{\cos^2(2t + 1)} dt$ 36. $\int \frac{6 \cos t}{(2 + \sin t)^3} dt$

37. $\int \sqrt{\cot y} \csc^2 y dy$ 38. $\int \frac{\sec z \tan z}{\sqrt{\sec z}} dz$
 39. $\int \frac{1}{t^2} \cos\left(\frac{1}{t} - 1\right) dt$ 40. $\int \frac{1}{\sqrt{t}} \cos(\sqrt{t} + 3) dt$
 41. $\int \frac{1}{\theta^2} \sin \frac{1}{\theta} \cos \frac{1}{\theta} d\theta$ 42. $\int \frac{\cos \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta} \sin^2 \sqrt{\theta}} d\theta$
 43. $\int (s^3 + 2s^2 - 5s + 5)(3s^2 + 4s - 5) ds$
 44. $\int (\theta^4 - 2\theta^2 + 8\theta - 2)(\theta^3 - \theta + 2) d\theta$
 45. $\int t^3(1 + t^4)^3 dt$ 46. $\int \sqrt{\frac{x - 1}{x^5}} dx$
 47. $\int x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx$ 48. $\int 3x^5 \sqrt{x^3 + 1} dx$

İntegralleri Adım Adım Basitleştirmek

Hangi değişken dönüşümünü yapmanız gerektiğini bilmiyorsanız, bir deneme dönüşümü kullanarak integrali biraz basitleştirmek, başka bir dönüşümle biraz daha basite indirmek yoluyla integrali adım adım basitleştirmeyi deneyin. 49 ve 50 alıştırmalarındaki dönüşüm dizisini izlerseniz, ne demek istediğimizi anlayacaksınız.

49. $\int \frac{18 \tan^2 x \sec^2 x}{(2 + \tan^3 x)^2} dx$
 a. $u = \tan x$, ardından $v = u^3$, sonra $w = 2 + v$
 b. $u = \tan^3 x$, ardından $v = 2 + u$
 c. $u = 2 + \tan^3 x$
 50. $\int \sqrt{1 + \sin^2(x - 1)} \sin(x - 1) \cos(x - 1) dx$
 a. $u = x - 1$, ardından $v = \sin u$, sonra $w = 1 + v^2$
 b. $u = \sin(x - 1)$, ardından $v = 1 + u^2$
 c. $u = 1 + \sin^2(x - 1)$

51 ve 52 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

51. $\int \frac{(2r - 1) \cos \sqrt{3(2r - 1)^2 + 6}}{\sqrt{3(2r - 1)^2 + 6}} dr$
 52. $\int \frac{\sin \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta} \cos^3 \sqrt{\theta}} d\theta$

Başlangıç Değer Problemleri

53–58 alıştırmalarındaki başlangıç değer problemlerini çözün.

53. $\frac{ds}{dt} = 12t(3t^2 - 1)^3, \quad s(1) = 3$
 54. $\frac{dy}{dx} = 4x(x^2 + 8)^{-1/3}, \quad y(0) = 0$
 55. $\frac{ds}{dt} = 8 \sin^2\left(t + \frac{\pi}{12}\right), \quad s(0) = 8$

56. $\frac{dr}{d\theta} = 3 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right), \quad r(0) = \frac{\pi}{8}$
57. $\frac{d^2s}{dt^2} = -4 \sin \left(2t - \frac{\pi}{2} \right), \quad s'(0) = 100, \quad s(0) = 0$
58. $\frac{d^2y}{dx^2} = 4 \sec^2 2x \tan 2x, \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = -1$
59. Bir doğru üzerinde ileri geri hareket eden bir parçacığın hızı her t için $v = ds/dt = 6 \sin 2t$ m/sn'dir. $t = 0$ iken $s = 0$ ise, $t = \pi/2$ sn iken s 'yi bulun.
60. Bir doğru üzerinde ileri geri hareket eden bir parçacığın ivmesi her t için $a = d^2s/dt^2 = \pi^2 \cos \pi t$ m/sn² dir. $t = 0$ iken $s = 0$ ve $v = 8$ m/sn ise, $t = 1$ sn iken s 'yi bulun.

Teori ve Örnekler

61. $2 \sin x \cos x$ fonksiyonunun x 'e göre integralini üç ayrı şekilde alabiliriz gibi görünmektedir:
- a. $\int 2 \sin x \cos x \, dx = \int 2u \, du \quad u = \sin x,$
 $= u^2 + C_1 = \sin^2 x + C_1$
- b. $\int 2 \sin x \cos x \, dx = \int -2u \, du \quad u = \cos x,$
 $= -u^2 + C_2 = -\cos^2 x + C_2$
- c. $\int 2 \sin x \cos x \, dx = \int \sin 2x \, dx \quad 2 \sin x \cos x = \sin 2x$
 $= -\frac{\cos 2x}{2} + C_3$

Üç integrasyon da doğru olabilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

62. $u = \tan x$ dönüşümü

$$\int \sec^2 x \tan x \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\tan^2 x}{2} + C$$

verir. $u = \sec x$ dönüşümü ise

$$\int \sec^2 x \tan x \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sec^2 x}{2} + C$$

verir. Her iki integrasyon da doğru olabilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

63. (Örnek 9'un devamı)

- a. $V = V_{\max} \sin 120 \pi t$ 'nin tam bir dönüştaki ortalama değerinin sıfır olduğunu

$$\frac{1}{(1/60) - 0} \int_0^{1/60} V_{\max} \sin 120 \pi t \, dt$$

ifadesindeki integrali hesaplayarak bulun.

- b. Elektrikli fırınınızı çalıştıran devre 240 V okk'ye ayarlıdır. İzin verilebilir gerilimin tepe değeri nedir?

c.

$$\int_0^{1/60} (V_{\max})^2 \sin^2 120 \pi t \, dt = \frac{(V_{\max})^2}{120}$$

olduğunu gösterin.

5.6

Değişken Dönüşümü ve Eğriler Arasındaki Alanlar

Bir belirli integrali değişken dönüşümü ile hesaplamanın iki yolu vardır. Birincisi değişken dönüşümü yaparak bir ters türev bulmak ve sonra Temel Teoremi uygulayarak belirli integrali hesaplamaktır. Bu yöntemi önceki bölümde Örnek 8 ve 9 da kullandık. İkinci yöntem, değişken dönüşümü işlemini doğrudan *belirli* integrallere genişletir. Burada tanıttığımız bu yeni formülü iki eğri arasındaki alanı bulma problemine uyguluyoruz.

Değişken Dönüşümü Formülü

Aşağıdaki formülde, integrasyon değişkeni bir değişken dönüşümü ile değiştirildiğinde integrasyon sınırları değişir.

TEOREM 6 Belirli İntegrallerde Değişken Dönüşümü

g' , $[a, b]$ aralığında sürekli ise ve f de g 'nin değerler kümesinde sürekli ise

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du$$

dir.

İspat F , f 'nin herhangi bir ters türevi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx &= F(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} & \frac{d}{dx} F(g(x)) \\
 &= F(g(b)) - F(g(a)) & = F'(g(x))g'(x) \\
 &= F(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = f(g(x))g'(x) \\
 &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du & \text{Temel Teorem} \\
 & & \text{2. Kısım}
 \end{aligned}$$

Formülü kullanmak için, belirsiz integrali hesaplamakta kullanacağınız $u = g(x)$ ve $du = g'(x)$ dönüşümünün aynısını yapın. Sonra, dönüşmüş integrali $g(a)$ değerinden (u 'nun $x = a$ daki değeri) $g(b)$ değerine (u 'nun $x = b$ deki değeri) kadar u 'ya göre integre edin.

ÖRNEK 1 İki Yöntemle Değişken Dönüşümü

$\int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$ integralini hesaplayın.

Çözüm İki seçeneğimiz vardır.

Yöntem 1: İntegrali dönüştürün ve dönüştürülmüş integrali Teorem 6 da verilen dönüştürülmüş sınırlarla hesaplayın.

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx &= \int_0^2 \sqrt{u} du & u = x^3 + 1, du = 3x^2 dx \text{ olsun.} \\
 &= \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^2 & x = -1 \text{ iken, } u = (-1)^3 + 1 = 0 \text{ olur.} \\
 &= \frac{2}{3} \left[2^{3/2} - 0^{3/2} \right] = \frac{2}{3} \left[2\sqrt{2} \right] = \frac{4\sqrt{2}}{3} & x = 1 \text{ iken, } u = (1)^3 + 1 = 2 \text{ olur.} \\
 & & \text{Yeni belirli integrali hesaplayın.}
 \end{aligned}$$

Yöntem 2: İntegrali belirsiz bir integrale çevirin, integre edin, x 'e geri dönün ve orijinal x sınırlarını kullanın.

$$\begin{aligned}
 \int 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx &= \int \sqrt{u} du & u = x^3 + 1, du = 3x^2 dx \text{ alın.} \\
 &= \frac{2}{3} u^{3/2} + C & u'ya göre integre edin. \\
 &= \frac{2}{3} (x^3 + 1)^{3/2} + C & u yerine } x^3 + 1 yazın. \\
 \int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx &= \frac{2}{3} (x^3 + 1)^{3/2} \Big|_{-1}^1 & x'in integrasyon sınırları ile bulduğunuz integrali kullanın. \\
 &= \frac{2}{3} \left[((1)^3 + 1)^{3/2} - ((-1)^3 + 1)^{3/2} \right] \\
 &= \frac{2}{3} \left[2^{3/2} - 0^{3/2} \right] = \frac{2}{3} \left[2\sqrt{2} \right] = \frac{4\sqrt{2}}{3}
 \end{aligned}$$

Hangi yöntem daha iyidir— Teorem 6'yı kullanarak, dönüştürülmüş belirli integrali dönüştürülmüş sınırlarla hesaplamak mı yoksa integrali dönüştürmek, integre etmek ve geri dönüştürüp esas integrasyon sınırlarını kullanmak mı? Örnek 1'de, birinci yöntem daha kolay gibidir, fakat durum her zaman böyle olmaz. Genel olarak, en iyisi iki yöntemi de bilmek ve hangisi uygunsa onu kullanmaktır.

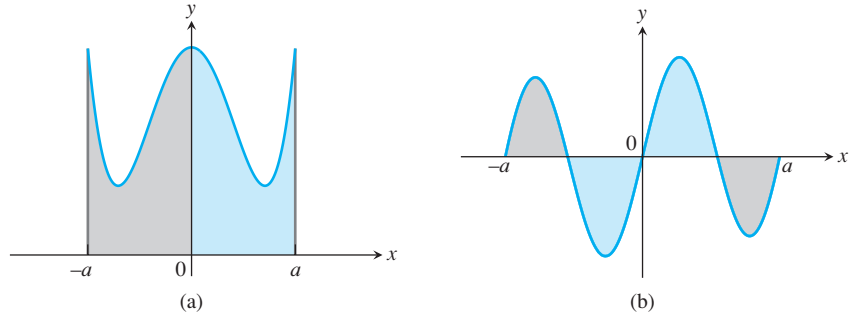
ÖRNEK 2 Dönüşüm Formülünü Kullanmak

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot \theta \csc^2 \theta \, d\theta &= \int_1^0 u \cdot (-du) \\ &= - \int_1^0 u \, du \\ &= - \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^0 \\ &= - \left[\frac{(0)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2} \right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$u = \cot \theta$, $du = -\csc^2 \theta \, d\theta$,
 $-du = \csc^2 \theta \, d\theta$. alın.
 $\theta = \pi/4$ iken, $u = \cot(\pi/4) = 1$ olur.
 $\theta = \pi/2$ iken, $u = \cot(\pi/2) = 0$ olur.

Simetrik Fonksiyonların Belirli İntegralleri

Teorem 6'daki Dönüşüm Formülü, çift ve tek fonksiyonların (Bölüm 1.4) simetrik bir $[-a, a]$ aralığı üzerindeki belirli integrallerini basitleştirir (Şekil 5.26).



ŞEKİL 5.26 (a) f çift, $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$ (b) f tek, $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$

Teorem 7

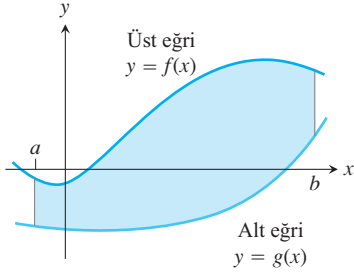
f , $[-a, a]$ simetrik aralığı üzerinde sürekli olsun.

(a) f çift ise $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$

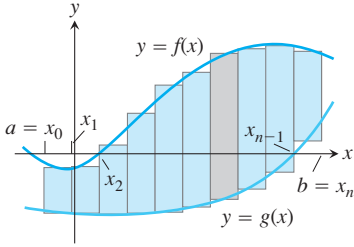
(b) f tek ise $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$

dir.

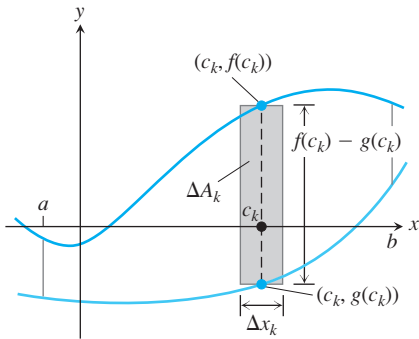
(a)'nın ispatı



ŞEKİL 5.27 $y = f(x)$ ile $y = g(x)$ ve $x = a$ ile $x = b$ doğruları arasındaki bölge



ŞEKİL 5.28 Bölgeye x -eksenine dik dikdörtgenlerle yaklaşımda bulunuruz.



ŞEKİL 5.29 k . dikdörtgenin ΔA_k alanı, $f(c_k) - g(c_k)$ yüksekliği ile Δx_k genişliğinin çarpımıdır.

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

Belirli İntegraller için
Toplanabilirlik Kuralı

$$= -\int_0^{-a} f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

İntegrasyonun Sırası Kuralı

$$= -\int_0^a f(-u)(-du) + \int_0^a f(x) dx$$

$u = -x$, $du = -dx$ olsun.
 $x = 0$ iken $u = 0$
 $x = -a$ iken $u = a$

$$= \int_0^a f(-u) du + \int_0^a f(x) dx$$

$$= \int_0^a f(u) du + \int_0^a f(x) dx$$

f çifttir, dolayısıyla
 $f(-u) = f(u)$ 'dur.

$$= 2 \int_0^a f(x) dx$$

(b)'nin ispatı tamamen benzerdir ve Alıştırma 86 da sizden istenmektedir. ■

Teorem 7'nin iddiaları f 'nin integre edilebilir bir fonksiyon (daha kuvvetli olan sürekli olmak yerine) olması durumunda da geçerlidir, fakat ispatı biraz daha zordur ve daha ileri seviyedeki derslere bırakmak daha iyidir.

ÖRNEK 3 Bir Çift Fonksiyonun İntegrali

$$\int_{-2}^2 (x^4 - 4x^2 + 6) dx \text{ integralini hesaplayın.}$$

Çözüm $f(x) = x^4 - 4x^2 + 6$, $f(-x) = f(x)$ eşitliğini sağladığından $[-2, 2]$ simetrik aralığı üzerinde bir çift fonksiyondur, böylece

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (x^4 - 4x^2 + 6) dx &= 2 \int_0^2 (x^4 - 4x^2 + 6) dx \\ &= 2 \left[\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 6x \right]_0^2 \\ &= 2 \left(\frac{32}{5} - \frac{32}{3} + 12 \right) = \frac{232}{15}. \end{aligned}$$

Eğriler Arasındaki Alanlar

Üstten $y = f(x)$ eğrisi, alttan $y = g(x)$ eğrisi, soldan ve sağdan $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile sınırlı bir bölgenin alanını bulmak istediğimizi varsayın (Şekil 5.27). Bölge tesadüfen, alanını geometriyle bulabileceğimiz bir şekilde olabilir, fakat f ve g rasgele sürekli fonksiyonlarsa, genellikle alanı bir integrale bulmamız gerekir.

İntegralin ne olması gerektiğini görmek için, önce bölgeyi tabanları $[a, b]$ aralığının $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bölüşünde bulunan n dikey dikdörtgenle böleriz (Şekil 5.28). k . dikdörtgenin alanı (Şekil 5.29)

$$\Delta A_k = \text{yükseklik} \times \text{genişlik} = [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k$$

Bölgenin alanına n dikdörtgenin alanını toplayarak yaklaşımda bulunuruz:

$$A \approx \sum_{k=1}^n \Delta A_k = \sum_{k=1}^n [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k. \quad \text{Riemann Toplamı}$$

$\|P\| \rightarrow 0$ iken, sağ taraftaki toplamalar $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ limitine yaklaşırlar, çünkü f ve g süreklidirler. Bölgenin alanını bu integralin değeri olarak alırız. Yani,

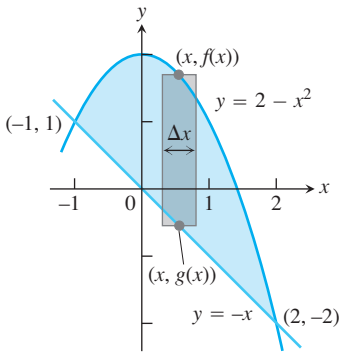
$$A = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

TANIM Eğriler Arasındaki Alanlar

f ve g , $[a, b]$ aralığı boyunca $f(x) \geq g(x)$ olmak üzere, sürekli iseler **a 'dan b 'ye kadar $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ eğrileri arasındaki bölgenin alanı $(f - g)$ 'nin a 'dan b 'ye kadar integralidir:**

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Bu tanımlı uygulamak eğrilerin grafiklerini çizmek faydalıdır. Grafik, hangi eğrinin üstteki f eğrisi ve hangi eğrinin alttaki g eğrisi olduğunu gösterir. Ayrıca, integral sınırları bilinmiyorsa integral sınırlarını bulmanıza yardımcı olur. İntegrasyon sınırlarını belirlemek için eğrilerin nerede kesiştiklerini bulmak isteyebilirsiniz ve bu, $f(x) = g(x)$ denkleminin çözümünü gerektirebilir. Daha sonra, kesişimleri arasındaki alanı bulmak için $f - g$ fonksiyonunu integre edebilirsiniz.



ŞEKİL 5.30 Tipik bir yaklaşım dikdörtgeni ile Örnek 4'deki bölge.

ÖRNEK 4 Kesişen Eğriler Arasındaki Alan

$y = 2 - x^2$ parabolü ve $y = -x$ doğrusuyla sınırlanan bölgenin alanını bulun.

Çözüm Önce iki eğriyi çizeriz (Şekil 5.30). İntegrasyon sınırları $y = 2 - x^2$ ve $y = -x$ denklemlerini birlikte çözerek bulunur:

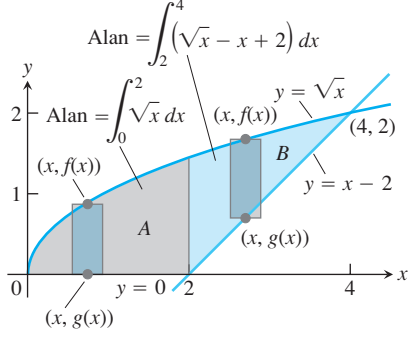
$$\begin{aligned} 2 - x^2 &= -x && f(x) \text{ ve } g(x) \text{'i eşitleyin.} \\ x^2 - x - 2 &= 0 && \text{Yeniden yazın.} \\ (x + 1)(x - 2) &= 0 && \text{Çarpanlarına ayırın.} \\ x = -1, \quad x = 2. &&& \text{Çözün.} \end{aligned}$$

Bölge $x = -1$ 'den $x = 2$ 'ye kadardır. İntegrasyon sınırları $a = -1$ ve $b = 2$ 'dir. Eğriler arasındaki alan

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_{-1}^2 [(2 - x^2) - (-x)] dx \\ &= \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 \end{aligned}$$

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Richard Dedekind
(1831–1916)



ŞEKİL 5.31 Çevreleyen bir eğrinin formülü değiştiğinde, burada Örnek 5 için gösterildiği gibi alan integrali de buna uyacak şekilde integrallerin toplamı olarak değişir. Her renkli bölge için bir integral.

$$= \left(4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

Çevreleyen bir eğrinin formülü bir veya daha fazla noktada değişiyorsa, bölgeyi formül değişikliklerine karşılık gelen alt bölgelere böler ve her alt bölgeye eğriler arasındaki alan formülünü uygularız.

ÖRNEK 5 Sınır Değişikliğine Uydurmak İçin İntegrali Değiştirmek

Birinci dörtte bir bölgede, üstten $y = \sqrt{x}$, alttan ise x -ekseni ve $y = x - 2$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin alanını bulun.

Çözüm Çizim (Şekil 5.31) bölgenin üst sınırının $f(x) = \sqrt{x}$ 'in grafiği olduğunu göstermektedir. Alt sınır, $0 \leq x \leq 2$ için $g(x) = 0$ 'dan $2 \leq x \leq 4$ için $g(x) = x - 2$ 'e değişmektedir ($x = 2$ 'de bir uyuşma vardır). Bölgeyi $x = 2$ 'de, Şekil 5.31'de gösterilen A ve B alt bölgelerine böleriz.

A bölgesi için integrasyon sınırları $a = 0$ ve $b = 2$ 'dir. B bölgesi için sol sınır $a = 2$ 'dir. Sağ taraftaki sınırı bulmak için $y = \sqrt{x}$ ve $y = x - 2$ denklemlerini birlikte çözeriz:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= x - 2 && f(x) \text{ ve } g(x) \text{ eşitleyin.} \\ x &= (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 && \text{İki tarafın karesini alın.} \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 && \text{Yeniden yazın.} \\ (x - 1)(x - 4) &= 0 && \text{Çarpanlara ayırın.} \\ x &= 1, \quad x = 4 && \text{Çözün.} \end{aligned}$$

Sadece $x = 4$ değeri $\sqrt{x} = x - 2$ denklemini sağlar. $x = 1$ değeri ise kare almayla ortaya çıkan konu dışı bir köktür. Sağdan sınır 4'tür.

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 2 \text{ için} \quad & f(x) - g(x) = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x} \\ 2 \leq x \leq 4 \text{ için} \quad & f(x) - g(x) = \sqrt{x} - (x - 2) = \sqrt{x} - x + 2 \end{aligned}$$

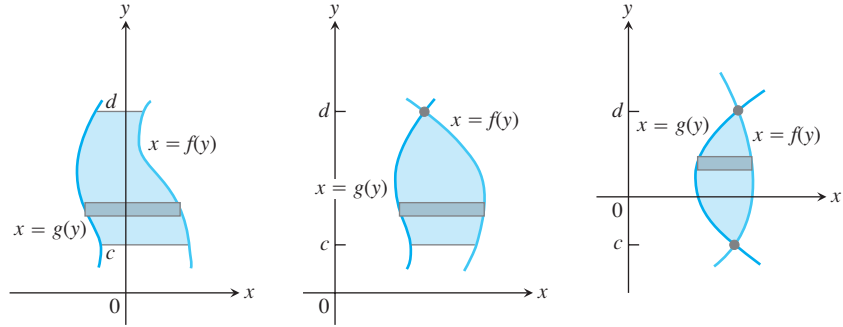
A ve B alt bölgelerinin alanlarını toplayarak toplam alanı buluruz:

$$\begin{aligned} \text{Toplam alan} &= \underbrace{\int_0^2 \sqrt{x} \, dx}_{A\text{'nin alanı}} + \underbrace{\int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2) \, dx}_{B\text{'nin alanı}} \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^2 + \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_2^4 \\ &= \frac{2}{3} (2)^{3/2} - 0 + \left(\frac{2}{3} (4)^{3/2} - 8 + 8 \right) - \left(\frac{2}{3} (2)^{3/2} - 2 + 4 \right) \\ &= \frac{2}{3} (8) - 2 = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

 y 'ye Göre İntegrasyon

Bir bölgenin sınır eğrileri y 'nin fonksiyonlarıyla tanımlanmışsa, yaklaşım dikdörtgenleri dikey yerine yatay olur ve temel formülde x yerine y bulunur.

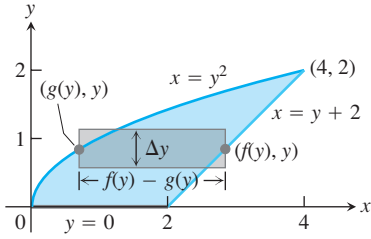
Bunlar gibi bölgeler için



aşağıdaki formülü kullanın:

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy$$

Bu denklemde, f her zaman sağdaki eğriyi ve g de soldaki eğriyi temsil eder, dolayısıyla $f(y) - g(y)$ negatif değildir.



ŞEKİL 5.32 x 'e göre integre edersek, bu bölgenin alanını bulmak için iki integrasyon gerekir. y 'ye göre integre edersek, bir integrasyon yeterlidir (Örnek 6).

ÖRNEK 6 Örnek 5'teki bölgenin alanını y 'ye göre integre ederek bulun.

Çözüm Bölgeyi ve tabanı y değerleri aralığının bir bölümünün üzerinde bulunan tipik bir yatay dikdörtgen çizeriz (Şekil 5.32). Bölgenin sağ sınırı $x = y + 2$ doğrusudur, bu yüzden $f(y) = y + 2$ olur. Sol sınır ise $x = y^2$ eğrisidir, dolayısıyla $g(y) = y^2$ olur. İntegrasyonun alt sınırı $y = 0$ 'dır. Üst sınırı $x = y + 2$ ve $x = y^2$ denklemlerini birlikte çözerek buluruz:

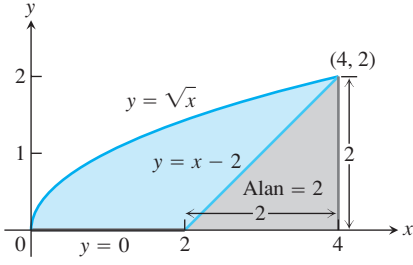
$$\begin{aligned} y + 2 &= y^2 & f(y) &= y + 2 \text{ ve} \\ y^2 - y - 2 &= 0 & g(y) &= y^2 \text{ eşitleyin} \\ (y + 1)(y - 2) &= 0 & \text{Yeniden yazın.} \\ y &= -1, \quad y = 2 & \text{Çarpanlarına ayırın.} \\ & & \text{Çözün.} \end{aligned}$$

Üst integrasyon limiti $b = 2$ 'dir ($y = -1$ değeri x -ekseninin altında bir kesişim noktası verir).

Bölgenin alanı

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(y) - g(y)] dy = \int_0^2 [y + 2 - y^2] dy \\ &= \int_0^2 [2 + y - y^2] dy \\ &= \left[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 \\ &= 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

dir. Daha az çabayla, Örnek 5'teki sonucu bulduk. ■



ŞEKİL 5.33 Mavi bölgenin alanı $y = \sqrt{x}$ parabolünün altındaki alan eksi üçgenin alanıdır (Örnek 7).

İntegralleri Geometri Formülleriyle Birleştirmek

Bir alanı bulmanın en kısa yolu analizle geometriyi birleştirmek olabilir.

ÖRNEK 7 Örnek 5'teki Bölgenin Alanının En Hızlı Şekilde Bulunması

Örnek 5'teki bölgenin alanını bulun.

Çözüm İstedğimiz alan, $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, eğrisi ile x -ekseni arasındaki alan eksi tabanı 2 ve yüksekliği 2 olan bir üçgenin alanıdır (Şekil 5.33):

$$\begin{aligned} \text{Alan} &= \int_0^4 \sqrt{x} \, dx - \frac{1}{2}(2)(2) \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^4 - 2 \\ &= \frac{2}{3}(8) - 0 - 2 = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

5-7 Örneklerinin Sonuçları Bazen iki eğri arasında kalan alan x yerine y 'ye göre integral alınarak daha kolay bulunur. Ayrıca, analizle geometriyi birleştirmek de yararlı olabilir. Bölgeyi çizdikten sonra, hangi yolun daha iyi olacağını bir düşünün.

ALİŞTIRMALAR 5.6

Belirli İntegralleri Hesaplama

1–24 alıştırmalarındaki integralleri hesaplamak için Teorem 6'daki Dönüşüm Formülünü kullanın.

1. a. $\int_0^3 \sqrt{y+1} \, dy$

b. $\int_{-1}^0 \sqrt{y+1} \, dy$

2. a. $\int_0^1 r\sqrt{1-r^2} \, dr$

b. $\int_{-1}^1 r\sqrt{1-r^2} \, dr$

3. a. $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x \, dx$

b. $\int_{-\pi/4}^0 \tan x \sec^2 x \, dx$

4. a. $\int_0^{\pi} 3 \cos^2 x \sin x \, dx$

b. $\int_{2\pi}^{3\pi} 3 \cos^2 x \sin x \, dx$

5. a. $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3 \, dt$

b. $\int_{-1}^1 t^3(1+t^4)^3 \, dt$

6. a. $\int_0^{\sqrt{7}} t(t^2+1)^{1/3} \, dt$

b. $\int_{-\sqrt{7}}^0 t(t^2+1)^{1/3} \, dt$

7. a. $\int_{-1}^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2} \, dr$

b. $\int_0^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2} \, dr$

8. a. $\int_0^1 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2} \, dv$

b. $\int_1^4 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2} \, dv$

9. a. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$

b. $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$

10. a. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}} \, dx$

b. $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}} \, dx$

11. a. $\int_0^{\pi/6} (1 - \cos 3t) \sin 3t \, dt$

b. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 - \cos 3t) \sin 3t \, dt$

12. a. $\int_{-\pi/2}^0 \left(2 + \tan \frac{t}{2}\right) \sec^2 \frac{t}{2} \, dt$

b. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2 + \tan \frac{t}{2}\right) \sec^2 \frac{t}{2} \, dt$

13. a. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3 \sin z}} \, dz$

b. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3 \sin z}} \, dz$

14. a. $\int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin w}{(3+2 \cos w)^2} \, dw$

b. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin w}{(3+2 \cos w)^2} \, dw$

15. $\int_0^1 \sqrt{t^5+2t} (5t^4+2) \, dt$

16. $\int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^2}$

17. $\int_0^{\pi/6} \cos^{-3} 2\theta \sin 2\theta \, d\theta$

18. $\int_{\pi}^{3\pi/2} \cot^5 \left(\frac{\theta}{6}\right) \sec^2 \left(\frac{\theta}{6}\right) \, d\theta$

19. $\int_0^{\pi} 5(5-4 \cos t)^{1/4} \sin t \, dt$

20. $\int_0^{\pi/4} (1 - \sin 2t)^{3/2} \cos 2t \, dt$

21. $\int_0^1 (4y - y^2 + 4y^3 + 1)^{-2/3} (12y^2 - 2y + 4) \, dy$

22. $\int_0^1 (y^3 + 6y^2 - 12y + 9)^{-1/2} (y^2 + 4y - 4) \, dy$

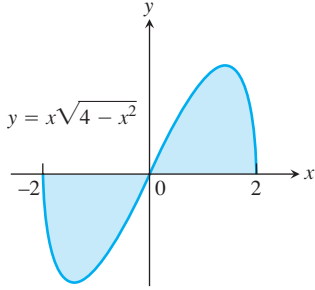
23. $\int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{\theta} \cos^2(\theta^{3/2}) d\theta$

24. $\int_{-1}^{-1/2} t^{-2} \sin^2\left(1 + \frac{1}{t}\right) dt$

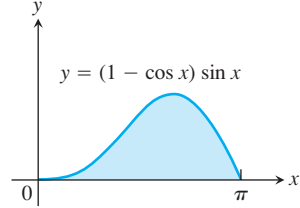
Alan

25–40 alıştırmalarında renkli bölgelerin toplam alanını bulun.

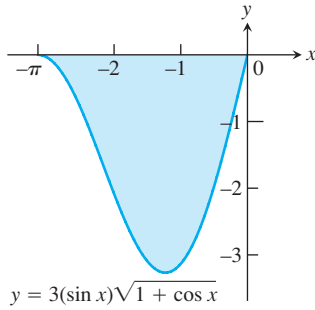
25.



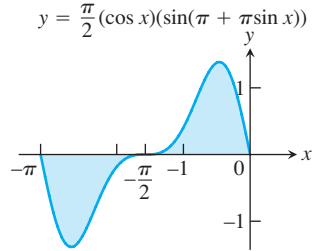
26.



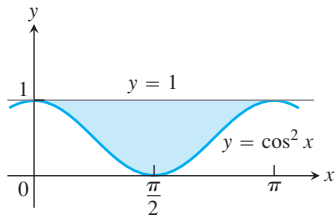
27.



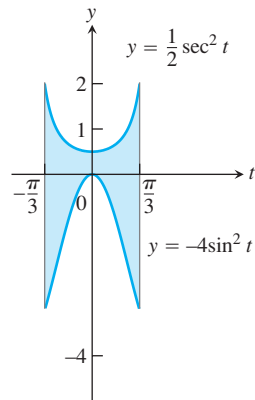
28.



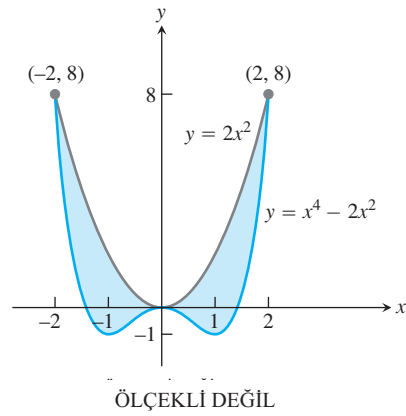
29.



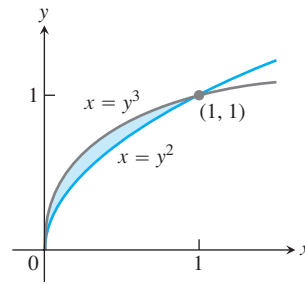
30.



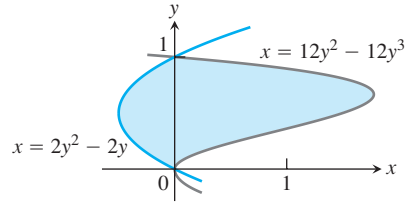
31.



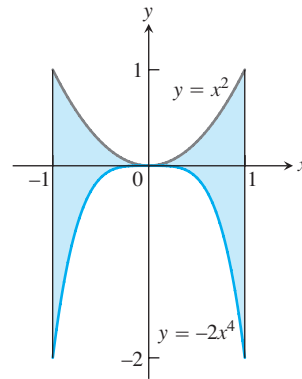
32.



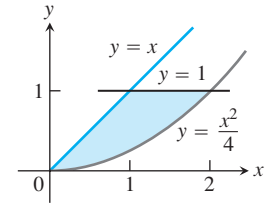
33.

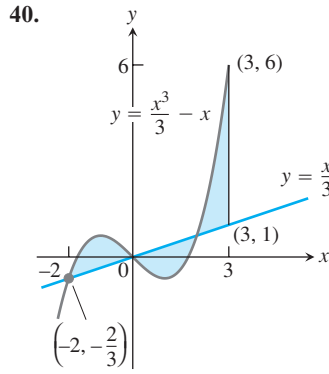
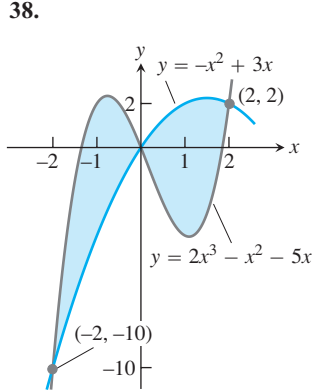
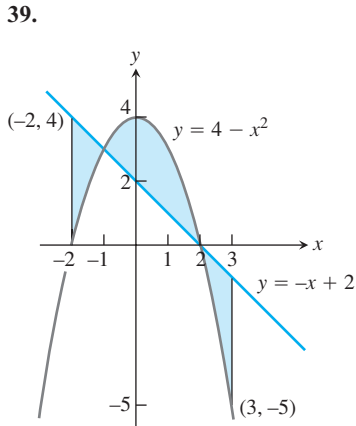
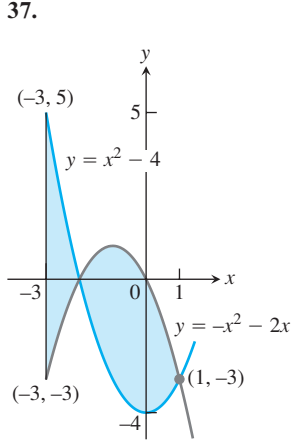
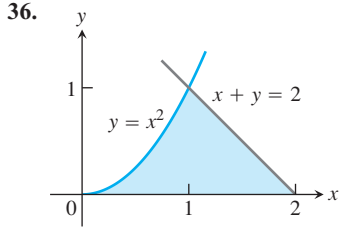


34.



35.





41–50 alıştırmalarında doğrular ve eğrilerle sınırlı bölgelerin alanlarını bulun.

41. $y = x^2 - 2$ ve $y = 2$

42. $y = 2x - x^2$ ve $y = -3$

43. $y = x^4$ ve $y = 8x$

44. $y = x^2 - 2x$ ve $y = x$

45. $y = x^2$ ve $y = -x^2 - 4x$

46. $y = 7 - 2x^2$ ve $y = x^2 + 4$

47. $y = x^4 - 4x^2 + 4$ ve $y = x^2$

48. $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$, ve $y = 0$

49. $y = \sqrt{|x|}$ ve $5y = x + 6$ (Kaç tane kesişim noktası vardır?)

50. $y = |x^2 - 4|$ ve $y = (x^2/2) + 4$

51–58 alıştırmalarında doğrular ve eğrilerle sınırlı bölgelerin alanlarını bulun.

51. $x = 2y^2$, $x = 0$, ve $y = 3$

52. $x = y^2$ ve $x = y + 2$

53. $y^2 - 4x = 4$ ve $4x - y = 16$

54. $x - y^2 = 0$ ve $x + 2y^2 = 3$

55. $x + y^2 = 0$ ve $x + 3y^2 = 2$

56. $x - y^{2/3} = 0$ ve $x + y^4 = 2$

57. $x = y^2 - 1$ ve $x = |y|\sqrt{1 - y^2}$

58. $x = y^3 - y^2$ ve $x = 2y$

59–62 alıştırmalarında eğrilerle çevrili bölgelerin alanlarını bulun.

59. $4x^2 + y = 4$ ve $x^4 - y = 1$

60. $x^3 - y = 0$ ve $3x^2 - y = 4$

61. $x + 4y^2 = 4$ ve $x + y^4 = 1$, $x \geq 0$ için

62. $x + y^2 = 3$ ve $4x + y^2 = 0$

63–70 alıştırmalarında doğrular ve eğrilerle sınırlı bölgelerin alanlarını bulun.

63. $y = 2 \sin x$ ve $y = \sin 2x$, $0 \leq x \leq \pi$

64. $y = 8 \cos x$ ve $y = \sec^2 x$, $-\pi/3 \leq x \leq \pi/3$

65. $y = \cos(\pi x/2)$ ve $y = 1 - x^2$

66. $y = \sin(\pi x/2)$ ve $y = x$

67. $y = \sec^2 x$, $y = \tan^2 x$, $x = -\pi/4$, ve $x = \pi/4$

68. $x = \tan^2 y$ ve $x = -\tan^2 y$, $-\pi/4 \leq y \leq \pi/4$

69. $x = 3 \sin y \sqrt{\cos y}$ ve $x = 0$, $0 \leq y \leq \pi/2$

70. $y = \sec^2(\pi x/3)$ ve $y = x^{1/3}$, $-1 \leq x \leq 1$

71. $x - y^3 = 0$ eğrisi ve $x - y = 0$ doğrusu ile çevrelenen pervane şeklindeki bölgenin alanını bulun.

72. $x - y^{1/3} = 0$ ve $x - y^{1/5} = 0$ eğrileri ile çevrelenen pervane şeklindeki bölgenin alanını bulun.

73. Birinci dördte bir bölgede $y = x$ doğrusu, $x = 2$ doğrusu, $y = 1/x^2$ eğrisi ve x -ekseniyle sınırlı alanını bulun.

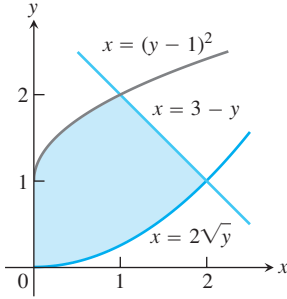
74. Birinci dördte bir bölgede soldan y -ekseni ile sağdan $y = \sin x$ ve $y = \cos x$ eğrileriyle sınırlanan “üçgensel” bölgenin alanını bulun.

75. Alttan $y = x^2$ parabolü ve üstten $y = 4$ doğrusu ile sınırlanan bölge $y = c$ doğrusu ile kesilerek eşit alanlı iki bölgeye ayrılmak isteniyor.

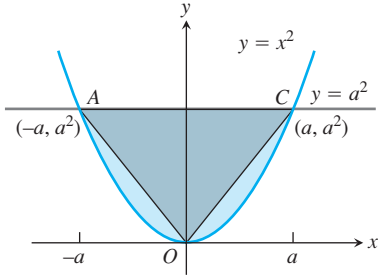
- a. Bölgeyi çizin ve uygun gibi görünen bir $y = c$ doğrusu ekleyin. c cinsinden, parabolle doğru nerde kesişirler? Bu noktaları da şeklinize ekleyin.

- b. y 'ye göre integral olarak c 'yi bulun. (Bu c 'yi integrasyon sınırlarına koyar.)
 c. x 'e göre integral olarak c 'yi bulun. (Bu c 'yi integranda da koyar.)

76. $y = 3 - x^2$ eğrisi ile $y = -1$ doğrusu arasındaki bölgenin alanını **a.** x 'e, **b.** y 'ye göre integrale ederek bulun.
77. Birinci dörtte bir bölgede soldan y -ekseni, alttan $y = x/4$, doğrusu, üstte soldan $y = 1 + \sqrt{x}$, eğrisi ve üstte sağdan $y = 2/\sqrt{x}$ eğrisiyle sınırlanan bölgenin alanını bulun.
78. Birinci dörtte bir bölgede soldan y -ekseni, alttan $x = 2\sqrt{y}$, üstte soldan $x = (y - 1)^2$ eğrisi ve üstte sağdan $x = 3 - y$ doğrusuyla sınırlanan bölgenin alanını bulun.

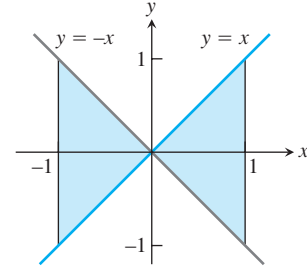


79. Aşağıdaki şekil $y = x^2$ parabolünden $y = a^2$ doğrusu ile kesilen parçanın içine oturtulan AOC üçgenini göstermektedir. a sıfıra yaklaşırken üçgenin alanının parabolik bölgenin alanına oranının limitini bulun.



80. Pozitif sürekli bir f fonksiyonunun grafiği ile x -ekseni arasında $x = a$ 'dan $x = b$ 'ye kadar kalan bölgenin 4 birim kare olduğunu varsayın. $x = a$ 'dan $x = b$ 'ye kadar $y = f(x)$ ve $y = 2f(x)$ eğrileri arasında olan bölgenin alanını bulun.
81. Aşağıdaki integrallerden hangisi, eğer varsa, aşağıda verilen renkli bölgenin alanını hesaplar? Yanıtınızı açıklayın.

- a. $\int_{-1}^1 (x - (-x)) dx = \int_{-1}^1 2x dx$
 b. $\int_{-1}^1 (-x - (x)) dx = \int_{-1}^1 -2x dx$



82. $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ sürekli fonksiyonlarının grafikleri ile $x = a$ ve $x = b$ dikey doğruları ($a < b$) arasındaki bölgenin alanı

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

ile verilir. Doğru, bazen doğru ya da asla doğru değil? Yanıtınızı açıklayın.

Teori ve Örnekler

83. $f(x) = (\sin x)/x$, $x > 0$ fonksiyonunun bir ters türevinin $F(x)$ olduğunu varsayın.

$$\int_1^3 \frac{\sin 2x}{x} dx$$

integralini F cinsinden ifade edin.

84. f sürekli ise,

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(1-x) dx.$$

olduğunu gösterin.

- 85.

$$\int_0^1 f(x) dx = 3.$$

olduğunu varsayın. **a.** f tek ve **b.** f çift ise

$$\int_{-1}^0 f(x) dx$$

integralini bulun.

86. **a.** f fonksiyonu $[-a, a]$ üzerinde tek ise

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

olduğunu gösterin.

b. (a)'daki sonucu $f(x) = \sin x$ ve $a = \pi/2$ ile test edin.

87. f sürekli bir fonksiyonsa, $u = a - x$ dönüşümünü yaparak ve ortaya çıkan integrali I 'ya ekleyerek

$$I = \int_0^a \frac{f(x) dx}{f(x) + f(a-x)}$$

integralini hesaplayın.

88. Bir dönüşüm kullanarak, tüm pozitif x ve y sayıları için,

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t} dt = \int_1^y \frac{1}{t} dt.$$

olduğunu gösterin.

Belirli İntegrallerin Kayma Özelliği

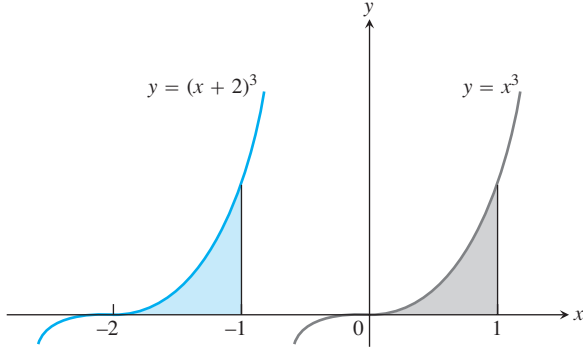
Belirli integrallerin temel bir özelliği

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c) dx. \quad (1)$$

denkleminin de gösterdiği gibi öteleme altında değişmezlikleridir. Denklem, f integre edilebilir ve gerekli x değerlerinde tanımlı olduğu sürece geçerlidir. Örneğin aşağıdaki şekil

$$\int_{-2}^{-1} (x+2)^3 dx = \int_0^1 x^3 dx$$

olduğunu göstermektedir. Renkli bölgelerin alanları aynıdır.



89. Bir dönüşüm kullanarak (1) denklemini doğrulayın.

90. Aşağıdaki fonksiyonların her biri için, $f(x)$ 'in $[a, b]$ 'de ve $f(x+c)$ 'nin $[a-c, b-c]$ 'de grafiklerini çizerek (1) Denkleminin mantıklı olduğuna kendinizi ikna edin.

- $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$
- $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$, $c = \pi/2$
- $f(x) = \sqrt{x-4}$, $a = 4$, $b = 8$, $c = 5$

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

91–94 alıştırmalarında, düzlemde kesişim noktalarını basit cebirle bulamadığınız eğrilerin arasındaki alanı bulacaksınız. Aşağıdaki adımları gerçekleştirmek için bir BCS kullanın.

- Neye benzediklerini ve kaç tane kesişim noktaları olduğunu görmek için eğrileri birlikte çizin.
- Bütün kesişim noktalarını bulmak için BCS'nizdeki sayısal denklem çözücüyü kullanın.
- $|f(x) - g(x)|$ 'i birbirini izleyen kesişim değeri çiftleri üzerinden integre edin.
- (c) şıkında bulduğunuz integralleri toplayın.

91. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$, $g(x) = x - 1$

92. $f(x) = \frac{x^4}{2} - 3x^3 + 10$, $g(x) = 8 - 12x$

93. $f(x) = x + \sin(2x)$, $g(x) = x^3$

94. $f(x) = x^2 \cos x$, $g(x) = x^3 - x$

Bölüm 5

Tekrar Soruları

- Alınan yol, alan, hacim ve ortalama değer gibi büyüklükleri bazen sonlu toplamlarla nasıl tahmin edebilirsiniz? Neden böyle bir şey yapmak isteyesiniz?
- Sigma gösterimi nedir? Ne gibi avantajlar sağlar? Örnek verin.
- Bir Riemann toplamı nedir? Neden böyle bir toplamı ele almak isteyesiniz?
- Kapalı bir aralığın bölünüşünün normu nedir?
- Kapalı bir $[a, b]$ aralığında bir f fonksiyonunun belirli integrali nedir? Var olduğundan ne zaman emin olabilirsiniz?
- Belirli integraller ile alan arasındaki ilişki nedir? Belirli integralerin başka bazı yorumlarını tanımlayın.
- Kapalı bir aralıkta integre edilebilen bir fonksiyonun ortalama değeri nedir? Fonksiyonun ortalama değerini alması gerekir mi? Açıklayın.

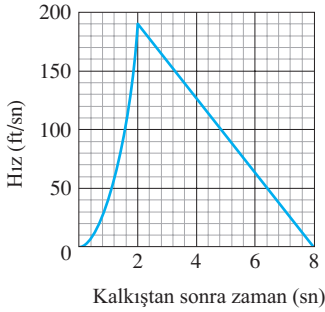
- Belirli integrallerle çalışma kurallarını tanımlayın (Tablo 5.3) Örnekler verin.
- Analizin Temel Teoremi nedir? Niye bu kadar önemlidir? Teoremin her kısmını bir örnekle açıklayın.
- f sürekliyse, Temel Teorem $dy/dx = f(x)$, $y(x_0) = y_0$ başlangıç değeri problemine nasıl bir çözüm sağlar?
- Değişken dönüşümü ile integrasyon Zincir Kuralına nasıl bağlıdır?
- Bazen belirsiz integralleri değişken dönüşümüyle nasıl çözersiniz? Örnekler verin.
- Değişken dönüşümü yöntemi belirli integraller için nasıl çalışır? Örnekler verin.
- İki sürekli fonksiyonun grafikleri arasındaki alanı nasıl tanımlarsınız ve hesaplarsınız? Bir örnek verin.

Bölüm 5

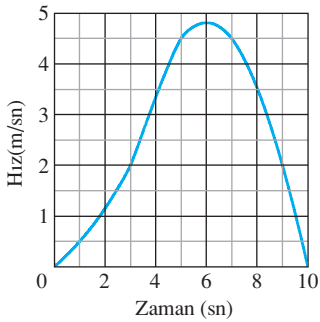
Problemler

Sonlu Toplamlar ve Tahminler

1. Aşağıdaki şekil bir model roketin kalkıştan sonra ilk 8 saniyedeki hız (ft/sn) grafiğini vermektedir. Roket ilk 2 saniyede yukarı doğru ivmelenmiş ve $t = 8$ sn anında maksimum yüksekliğine erişmiştir.



- a. Roketin yer seviyesinden fırlatıldığını varsayılırsa, ne kadar yükseğe çıkmıştır? (Bu, Bölüm 3.3, Alıştırma 17'deki roketir, fakat buradaki alıştırma yapmayı yapmak için Alıştırma 17'yi yapmaya gerek yoktur.)
- b. $0 \leq t \leq 8$ için, roketin yerden yüksekliğinin grafiğini zamanın bir fonksiyonu olarak çizin.
2. a. Aşağıdaki grafikte s -ekseninde ilerleyen bir cismin $t = 0$ 'dan $t = 10$ sn'ye kadar olan aralıkta hızı (m/sn) gösterilmektedir. Bu 10 saniye boyunca cisim ne kadar yol almıştır?
- b. $0 \leq t \leq 10$ aralığında $s(0) = 0$ olduğunu varsayarak, s 'nin grafiğini t 'nin bir fonksiyonu olarak çizin.



3. $\sum_{k=1}^{10} a_k = -2$ ve $\sum_{k=1}^{10} b_k = 25$ ise aşağıdakileri bulun.

a. $\sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{4}$ b. $\sum_{k=1}^{10} (b_k - 3a_k)$

c. $\sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k - 1)$ d. $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{5}{2} - b_k \right)$

4. $\sum_{k=1}^{20} a_k = 0$ ve $\sum_{k=1}^{20} b_k = 7$ ise aşağıdakileri bulun.

a. $\sum_{k=1}^{20} 3a_k$ b. $\sum_{k=1}^{20} (a_k + b_k)$

c. $\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{2} - \frac{2b_k}{7} \right)$ d. $\sum_{k=1}^{20} (a_k - 2)$

Belirli İntegraller

5–8 problemlerindeki her limiti belirli bir integral olarak ifade edin. Sonra limitin değerini bulmak için integrali hesaplayın. Her durumda, P verilen aralığın bir bölünüşüdür ve c_k sayıları P 'nin alt aralıklarından seçilmişlerdir.

5. $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (2c_k - 1)^{-1/2} \Delta x_k$, $P [1, 5]$ 'in bir bölünüşü
6. $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n c_k (c_k^2 - 1)^{1/3} \Delta x_k$, $P [1, 3]$ 'in bir bölünüşü
7. $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \left(\cos \left(\frac{c_k}{2} \right) \right) \Delta x_k$, $P [-\pi, 0]$ 'in bir bölünüşü
8. $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\sin c_k)(\cos c_k) \Delta x_k$, $P [0, \pi/2]$ 'nin bir bölünüşü
9. $\int_{-2}^2 3f(x) dx = 12$, $\int_{-2}^5 f(x) dx = 6$, ve $\int_{-2}^5 g(x) dx = 2$, ise, aşağıdakileri bulun.
- a. $\int_{-2}^2 f(x) dx$ b. $\int_2^5 f(x) dx$
- c. $\int_5^{-2} g(x) dx$ d. $\int_{-2}^5 (-\pi g(x)) dx$
- e. $\int_{-2}^5 \left(\frac{f(x) + g(x)}{5} \right) dx$
10. If $\int_0^2 f(x) dx = \pi$, $\int_0^2 7g(x) dx = 7$, ve $\int_0^1 g(x) dx = 2$ ise, aşağıdakilerin değerlerini bulun.

a. $\int_0^2 g(x) dx$ b. $\int_1^2 g(x) dx$

c. $\int_2^0 f(x) dx$ d. $\int_0^2 \sqrt{2} f(x) dx$

e. $\int_0^2 (g(x) - 3f(x)) dx$

Alan

11–14 problemlerinde, f 'nin grafiği ile x -ekseni arasında kalan bölgenin toplam alanını bulun.

11. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $0 \leq x \leq 3$

12. $f(x) = 1 - (x^2/4), \quad -2 \leq x \leq 3$

13. $f(x) = 5 - 5x^{2/3}, \quad -1 \leq x \leq 8$

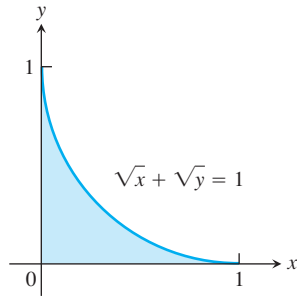
14. $f(x) = 1 - \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 4$

15–26 problemlerindeki eğriler ve doğrularla çevrelenen bölgelerin alanlarını bulun.

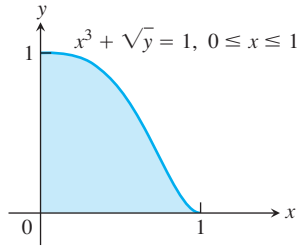
15. $y = x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$

16. $y = x, \quad y = 1/\sqrt{x}, \quad x = 2$

17. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0$



18. $x^3 + \sqrt{y} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq 10$ için



19. $x = 2y^2, \quad x = 0, \quad y = 3$

20. $x = 4 - y^2, \quad x = 0$

21. $y^2 = 4x, \quad y = 4x - 2$

22. $y^2 = 4x + 4, \quad y = 4x - 16$

23. $y = \sin x, \quad y = x, \quad 0 \leq x \leq \pi/4$

24. $y = |\sin x|, \quad y = 1, \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

25. $y = 2 \sin x, \quad y = \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

26. $y = 8 \cos x, \quad y = \sec^2 x, \quad -\pi/3 \leq x \leq \pi/3$

27. Soldan $x + y = 2$, sağdan $y = x^2$ ve üstten $y = 2$ ile çevrelenen “üçgen” bölgenin alanını bulun.

28. Soldan $y = \sqrt{x}$ sağdan $y = 6 - x$ ve alttan $y = 1$ ile çevrelenen “üçgen” bölgenin alanını bulun.

29. $f(x) = x^3 - 3x^2$ 'nin ekstremum değerlerini bulun ve f 'nin grafiği ile x -ekseni arasında kalan bölgenin alanının bulun.

30. Birinci dörtte bir bölgeden $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ eğrisiyle kesilen bölgenin alanını bulun.

31. $x = y^{2/3}$ eğrisi ile $x = y$ ve $y = -1$ doğruları arasında kalan bölgenin toplam alanını bulun.

32. $0 \leq x \leq 3\pi/2$ aralığında $y = \sin x$ ve $y = \cos x$ eğrileri arasında kalan bölgenin toplam alanını bulun.

Başlangıç Değer Problemleri

33. $y = x^2 + \int_1^x \frac{1}{t} dt$ 'nin

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 - \frac{1}{x^2}; \quad y'(1) = 3, \quad y(1) = 1$$

başlangıç değer problemini çözdüğünü gösterin.

34. $y = \int_0^x (1 + 2\sqrt{\sec t}) dt$ 'nin

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{\sec x} \tan x; \quad y'(0) = 3, \quad y(0) = 0.$$

başlangıç değer problemini çözdüğünü gösterin.

35 ve 36 problemlerindeki başlangıç değer problemlerinin çözümlerini integral olarak ifade edin.

35. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{x}, \quad y(5) = -3$

36. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2 - \sin^2 x}, \quad y(-1) = 2$

Belirsiz İntegralleri Hesaplama

37–44 problemlerindeki integralleri hesaplayın.

37. $\int 2(\cos x)^{-1/2} \sin x \, dx$

38. $\int (\tan x)^{-3/2} \sec^2 x \, dx$

39. $\int (2\theta + 1 + 2 \cos(2\theta + 1)) \, d\theta$

40. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{2\theta - \pi}} + 2 \sec^2(2\theta - \pi) \right) d\theta$

41. $\int \left(t - \frac{2}{t} \right) \left(t + \frac{2}{t} \right) dt$

42. $\int \frac{(t+1)^2 - 1}{t^4} dt$

43. $\int \sqrt{t} \sin(2t^{3/2}) \, dt$

44. $\int \sec \theta \tan \theta \sqrt{1 + \sec \theta} \, d\theta$

Belirli İntegralleri Hesaplama

45–70 problemlerindeki integralleri hesaplayın.

45. $\int_{-1}^1 (3x^2 - 4x + 7) \, dx$

46. $\int_0^1 (8s^3 - 12s^2 + 5) \, ds$

47. $\int_1^2 \frac{4}{v^2} \, dv$

48. $\int_1^{27} x^{-4/3} \, dx$

49. $\int_1^4 \frac{dt}{t\sqrt{t}}$

50. $\int_1^4 \frac{(1 + \sqrt{u})^{1/2}}{\sqrt{u}} \, du$

51. $\int_0^1 \frac{36 \, dx}{(2x + 1)^3}$

52. $\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt[3]{(7 - 5r)^2}}$

53. $\int_{1/8}^1 x^{-1/3} (1 - x^{2/3})^{3/2} \, dx$

54. $\int_0^{1/2} x^3 (1 + 9x^4)^{-3/2} \, dx$

55. $\int_0^\pi \sin^2 5r \, dr$

56. $\int_0^{\pi/4} \cos^2 \left(4t - \frac{\pi}{4} \right) dt$

57. $\int_0^{\pi/3} \sec^2 \theta \, d\theta$ 58. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc^2 x \, dx$
59. $\int_{\pi}^{3\pi} \cot^2 \frac{x}{6} \, dx$ 60. $\int_0^{\pi} \tan^2 \frac{\theta}{3} \, d\theta$
61. $\int_{-\pi/3}^0 \sec x \tan x \, dx$ 62. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc z \cot z \, dz$
63. $\int_0^{\pi/2} 5(\sin x)^{3/2} \cos x \, dx$ 64. $\int_{-1}^1 2x \sin(1 - x^2) \, dx$
65. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 15 \sin^4 3x \cos 3x \, dx$ 66. $\int_0^{2\pi/3} \cos^{-4} \left(\frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{x}{2} \right) \, dx$
67. $\int_0^{\pi/2} \frac{3 \sin x \cos x}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 x}} \, dx$ 68. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x}{(1 + 7 \tan x)^{2/3}} \, dx$
69. $\int_0^{\pi/3} \frac{\tan \theta}{\sqrt{2} \sec \theta} \, d\theta$ 70. $\int_{\pi^2/36}^{\pi^2/4} \frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t} \sin \sqrt{t}} \, dt$

Ortalama Değerler

71. $f(x) = mx + b$ 'nin ortalama değerini verilen aralıkta bulun.
- a. $[-1, 1]$
b. $[-k, k]$
72. Verilen aralıkta fonksiyonların ortalama değerini bulun.
- a. $[0, 3]$ aralığında $y = \sqrt{3x}$
b. $[0, a]$ aralığında $y = \sqrt{ax}$
73. f $[a, b]$ aralığında türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bölüm 2'de f 'nin $[a, b]$ 'deki ortalama değişim oranını

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ve f 'nin x 'teki anlık değişim oranını ise $f'(x)$ olarak tanımlamıştık. Bu bölümde ise bir fonksiyonun ortalama değerini tanımladık. Yeni ortalama tanımının eskisiyle tutarlı olması için,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f' \text{ 'nün } [a, b] \text{ 'deki ortalama değeri}$$

olması gerekir. Bu doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.

74. İntegre edilebilir bir fonksiyonun 2 uzunluğunda bir aralıktaki ortalama değerinin fonksiyonun o aralıktaki integralinin yarısı olduğu doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.

- T** 75. 365 günlük bir yıl için

$$f(x) = 37 \sin \left(\frac{2\pi}{365} (x - 101) \right) + 25$$

sıcaklık fonksiyonunun ortalama değerini hesaplayın. Bu Fairbanks, Alaska'daki yıllık ortalama hava sıcaklığını bulmanın bir yoludur. Ulusal Hava Servisi'nin resmi rakamı, günlük normal ortalama hava sıcaklıklarının sayısal ortalaması, $f(x)$ 'in ortalama değerinden biraz daha yüksek olan 25.7°F 'dir. Şekil 3.33 nedenini göstermektedir.

- T** 76. Bir gazın özgül ısısı $\text{cal}/^\circ\text{mol}$ (kalori bölü derece gram molekül) birimiyle ölçülen özgül ısı C_v , verilen bir miktar sabit

hacimli gazın sıcaklığını 1°C arttırmak için gerekli ısı miktarıdır. Oksijenin özgül ısısı T 'ye bağlıdır ve

$$C_v = 8.27 + 10^{-5} (26T - 1.87T^2).$$

formülünü sağlar. $20^\circ \leq T \leq 675^\circ\text{C}$ için C_v 'nin ortalama değerini ve bu değerin hangi sıcaklıkta alındığını bulun.

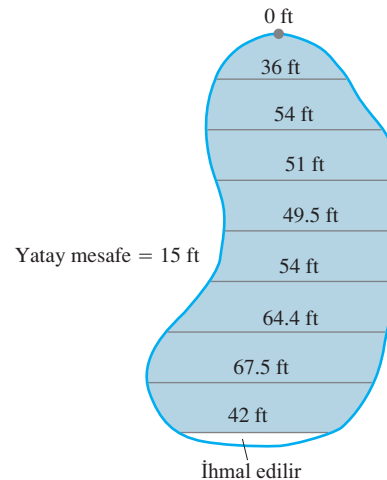
İntegralleri Türetmek

77–80 alıştırmalarında dy/dx 'i bulun.

77. $y = \int_2^x \sqrt{2 + \cos^3 t} \, dt$ 78. $y = \int_2^{7x^2} \sqrt{2 + \cos^3 t} \, dt$
79. $y = \int_x^1 \frac{6}{3 + t^4} \, dt$ 80. $y = \int_{\sec x}^2 \frac{1}{t^2 + 1} \, dt$

Teori ve Örnekler

81. $[a, b]$ aralığında türevlenebilen her $y = f(x)$ fonksiyonunun kendisinin $[a, b]$ 'de bir fonksiyonun türevi olduğu doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.
82. $F(x)$ 'in $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$ fonksiyonunun bir ters türevi olduğunu varsayın. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4} \, dx$ integralini F cinsinden ifade edin ve yanıtınızı açıklayın.
83. $y = \int_x^1 \sqrt{1 + t^2} \, dt$ ise dy/dx 'i bulun. Hesaplarınızda ana adımları açıklayın.
84. $y = \int_{\cos x}^0 (1/(1 - t^2)) \, dt$ ise dy/dx 'i bulun. Hesaplarınızda ana adımları açıklayın.
85. **Yeni bir park yeri** Park yeri ihtiyacını karşılamak için, kasabanız burada görülen alanı ayırmıştır. Kasaba mühendisi olarak, kasaba konseyi sizden park yerinin $11.000\$$ 'a yapılabileceğini bulmanızı istemektedir. Alanı temizlemenin masrafı ft^2 başına $0.10\$$ 'dır ve park yerinin inşaatı ft^2 başına $2.00\$$ tutacaktır. İşin tamamı $11.000\$$ 'a yapılabilir mi?



86. A ve B paraşütçüleri 6400 ft yükseklikte bulunan bir helikopterdedirler. A paraşütçüsü atlar ve paraşütünü açmadan önce 4 sn düşer. Helikopter bu sırada 7000 ft'e çıkar ve orada kalır. A helikopterden ayrıldıktan 45 sn sonra, B atlar ve paraşütünü açmadan önce 13 s düşer. Paraşütleri açıkken, iki paraşütçü de 16 ft/sn hızla düşerler. Paraşütleri açılmadan önce paraşütçülerin serbset düştüklerini (etkin hava direnci yok) varsayın.

- A 'nın paraşütü hangi yükseklikte açılır?
- B 'nin paraşütü hangi yükseklikte açılır?
- Yere önce hangi paraşütçü iner?

Ortalama Günlük Envanter

Ekonomide ortalama değer ortalama günlük envanter gibi şeyleri incelemek için kullanılır. $I(t)$ radyo, lastik, ayakkabı veya bir firmanın t gününde elinde hangi ürün varsa onun sayısı ise (I 'ya **envanter fonksiyonu** deriz), I 'nın bir $[0, T]$ zaman aralığındaki ortalama değerine firmanın o aralıktaki ortalama günlük envanteri denir.

$$\text{Ortalama günlük envanter} = \text{ort}(I) = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt.$$

h bir birim malı bir gün tutmanın masrafıysa, $\text{ort}(I) \cdot h$ o sürede **ortalama günlük tutma masrafıdır**.

- Bir toptancı olarak, Tracey Burr Distributors her 30 günde bir 1200 paket çikolata sevkiyatı teslim almaktadır. TBD çikolataları alıcılara düzenli bir şekilde dağıtmaktadır ve bir sevkiyat geldikten t gün sonra, eldeki paketlerin envanteri $I(t) = 1200 - 40t$, $0 \leq t \leq 30$ ile verilir. 30 günlük sürede TBD'nin ortalama günlük envanteri nedir? Bir paketi bir gün tutmanın masrafı 3¢ ise, günlük ortalama tutma masrafı nedir?
- Bir kurabiye üreticisi olan Rich Wholesale Foods kurabiye kutularını her 14 günde bir olan sevkiyata kadar havalandırmalı bir depoda tutmaktadır. Rich talepte zaman zaman görülen fırlamaları karşılamak için yedekte 600 kutu bulundurmaya çalışır, dolayısıyla tipik bir 14 günlük envanter fonksiyonu $I(t) = 600 + 600t$, $0 \leq t \leq 14$ olarak verilir. Her kutunun günlük tutma masrafı 4¢'tir. Rich'in ortalama günlük envanterini ve ortalama günlük tutma masrafını bulun.
- Solon Container'a her 30 günde bir 450 silindirik plastik saçma sevk edilmektedir. Envanter fonksiyonu (günün bir fonksiyonu olarak eldeki silindirler) $I(t) = 450 - t^2/2$ 'dir. Ortalama günlük envanteri bulun. Bir silindiri tutma masrafı günde 2¢ ise, ortalama günlük tutma masrafını bulun.
- Mitchell Mailorder'a her 60 günde bir 600 kutu atlet çorabı sevk edilmektedir. Sevkiyat geldikten t gün sonra eldeki kutu sayısı $I(t) = 600 - 20\sqrt{15t}$ 'dir. Ortalama günlük envanteri bulun. Bir kutuyu tutma masrafı günde 1/2¢ ise, ortalama günlük tutma masrafını bulun.

Bölüm 5

Ek ve İleri Alıştırmalar

Teori ve Örnekler

1. a. $\int_0^1 7f(x) dx = 7$, ise $\int_0^1 f(x) dx = 1$?

b. $\int_0^1 f(x) dx = 4$ ve $f(x) \geq 0$ ise,

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)} dx = \sqrt{4} = 2 \text{ midir?}$$

Yanıtlarınızı açıklayın.

2. $\int_{-2}^2 f(x) dx = 4$, $\int_2^5 f(x) dx = 3$, $\int_{-2}^5 g(x) dx = 2$ olsun.

Aşağıdaki ifadelerden, varsa, hangileri doğrudur?

a. $\int_5^2 f(x) dx = -3$ b. $\int_{-2}^5 (f(x) + g(x)) dx = 9$

c. $-2 \leq x \leq 5$ aralığında $f(x) \leq g(x)$.

3. Başlangıç değer problemi

$$y = \frac{1}{a} \int_0^x f(t) \sin a(x-t) dt$$

fonksiyonunun

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = f(x), x=0 \text{ iken } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ ve } y = 0 = 0.$$

başlangıç değer probleminin çözdüğünü gösterin. (*İpucu:* $\sin(ax - at) = \sin ax \cos at - \cos ax \sin at$)

4. Orantılılık x ve y 'nin

$$x = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} dt.$$

denklemleri birbirine bağlı olduklarını varsayın. d^2y/dx^2 'nin y 'ye orantılı olduğunu gösterin ve orantı sabitini bulun.

5. Aşağıdaki durumlarda $f(4)$ 'ü bulun.

a. $\int_0^{x^2} f(t) dt = x \cos \pi x$ b. $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x \cos \pi x$

6. Aşağıdaki bilgilerle $f(\pi/2)$ 'yi bulun.

- f pozitif ve sürekli.
- $x = 0$ 'dan $x = a$ 'ya kadar $y = f(x)$ eğrisinin altında kalan alan şöyledir:

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} \sin a + \frac{\pi}{2} \cos a.$$

7. xy -düzleminde x -ekseni, $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$ eğrisi, $x = 1$ ve $x = b$ doğruları ile sınırlanan bölgenin alanı her $b > 1$ değerinde $\sqrt{b^2 + 1} - \sqrt{2}$ 'ye eşittir. $f(x)$ 'i bulun.

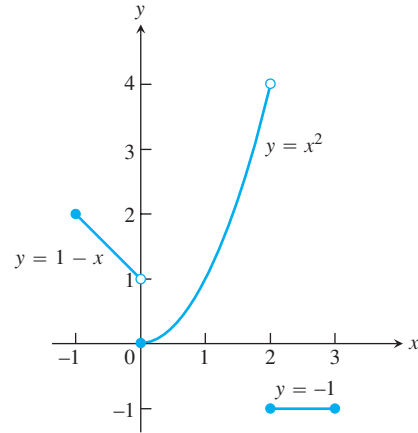
8.

$$\int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du = \int_0^x f(u)(x - u) du$$

olduğunu ispatlayın (*İpucu*: Sağ taraftaki integrali iki integralin farkı olarak ifade edin. Sonra denklemin iki tarafının da x 'e göre türevinin aynı olduğunu gösterin).

9. **Bir eğri bulmak** x 'teki türevi her zaman $3x^2 + 2$ ise, $(1, -1)$ noktasından geçen xy -düzlemindeki eğrinin denklemini bulun.

10. **Shoveling dirt** Bir çukurun dibinden yukarı 32 ft/sn ilk hızıyla bir kürek dolusu çöp atıyorsunuz. Çöpün çukurun dışına çıkabilmesi için 17 ft yukarı çıkması gerekmektedir? İlk hız bunun için yeterli midir, yoksa kafanızı saklamanızı mı gerekir?



ŞEKİL 5.34 Bunun gibi parçalı olarak sürekli fonksiyonlar parça parça integre edilir.

Parçalı Olarak Sürekli Fonksiyonlar

Esas olarak sürekli fonksiyonlarla ilgilendiğimiz halde, uygulamalar-daki fonksiyonların çoğu parçalı olarak sürekli. Bir $f(x)$ fonksiyonunun bir I kapalı aralığında sonlu sayıda süreksizliği varsa, I 'nin her iç noktasında

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \text{ ve } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

limitleri var ve sonlu ise ve I 'nin uç noktalarında uygun tek taraflı limitler var ve sonlu ise f fonksiyonu **I kapalı aralığında parçalı olarak sürekli**. Bütün parçalı olarak sürekli fonksiyonlar integre edilebilir. Süreksizlik noktaları I aralığını f 'nin sürekli olduğu açık ve yarı açık alt aralıklara böler. Yukarıdaki limit kriterleri, her alt aralığın kapanışına f 'nin sürekli olarak genişlemesini garanti eder. Parçalı olarak sürekli bir fonksiyonu integre etmek için tek tek genişlemeleri integre eder ve sonuçları toplarız.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & -1 \leq x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 2 \\ -1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

fonksiyonunun (Şekil 5.34) $[-1, 3]$ aralığındaki integrali

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 f(x) dx &= \int_{-1}^0 (1 - x) dx + \int_0^2 x^2 dx + \int_2^3 (-1) dx \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[-x \right]_2^3 \\ &= \frac{3}{2} + \frac{8}{3} - 1 = \frac{19}{6} \end{aligned}$$

olur.

Temel Teorem parçalı olarak sürekli fonksiyonlara $(d/dx) \int_a^x f(t) dt$ 'nin sadece f 'nin sürekli olduğu x değerlerinde $f(x)$ 'e eşit olacağı kısıtlamasıyla uygulanır. Aşağıdaki Leibnitz kuralında da benzer bir kısıtlama vardır.

11–16 alıştırmalarındaki fonksiyonların grafiklerini çizin ve tanım kümelerinde integre edin.

$$11. f(x) = \begin{cases} x^{2/3}, & -8 \leq x < 0 \\ -4, & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$12. f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & -4 \leq x < 0 \\ x^2 - 4, & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

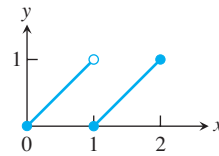
$$13. g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ \sin \pi t, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$$14. h(z) = \begin{cases} \sqrt{1 - z}, & 0 \leq z < 1 \\ (7z - 6)^{-1/3}, & 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

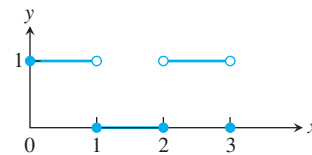
$$15. f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < -1 \\ 1 - x^2, & -1 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$16. h(r) = \begin{cases} r, & -1 \leq r < 0 \\ 1 - r^2, & 0 \leq r < 1 \\ 1, & 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$$

17. Şekildeki fonksiyonun ortalama değerini bulun.



18. Şekildeki fonksiyonun ortalama değerini bulun.



Leibniz Kuralı

Uygulamalarda, bazen hem alt hem de üst integrasyon sınırları değişken olan integrallerle tanımlanan

$$f(x) = \int_{\sin x}^{x^2} (1+t) dt \quad \text{ve} \quad g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sin t^2 dt$$

şeklinde fonksiyonlarla karşılaşırız. Birinci integral doğrudan hesaplanabilirken ikincisi hesaplanamaz. Ama iki integralin de türevini **Leibniz Kuralı** denilen bir formülle hesaplayabiliriz:

Leibniz Kuralı

$f, [a, b]$ 'de sürekliyse ve $u(x)$ ile $v(x)$ x 'in değerleri $[a, b]$ 'de olan türevlenebilir fonksiyonlarıysa,

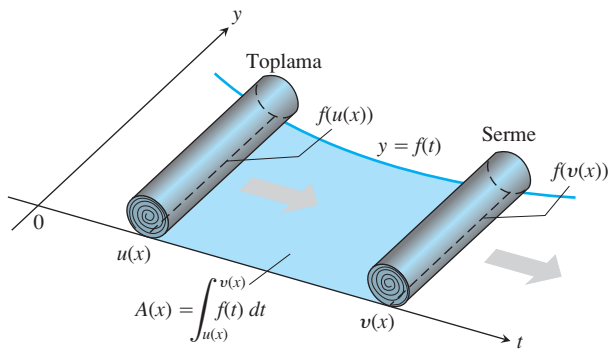
$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}$$

olur.

Şekil 5.35 Leibniz Kuralının geometrik bir yorumunu vermektedir. Soldan toplanmasıyla aynı x anında sağdan serilen değişken $f(t)$ genişlikli bir halı görülmektedir (Bu yorumda zaman t değil x 'tir). x anında, yer $u(x)$ 'ten $v(x)$ 'e kadar kaplanmaktadır. Halının toplanma hızı du/dx , serilme hızı dv/d ile eşit olmak zorunda değildir. Verilen herhangi bir x anında, halının kapladığı alan

$$A(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$$

ile verilir.



ŞEKİL 5.35 Bir halıyı sermek ve toplamak: Leibnitz kuralının bir geometrik yorumu:

$$\frac{dA}{dx} = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}.$$

Kaplanan alan hangi oranda değişmektedir? x anında, $A(x)$ serilen halının genişliği $f(v(x))$ kere halının serilme hızı dv/dx ile artmak-

tadır. Yani, $A(x)$

$$f(v(x)) \frac{dv}{dx}.$$

hızıyla artmaktadır. Aynı zamanda $A(x)$ toplanan halının genişliği kere du/dx hızı olan

$$f(u(x)) \frac{du}{dx}$$

hızıyla azalmaktadır. A 'daki net değişim oranı

$$\frac{dA}{dx} = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}.$$

olarak bulunur ki, bu da Leibniz kuralıdır.

Kuralı ispatlamak için, F' 'yi f 'nin $[a, b]$ 'deki bir ters türevi olarak alalım. Bu durumda,

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = F(v(x)) - F(u(x))$$

olur. Bu denklemin iki tarafının da x 'e göre türevinin alınması bize istediğimiz denklemleri verir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt &= \frac{d}{dx} [F(v(x)) - F(u(x))] \\ &= F'(v(x)) \frac{dv}{dx} - F'(u(x)) \frac{du}{dx} \\ &= f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}. \end{aligned}$$

Zincir Kuralı

Leibniz kuralını kullanarak, 19–21 alıştırmalarındaki fonksiyonların türevini bulun.

$$19. f(x) = \int_{1/x}^x \frac{1}{t} dt$$

$$20. f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \frac{1}{1-t^2} dt$$

$$21. g(y) = \int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} \sin t^2 dt$$

22. Leibniz kuralını kullanarak,

$$\int_x^{x+3} t(5-t) dt.$$

integralini maksimize eden x değerini bulun. Bu gibi problemler politik seçimlerin matematiksel teorisinde geçer. “The Entry Problem in a Political Race”, Steven J. Brams ve Philip D. Straffin, “*Political Equilibrium*”da, Peter Ordeshook ve Kenneth Shepfler, editörler. Kluwer-Nijhoff, Boston, 1982, sayfa 181–195’e bakın.

Sonlu Toplamlara İntegrallerle Yaklaşmak

Analizin çoğu uygulamasında, sonlu toplamalara yaklaşımda bulunmak için integraller kullanılır—alışıldık şekilde integrallere sonlu toplamalarla yaklaşımda bulunmanın tersine olarak.

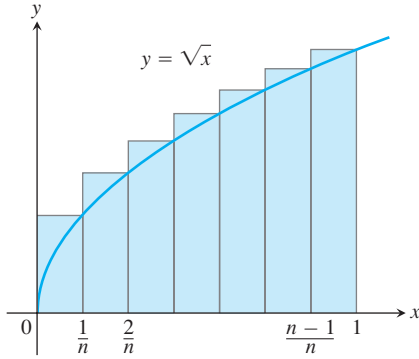
Örneğin, İlk n pozitif sayının kareköklerinin toplamı, $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}$ 'i bulun.

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

integrali

$$\begin{aligned} S_n &= \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n}} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n^{3/2}}. \end{aligned}$$

üst toplamlarının limitidir.



Dolayısıyla, n büyük olduğunda, S_n $2/3$ 'e yaklaşıyor ve

Karekök toplamı $= \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} = S_n \cdot n^{3/2} \approx \frac{2}{3} n^{3/2}$.

elde ederiz. Aşağıdaki tablo yaklaşımın ne kadar iyi olabileceğini göstermektedir.

n	Kökler toplamı	$(2/3)n^{3/2}$	Bağıl hata
10	22.468	21.082	$1.386/22.468 \approx 6\%$
50	239.04	235.70	1.4%
100	671.46	666.67	0.7%
1000	21,097	21,082	0.07%

23.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5}{n^6}$$

ifadesini, limitin

$$\int_0^1 x^5 dx$$

olduğunu göstererek ve integrali hesaplayarak bulun.

24. Alıştırma 23'e bakın ve aşağıdaki ifadeyi hesaplayın.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3).$$

25. $f(x)$ sürekli bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right]$$

ifadesini belirli bir integral olarak ifade edin.

26. Alıştırma 25'in sonucuyla aşağıdakileri hesaplayın

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (2 + 4 + 6 + \dots + 2n),$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{16}} (1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \dots + n^{15}),$

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right).$

Aşağıdaki limitler hakkında ne söylenebilir?

d. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{17}} (1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \dots + n^{15})$

e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{15}} (1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \dots + n^{15})$

27. a. r yarıçaplı bir daire içindeki n kenarlı düzgün bir çokgenin alanı A_n 'nin

$$A_n = \frac{nr^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}.$$

olduğunu gösterin.

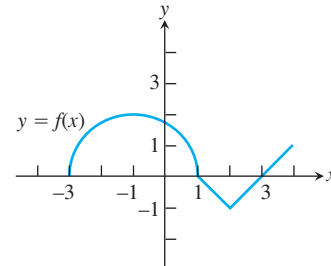
b. $n \rightarrow \infty$ iken A_n 'nin limitini bulun. Bu bir dairenin alanı hakkında bildiklerinizle uyumakta mıdır?

28. **Bir diferansiyel denklem** $y = \sin x + \int_x^\pi \cos 2t dt + 1$ 'in aşağıdaki iki koşulu da sağladığını gösteriniz.

i. $y'' = -\sin x + 2 \sin 2x$

ii. $x = \pi$ iken $y = 1$ ve $y' = -2$

29. **Bir integrale tanımlanan fonksiyon** Bir fonksiyonun grafiği, gösterildiği gibi, bir yarım çember ve iki doğru parçasından oluşmaktadır. $g(x) = \int_1^x f(t) dt$ olsun.



a. $g(1)$ 'i bulun. b. $g(3)$ 'ü bulun. c. $g(-1)$ 'i bulun.

d. $(-3, 4)$ açık aralığında g 'nin bir yerel maksimumunun bulunduğu bütün x değerlerini bulun.

e. $x = -1$ de g 'nin grafiğine teğet olan doğru için bir denklem yazın.

f. $(-3, 4)$ açık aralığında g 'nin grafiğinin her büküm noktasının x -koordinatını bulun.

g. g 'nin değerler kümesini bulun.

Bölüm 5**Teknoloji Uygulama Projeleri****Mathematica/Maple Module*****Alanları, Hacimleri ve Eğrilerin Uzunluklarını Bulmak için Riemann Toplamlarını Kullanmak***

Bölüm I de Alanları ve hacimleri göz önüne getirir ve yaklaşımda bulunur.

Mathematica/Maple Module***Riemann Toplamları, Belirli İntegraller ve Analizin Temel Teoremi***

Bölümler I, II ve III Riemann toplamlarını ve belirli integralleri geliştirir. Bölüm IV, daha önce incelenen problemleri çözmek için, Temel Teoremi kullanarak Riemann toplamlarını ve belirli integrali geliştirmeye devam eder.

Mathematica/Maple Module***Yamur Tutucular, Asansörler ve Roketler***

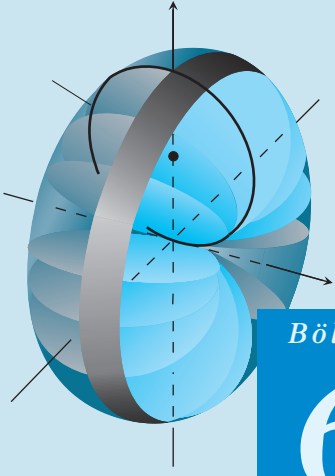
Bölüm I, bir eğri altındaki alanın, bölümden alınan örnekler için bir dikdörtgen yaklaşımının alanı ile aynı olduğunu gösterir. Değişik şekillerdeki havuzlarda toplanan suyun, havuz dolarken ve boşalırken, miktarını hesaplayacaksınız.

Mathematica/Maple Module***Bir Doğru Boyunca Hareket, Bölüm II***

Konum, hız ve ivme arasındaki türev ilişkilerinin göz önünde canlandırılmasıyla bir grafiğin şeklini gözleyeceksiniz. Bu yazılım kullanılarak metindeki şekiller canlandırılabilir.

Mathematica/Maple Module***Kirişleri Eğmek***

Kirişlerin eğilmiş şekillerini inceler, maksimum sapmalarını, konkavlıklarını ve büküm noktalarını belirler ve sonuçları bir kirişin sıkışması ve gerilmesi cinsinden yorumlar.



Bölüm

6

BELİRLİ İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI

GİRİŞ Bölüm 5'te sonlu bir $[a, b]$ kapalı aralığının bir P bölünüşüne karşı gelen

$$S_P = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

Riemann toplamaları ile integrasyon işlemi arasındaki bağıntıyı keşfettik. $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon için, bölünüşün normu $\|P\|$ sıfıra yaklaşırken S_P 'nin limitinin, f 'nin bir ters türevi F olmak üzere

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

sayısı olduğunu bulduk. Bunu, x -ekseni ile $a \leq x \leq b$ için $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği arasındaki alanı hesaplama ve iki eğri arasındaki alanı bulma problemlerine uyguladık.

Bu bölümde uygulamaları, hacimleri, düzlem eğrilerin uzunluklarını, ağırlık merkezlerini, dönel yüzeylerin alanlarını, iş ve sıvıların düzlemsel duvarlara karşı kuvvetlerini bulmaya genişletiyoruz. Bütün bunları kapalı aralıklarda sürekli fonksiyonların Riemann toplamalarının limitleri olarak – yani Analizin Temel Teoremini kullanarak hesaplanabilen belirli integraller olarak tanımlıyoruz.

6.1

Dilimleyerek Hacim Bulmak ve Bir Eksen Etrafında Döndürme

Bu bölümde dik-kesitleri düzlemsel bölgeler olan katı cisimlerin hacimlerini tanımlıyoruz. Bir S katı cisminin bir **dik-kesiti**, S 'nin bir düzlemle arakesiti tarafından oluşturulan düzlemsel bölgedir (Şekil 6.1).

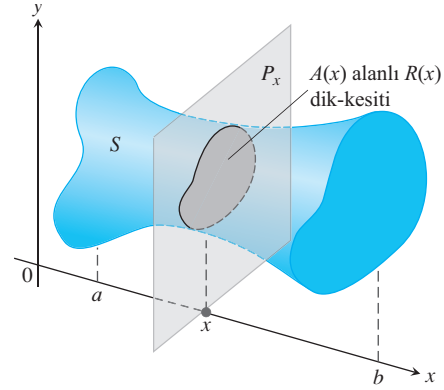
Şekil 6.1'deki gibi bir S katı cisminin hacmini bulmak istediğimizi varsayın. Bir silindirin klasik geometrideki tanımını keyfi tabanlı silindirik katı cisimlere (Şekil 6.2) genişleterek başlıyoruz. Silindirik katı cismin bilinen bir A taban alanı ve h yüksekliği varsa silindirik katı cismin hacmi

$$\text{Hacim} = \text{alan} \times \text{yükseklik} = A \cdot h$$

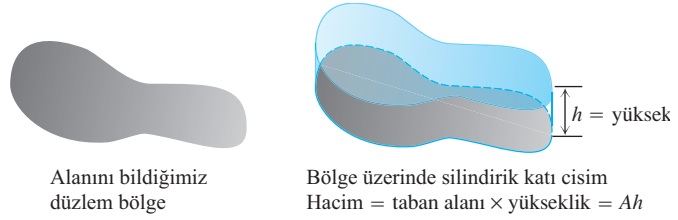
olur.

Bu denklem, silindirik olmayan birçok katı cismin hacimlerini, *dilimleme yöntemiyle* tanımlamanın temelini oluşturur.

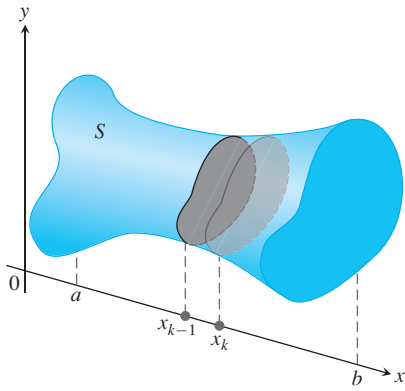
$[a, b]$ aralığındaki her x S katı cisminin dik-kesiti, alanı $A(x)$ olan bir $R(x)$ bölgesi ise ve $A(x)$, x 'in sürekli bir fonksiyonu ise S katı cisminin hacmini bir belirli integral olarak aşağıdaki yolla hesaplayabiliriz.



ŞEKİL 6.1 S katı cisminin, $[a, b]$ aralığındaki bir x noktasında x -eksenine dik olan bir P_x düzlemi ve S 'nin kesişimiyle oluşan dik-kesiti.



ŞEKİL 6.2 Silindirik bir katı cismin hacmi daima taban alanı kere yüksekliği olarak tanımlanır.



ŞEKİL 6.3 S katı cisminde tipik bir ince dilim.

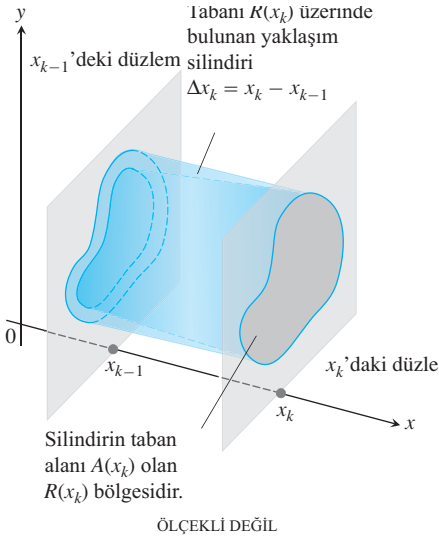
$[a, b]$ aralığını, genişlikleri (uzunlukları) Δx_k olan alt aralıklara böleriz ve katı cismi, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ bölünüş noktalarında x -eksenine dik düzlemlerle, bir ekmeği dilimler gibi, dilimleriz. Bölünüş noktalarında x -eksenine dik olan P_{x_k} düzlemleri, S 'yi ince "dilimlere" ayırır (ince ekmek dilimleri gibi). Tipik bir dilim Şekil 6.3'te gösterilmiştir. x_{k-1} 'deki düzlem ile x_k 'deki düzlem arasındaki dilime taban alanı $A(x_k)$ ve yüksekliği $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (Şekil 6.4) olan silindirik katı cisimle yaklaşımda bulunuruz. Bu silindirik katı cismin V_k hacmi, yaklaşık olarak dilimin hacmi ile aynı olan $A(x_k) \cdot \Delta x_k$ dır:

$$k. \text{ dilimin hacmi} \approx V_k = A(x_k) \Delta x_k.$$

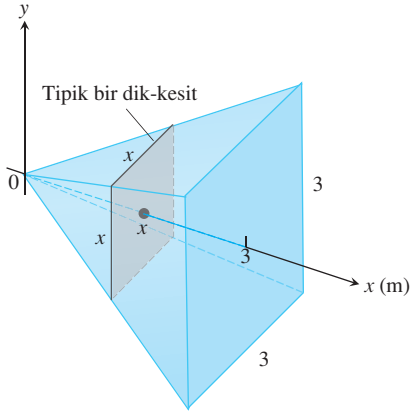
Bu nedenle bütün S katı cisminin V hacmine bu silindirik hacimlerin toplamı ile yaklaşımda bulunulur.

$$V \approx \sum_{k=1}^n V_k = \sum_{k=1}^n A(x_k) \Delta x_k.$$

Bu, $[a, b]$ aralığı üzerinde $A(x)$ fonksiyonu için bir Riemann toplamıdır. $[a, b]$ 'nin bölünüşünün normu sıfıra yaklaşırken bu toplamların yaklaşımlarının iyileşmesini bekleriz. Dolayısıyla, bunların limit halindeki belirli integrallerini S katı cisminin hacmi olarak tanımlarız.



ŞEKİL 6.4 Şekil 6.3'teki ince dilime alanı $A(x_k)$ ve yüksekliği $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ olan $R(x_k)$ tabanlı silindirik cisim ile yaklaşılmıştır.



ŞEKİL 6.5 Örnek 1'deki piramidin dik-kesitleri karelerdir.

TARİHSEL BİYOGRAFI

Bonaventura Cavalieri
(1598–1647)

TANIM Hacim

Bilinen integrale edilebilir $A(x)$ dik-kesitli bir katı cismin $x = a$ 'dan $x = b$ 'ye kadar **hacmi** A 'nın a 'dan b 'ye integralidir:

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

Bu tanım, $A(x)$ sürekli iken veya daha genel olarak, integrallenebilir iken uygulanır. Tanımdaki formülü bir katı cismin hacmini hesaplamakta kullanmak için aşağıdaki adımları izleyin:

Bir Katı Cismin Hacmini Hesaplama

1. Katı cisim ve tipik bir dik-kesit çizin.
2. Tipik bir dik-kesitin alanı $A(x)$ için bir formül bulun.
3. İntegrasyon sınırlarını bulun.
4. Temel Teoremi kullanarak $A(x)$ 'i integre edin.

ÖRNEK 1 Bir Piramidin Hacmi

3 m yüksekliğinde bir piramitin tabanı, bir kenarı 3 m olan bir karedir. Piramidin uçtan x m aşağıda yüksekliğe dik olan dik-kesiti bir kenarı x m olan bir karedir. Piramidin hacmini bulun.

Çözüm

1. Bir resim. Piramidi, yüksekliği x -ekseninde ve ucu orijinde olarak çizer ve tipik bir dik-kesit ekleriz (Şekil 6.5).
2. $A(x)$ için bir formül. x 'teki dik-kesit bir kenarı x m olan bir karedir, dolayısıyla alanı şöyle olur:

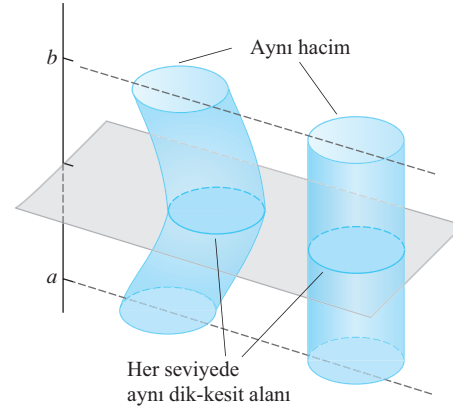
$$A(x) = x^2$$

3. İntegrasyon sınırları. Kareler $x = 0$ 'dan $x = 3$ 'e kadar giderler.
4. Hacmi bulmak için integre edin.

$$V = \int_0^3 A(x) dx = \int_0^3 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^3 = 9 \text{ m}^3$$

ÖRNEK 2 Cavalieri Prensibi

Cavalieri Prensibi, yükseklikleri eşit ve her yükseklikteki dik-kesitleri aynı olan katı cisimlerin hacimlerinin eşit olacağını söylemektedir (Şekil 6.6). Bu, hacim tanımından hemen elde edilir. Çünkü, dik-kesit alan fonksiyonu $A(x)$ ve $[a, b]$ aralığı her iki cisim için aynıdır.



ŞEKİL 6.6 *Cavalieri Prensipli*: Bu katı cisimlerin hacimleri aynıdır. Bunu bozuk paralarla kendi kendinize görebilirsiniz (Örnek 2).

ÖRNEK 3 Bir Takoğun Hacmi

3 yarıçaplı bir silindirden iki düzlemle eğri bir takoz kesilmiştir. Bir düzlem silindirin ek-senine diktir. İkinci düzlem birinci düzlemi silindirin merkezinde 45° 'lik açıyla kesmekte-dir. Takoğun hacmini bulun.

Çözüm Takozu çizer ve x -eksenine dik tipik bir dik-kesit ekleriz (Şekil 6.7). x 'teki dik-kesit alanı aşağıda verilen dikdörtgendir:

$$\begin{aligned} A(x) (\text{yükseklik})(\text{genişlik}) &= (x)(2\sqrt{9-x^2}) \\ &= 2x\sqrt{9-x^2}. \end{aligned}$$

Dikdörtgenler $x = 0$ 'dan $x = 3$ 'e kadar gider. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x) dx = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2} dx \\ &= -\frac{2}{3} (9-x^2)^{3/2} \Big|_0^3 \\ &= 0 + \frac{2}{3} (9)^{3/2} \\ &= 18. \end{aligned}$$

$u = 9 - x^2$,
 $du = -2x dx$ olsun, in-tegre edin ve geriye dönüştürün.

dir.

Dönel Cisimler: Disk Yöntemi

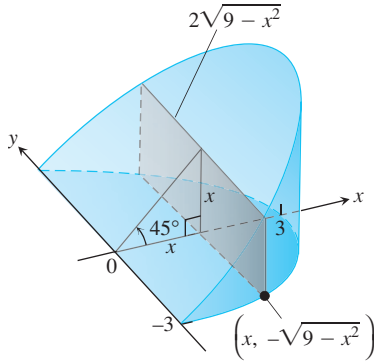
Düzlemsel bir bölgenin düzlem içindeki bir eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen katı cisme **dönel cisim** denir. Şekil 6.8'deki gibi cisimlerin hacimlerini bulmak için, sadece $A(x)$ dik-kesit alanının, $R(x)$ yarıçaplı diskin alanı olduğunu gözlemeliyiz. Burada $R(x)$ düzlemsel bölgenin sınırının dönme eksenine uzaklığıdır. Böylece, alan

$$A(x) = \pi(\text{yarıçap})^2 = \pi[R(x)]^2 \quad \text{dir.}$$

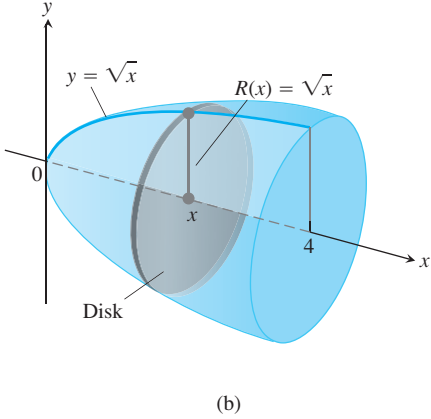
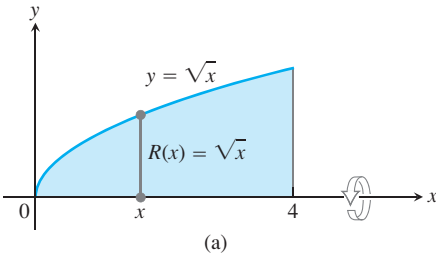
Dolayısıyla hacim tanımı

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx$$

verir.



ŞEKİL 6.7 x -eksenine dik olarak dilimlenmiş Örnek 2'deki takoz. Dik-kesitler dikdörtgendir.



ŞEKİL 6.8 Örnek 4'teki bölge (a) ve dönel cisim (b).

Bir dönel cismin hacmini hesaplamanın bu yöntemine, bir dik-kesit $R(x)$ yarıçaplı bir dairesel disk olduğundan, çoğunlukla **disk yöntemi** denir.

ÖRNEK 4 Bir Dönel Cisim (x -Ekseni Etrafında Dönme)

$y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$ eğrisi ile x -ekseni arasındaki bölge bir dönel cisim elde etmek üzere x -ekseni etrafında döndürülüyor. Dönel cismin hacmini bulun.

Çözüm Bölgeyi, tipik bir yarıçapı ve üretilen dönel cismi gösteren bir şekil çizeriz (Şekil 6.8). Hacim

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi [R(x)]^2 dx \\ &= \int_0^4 \pi [\sqrt{x}]^2 dx & R(x) = \sqrt{x} \\ &= \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi \frac{(4)^2}{2} = 8\pi \end{aligned}$$

olarak bulunur.

ÖRNEK 5 Bir Kürenin Hacmi

$$x^2 + y^2 = a^2$$

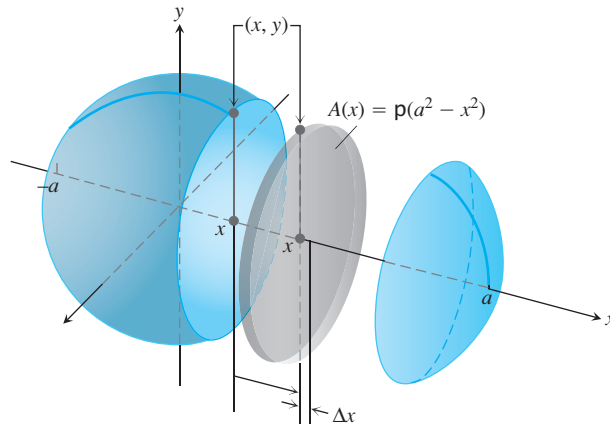
çemberi bir küre elde etmek üzere x -ekseni etrafında döndürülüyor. Hacmini bulun.

Çözüm Bölgenin x -eksenine dik düzlemlerle ince dilimlere kesildiğini düşünelim (Şekil 6.9). $-a$ ile a arasında tipik bir x noktasındaki dik-kesit alanı

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(a^2 - x^2)$$

dir. Bu nedenle hacim

$$V = \int_{-a}^a A(x) dx = \int_{-a}^a \pi(a^2 - x^2) dx = \pi \left[a^2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi a^3 \text{ olur.}$$



ŞEKİL 6.9 $x^2 + y^2 = a^2$ çemberini x -ekseni etrafında döndürerek elde edilen küre. Yarıçap, $R(x) = y = \sqrt{a^2 - x^2}$ dir (Örnek 5)

Takip eden örnekteki dönme eksenini x -ekseni değildir, fakat hacmi hesaplama kuralı aynıdır: Uygun sınırlar arasında $\pi(\text{yarıçap})^2$ 'yi integre edin.

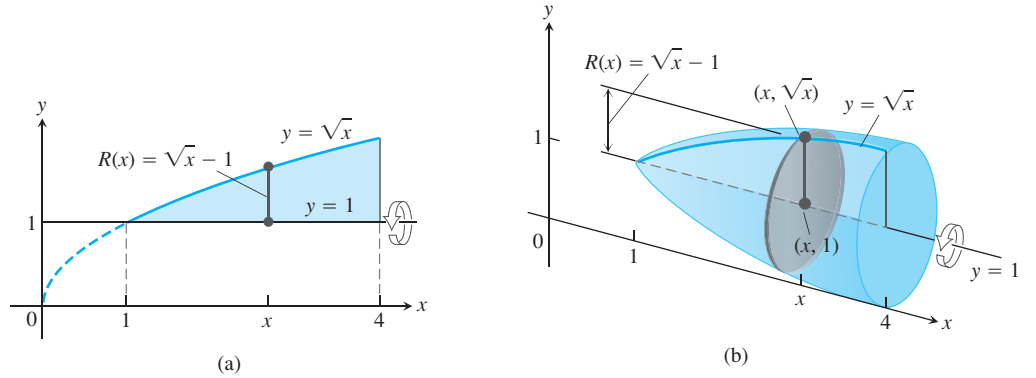
ÖRNEK 6 Bir Dönel Cisim (y -Eksen Etrafında Dönme)

$y = \sqrt{x}$ eğrisi ile $y = 1$ ve $x = 4$ doğruları arasındaki bölgenin $y = 1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cismin hacmini bulun.

Çözüm Bölgeyi, tipik bir yarıçapı ve üretilen dönel cismi gösteren bir şekil çizeriz (Şekil 6.10). Hacim

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 \pi[R(x)]^2 dx \\ &= \int_1^4 \pi[\sqrt{x} - 1]^2 dx \\ &= \pi \int_1^4 [x - 2\sqrt{x} + 1] dx \\ &= \pi \left[\frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + x \right]_1^4 = \frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

olarak bulunur.



ŞEKİL 6.10 Örnek 6'teki bölge (a) ve dönel cisim (b).

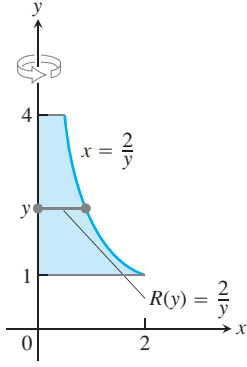
y -ekseni ile bir $x = R(y)$, $c \leq y \leq d$ eğrisi arasındaki bölgenin y -ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen bir dönel cismin hacmini bulmak için x yerine y yazarak aynı yöntemi kullanırız. Bu durumda, dairesel dik-kesit alanı

$$A(y) = \pi(\text{yarıçap})^2 = \pi[R(y)]^2$$

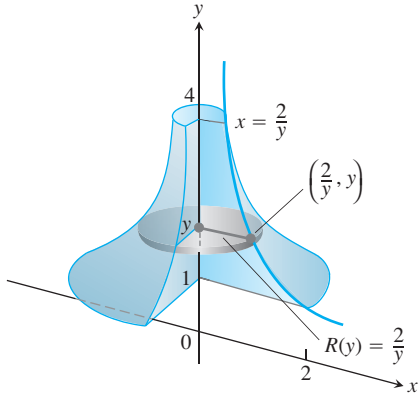
dir.

ÖRNEK 7 y -Eksen Etrafında Dönme

y -ekseni ile $x = 2/y$, $1 \leq y \leq 4$ eğrisi arasındaki bölgenin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cismin hacmini bulun.



(a)



ŞEKİL 6.11 Örnek 7'deki bölge (a) ve dönel cisim bir kısmı (b).

Çözüm Bölgeyi, tipik bir yarıçapı ve üretilen dönel cismi gösteren bir şekil çizeriz (Şekil 6.11). Hacim

$$\begin{aligned}
 V &= \int_1^4 \pi [R(y)]^2 dy \\
 &= \int_1^4 \pi \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy \\
 &= \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2} dy = 4\pi \left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 = 4\pi \left[\frac{3}{4}\right] \\
 &= 3\pi
 \end{aligned}$$

dir. ■

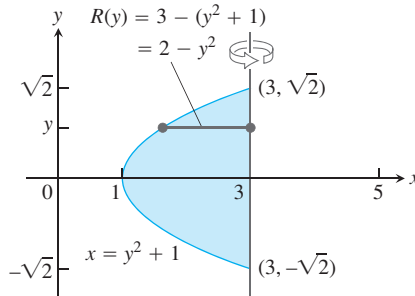
ÖRNEK 8 Dikey Bir Eksen Etrafında Dönme

$x = y^2 + 1$ parabolü ile $x = 3$ doğrusu arasındaki bölgenin $x = 3$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cismin hacmini bulun.

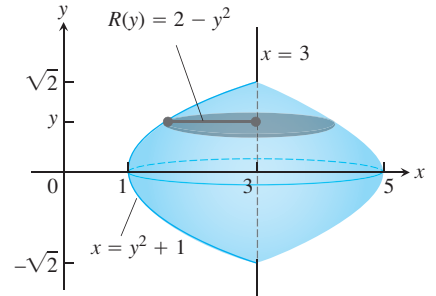
Çözüm Bölgeyi, tipik bir yarıçapı ve üretilen dönel cismi gösteren bir şekil çizeriz (Şekil 6.12). Hacim

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi [R(y)]^2 dy \\
 &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi [2 - y^2]^2 dy & R(y) = 3 - (y^2 + 1) \\
 &= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi [2 - y^2]^2 dy & = 2 - y^2 \\
 &= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4 - 4y^2 + y^4] dy \\
 &= \pi \left[4y - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}
 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

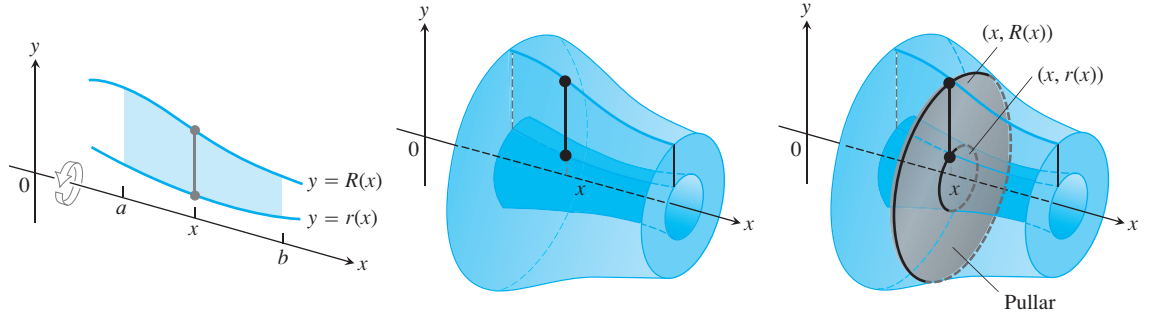


(a)

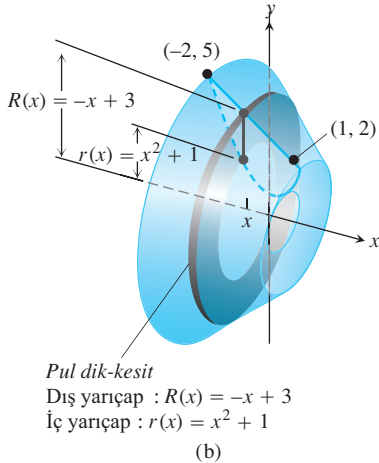
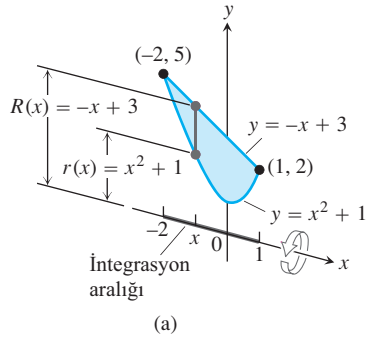


(b)

ŞEKİL 6.12 Örnek 8'deki bölge (a) ve dönel cisim (b).



ŞEKİL 6.13 Burada üretilen dönel cisimlerin dik-kesitleri diskler değil pullar (rondela) dır dolayısıyla $\int_a^b A(x) dx$ integrali biraz değişik bir formüle yol açar.



ŞEKİL 6.14 (a) Örnek 9'da dönme eksenine dik bir doğru parçası tarafından gerilen bölge. (b) Bölge x -ekseni etrafında döndürüldüğünde, doğru parçası bir pul (rondela) üretir.

Dönel Cisimler: Pul Yöntemi

Bir dönel cisim oluşturmak için döndürdüğümüz bölge dönme ekseninde bitmez veya dönme eksenini kesmezse, dönel cismin içinde bir boşluk olur (Şekil 6.13). Dönme eksenine dik-kesitler disk yerine pullardır. Tipik bir pulun boyutları

$$\text{Dış yarıçap: } R(x)$$

$$\text{İç Yarıçap: } r(x)$$

ve pulun alanı

$$A(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2 = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)$$

olur. Sonuç olarak, hacim tanımı aşağıdaki belirli integrali verir

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx.$$

Bir dilim, dış yarıçapı $R(x)$ ve iç yarıçapı $r(x)$ olan dairesel bir pul olduğundan bir dönel cismin hacminin hesaplanması için kullanılan bu yöntem **pul yöntemi** denir.

ÖRNEK 9 Bir Pul Dik-Kesit (x -Eksen Etrafında Dönme)

$y = x^2 + 1$ eğrisi ve $y = -x + 3$ doğrusu ile sınırlanan bölge x -ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim oluşturuluyor. Dönel cismin hacmini bulun.

Çözüm

1. Bölgeyi çizin ve üzerine dönme eksenine dik bir doğru parçası ekleyin (Şekil 6.14'deki lacivert doğru parçası).
2. Bölgeyle birlikte x -ekseni etrafında döndürülseydi doğru parçasının tarayacağı pulun iç ve dış yarıçaplarını bulun.

Bu yarıçaplar doğru parçasının uçlarının dönme eksenine uzaklıklarıdır (Şekil 6.14)

$$\text{Dış yarıçap: } R(x) = -x + 3$$

$$\text{İç Yarıçap: } r(x) = x^2 + 1$$

3. Şekil 6.14(a)'daki eğri ve doğrunun kesişim noktalarının x -koordinatlarını kullanarak integrasyon sınırlarını belirleyin.

$$x^2 + 1 = -x + 3$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

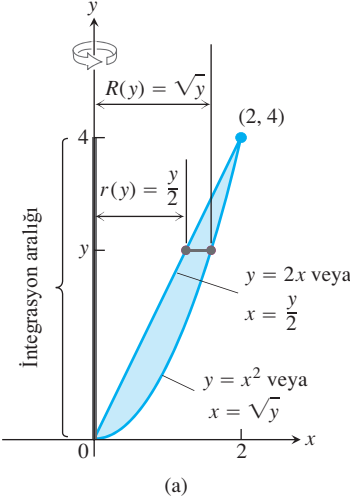
$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = -2, \quad x = 1$$

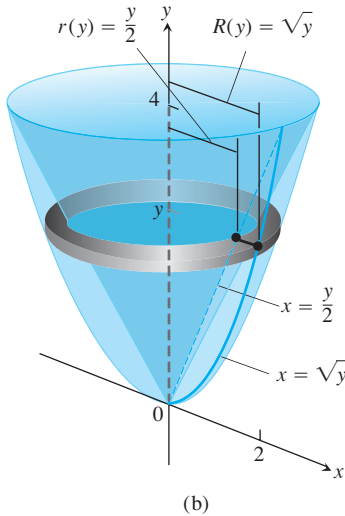
4. Hacim integralini hesaplayın.

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx \\ &= \int_{-2}^1 \pi((-x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2) dx \\ &= \int_{-2}^1 \pi(8 - 6x - x^2 - x^4) dx \\ &= \pi \left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^1 = \frac{117\pi}{5} \end{aligned}$$

2 ve 3 adımlarındaki değerler



(a)



(b)

ŞEKİL 6.15 (a) Örnek 10'daki y -ekseni etrafında döndürülen bölge, pul yarıçapları, integrasyon sınırları. (b) (a)'daki doğru parçasının taradığı pul.

Bir bölgenin y -ekseni etrafında çevrilmesi ile oluşturulan bir cismin hacmini bulmak için Örnek 9'daki aynı prosedürü kullanırız fakat x yerine y 'ye göre integral alırız. Bu durumda tipik bir pul tarayan doğru parçası y -eksenine (dönme eksenine) diktir ve pulun dış ve iç yarıçapları y 'nin fonksiyonlarıdır.

ÖRNEK 10 Bir Pul Dik-Kesit (y -Eksen Etrafında Dönme)

Birinci dörtte bir bölgede $y = x^2$ parabolü ve $y = 2x$ doğrusuyla sınırlanan alan y -ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim oluşturuluyor. Dönel cismin hacmini bulun.

Çözüm Önce bölgeyi çizin ve bölge boyunca dönme eksenine (y -ekseni) dik bir doğru parçası çizin. Şekil 6.15(a)'ya bakın.

Doğru parçasının taradığı pulun yarıçapları $R(y) = \sqrt{y}$, $r(y) = y/2$ 'dir. (Şekil 6.15).

Doğru ve parabol $y = 0$ ve $y = 4$ 'te kesişirler, dolayısıyla integrasyon sınırları $c = 0$ ve $d = 4$ 'tür. hacmi bulmak için integral alırız:

$$\begin{aligned} V &= \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2) dy \\ &= \int_0^4 \pi \left(\left[\sqrt{y} \right]^2 - \left[\frac{y}{2} \right]^2 \right) dy \\ &= \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4} \right) dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12} \right]_0^4 = \frac{8}{3} \pi \end{aligned}$$

Özet

Bütün hacim örneklerimizde, tipik bir dilimin dik-kesit alanı $A(x)$ nasıl tanımlanırsa tanımlansın, hacmin $V = \int_a^b A(x) dx$ belirli integrali olarak tanımlanması yaptığımız hesaplamaların kalbidir.

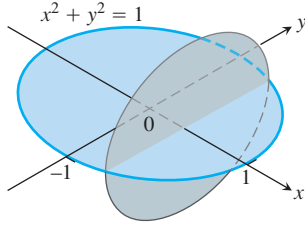
ALİŞTIRMALAR 6.1

Dik-Kesit Alanları

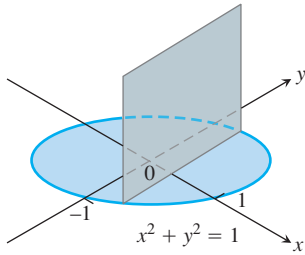
1 ve 2 alıştırmalarında katı cismin x -eksenine dik olan dik-kesitlerinin $A(x)$ alanları için formül bulunuz.

1. Cisim, $x = -1$ ve $x = 1$ 'de x -eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. Her durumda, bu düzlemler arasında x -eksenine dik olan kesitler $y = -\sqrt{1-x^2}$ yarı çemberinden $y = \sqrt{1-x^2}$ yarı çemberine kadar gider.

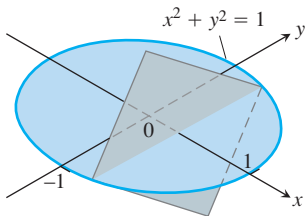
- a. Dik-kesitler çapları xy -düzleminde olan disklerdir.



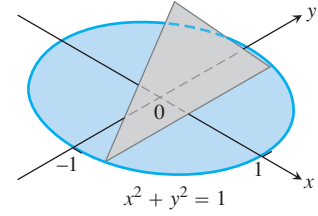
- b. Dik-kesitler tabanları xy -düzleminde olan karelerdir.



- c. Dik-kesitler köşegenleri x -düzleminde olan karelerdir. (Bir karenin köşegeninin uzunluğu kenarlarının uzunluğunun $\sqrt{2}$ katıdır.)

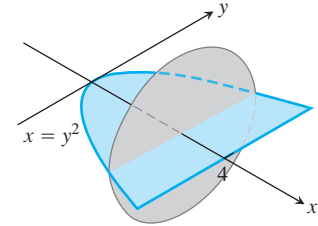


- d. Dik-kesitler tabanları xy -düzleminde olan eşkenar üçgenlerdir.

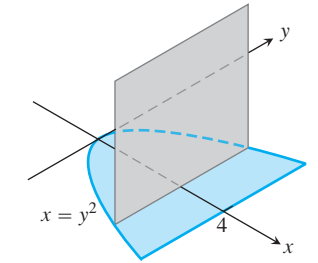


2. Cisim, $x = 0$ ve $x = 4$ 'te x -eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. Bu düzlemler arasında x -eksenine dik olan kesitler $y = -\sqrt{x}$ parabolünden $y = \sqrt{x}$ parabole kadar gitmektedir.

- a. Dik-kesitler çapları xy -düzleminde olan disklerdir.



- b. Dik-kesitler tabanları xy -düzleminde olan karelerdir.

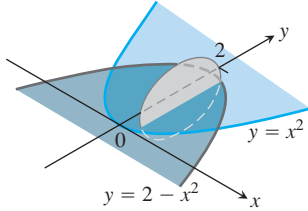


- c. Dik-kesitler köşegenleri xy -düzleminde olan karelerdir.
- d. Dik-kesitler tabanları xy -düzleminde olan eşkenar üçgenlerdir.

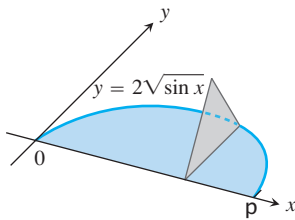
Dilimleyerek Hacim Bulma

3-10 alıştırmalarındaki cisimlerin hacimlerini bulun.

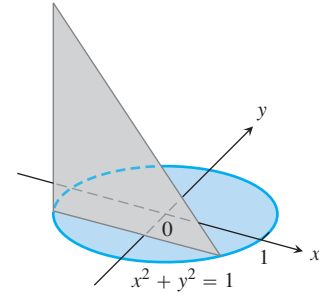
3. Cisim, $x = 0$ ve $x = 4$ 'te x -eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. $0 \leq x \leq 4$ aralığında x -eksenine dik olan kesitler köşegenleri $y = -\sqrt{x}$ parabolünden $y = \sqrt{x}$ parabolüne kadar giden karelerdir.
4. Cisim, $x = -1$ ve $x = 1$ 'de x -eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. x -eksenine dik olan kesitler çapları $y = x^2$ parabolünden $y = 2 - x^2$ parabolüne kadar giden disklerdir.



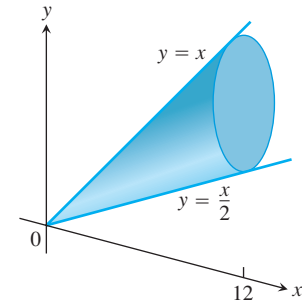
5. Cisim, $x = -1$ ve $x = 1$ 'de x -eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. Her durumda, bu düzlemler arasında x -eksenine dik olan kesitler tabanları $y = -\sqrt{1 - x^2}$ yarı çemberinden $y = \sqrt{1 - x^2}$ yarı çemberine kadar giden dikey karelerdir.
6. Cisim, $x = -1$ ve $x = 1$ 'de x -eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. Her durumda, bu düzlemler arasında x -eksenine dik olan kesitler köşegenleri $y = -\sqrt{1 - x^2}$ yarı çemberinden $y = \sqrt{1 - x^2}$ yarı çemberine kadar giden karelerdir.
7. Bir cismin tabanı $y = 2\sqrt{\sin x}$ eğrisi ile x -ekseni üzerindeki $[0, \pi]$ aralığı arasında kalan bölgedir. x -eksenine dik olan kesitler aşağıdadır.
 - a. Tabanları, şekilde gösterildiği gibi, x -ekseninden eğriye kadar giden eşkenar üçgenler.



- b. Tabanları x -ekseninden eğriye kadar giden kareler.
8. Cisim, $x = -\pi/3$ ve $x = \pi/3$ 'de x -eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. x -eksenine dik kesitler şöyledir:
 - a. Çapları $y = \tan x$ eğrisinden $y = \sec x$ eğrisine kadar giden diskler.
 - b. Tabanları $y = \tan x$ eğrisinden $y = \sec x$ eğrisine kadar giden kareler.
9. Cisim, $y = 0$ ve $y = 2$ 'de y -eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. y -eksenine dik kesitler çapları y -ekseninden $x = \sqrt{5y^2}$ parabolüne giden disklerdir.
10. Cismin tabanı $x^2 + y^2 \leq 1$ diskidir. y -eksenine $y = -1$ ile $y = 1$ arasında dik düzlemlerden oluşan kesitler bir ayakları diskin üzerinde olan ikizkenar dik üçgenlerdir.



11. **Bükülmüş bir cisim** Kenar uzunluğu s olan bir kare bir L doğrusuna dik bir düzlemde bulunmaktadır. Karenin bir köşesi L üzerindedir. Bu kare L boyunca h kadar ilerlerken, kare L 'nin etrafında dönerek kare dik-kesitli tirbüşon benzeri bir sütun oluşur.
 - a. Sütunun hacmini bulun.
 - b. Kare bir yerine iki kere dönerse hacim ne olur? Yanıtınızı açıklayın.
12. **Cavalieri Prensibi** Bir cisim $x = 0$ ve $x = 12$ 'de x -eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. x -eksenine dik düzlemlerden oluşan kesitler, şekilde gösterildiği gibi $y = x/2$ eğrisinden $y = x$ doğrusuna giden disklerdir. Cismin hacminin neden taban yarıçapı 3 ve yüksekliği 12 olan bir koniyle aynı olduğunu açıklayın.

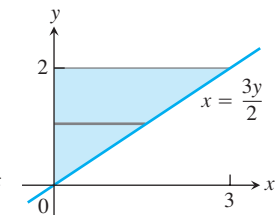
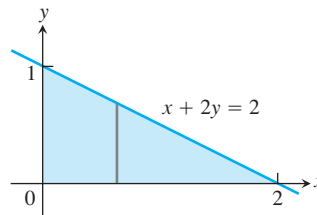


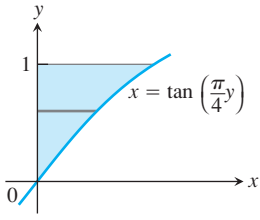
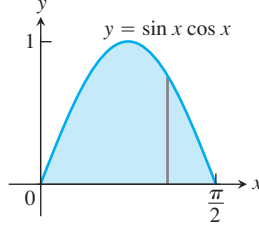
Disk Yöntemiyle Hacim Bulmak

13-16 alıştırmalarında, renkli bölgenin verilen eksen etrafında döndürülmesiyle üretilen döneel cismin hacmini bulun.

13. x -ekseni etrafında

14. y -ekseni etrafında



15. y -ekseni etrafında16. x -ekseni etrafında

17–22 Alıştırmalarındaki doğru ve eğrilerle sınırlı bölgeleri x -ekseni etrafında döndürerek üretilen cisimlerin hacmini bulun.

17. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$ 18. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$

19. $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$ 20. $y = x - x^2$, $y = 0$

21. $y = \sqrt{\cos x}$, $0 \leq x \leq \pi/2$, $y = 0$, $x = 0$

22. $y = \sec x$, $y = 0$, $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$

23 ve 24 alıştırmalarında bölgenin verilen doğru etrafında döndürülmesi ile üretilen cismin hacmini bulun.

23. Birinci dörtte bir bölgede, üstten $y = \sqrt{2}$ doğrusu, alttan $y = \sec x \tan x$ eğrisi ve soldan y -ekseniyle sınırlı bölgenin $y = \sqrt{2}$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cisim.

24. Birinci dörtte bir bölgede, üstten $y = 2$ doğrusu, alttan $y = 2 \sin x$, $0 \leq x \leq \pi/2$ eğrisi ve soldan y -ekseniyle sınırlı bölgenin $y = 2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cisim.

25–30 alıştırmalarındaki doğru ve eğrilerle sınırlı bölgelerin y -ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen dönel cisimlerin hacmini bulun.

25. $x = \sqrt{5}y^2$, $x = 0$, $y = -1$, $y = 1$ ile sınırlı bölge

26. $x = y^{3/2}$, $x = 0$, $y = 2$ ile sınırlı bölge

27. $x = \sqrt{2 \sin 2y}$, $0 \leq y \leq \pi/2$, $x = 0$ ile sınırlı bölge

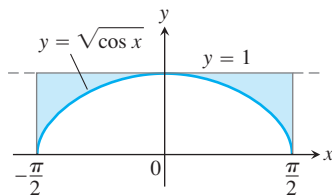
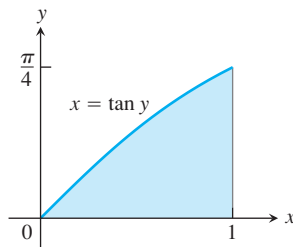
28. $x = \sqrt{\cos(\pi y/4)}$, $-2 \leq y \leq 0$, $x = 0$ ile sınırlı bölge

29. $x = 2/(y+1)$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 3$

30. $x = \sqrt{2y/(y^2+1)}$, $x = 0$, $y = 1$

Pul Yöntemiyle Hacim Bulma

31 ve 32 alıştırmalarındaki renkli bölgelerin belirtilen eksenler etrafında döndürülmesiyle üretilen cisimlerin hacimlerini bulun.

31. x -ekseni etrafında32. y -ekseni etrafında

33–38 alıştırmalarındaki doğru ve eğrilerle sınırlı bölgelerin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen cisimlerin hacimlerini bulun.

33. $y = x$, $y = 1$, $x = 0$ 34. $y = 2\sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$

35. $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$ 36. $y = 4 - x^2$, $y = 2 - x$

37. $y = \sec x$, $y = \sqrt{2}$, $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$

38. $y = \sec x$, $y = \tan x$, $x = 0$, $x = 1$

39–42 alıştırmalarında, her bölgenin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulun.

39. Köşeleri $(1, 0)$, $(2, 1)$ ve $(1, 1)$ 'de bulunan üçgenle sınırlanan bölge.

40. Köşeleri $(0, 1)$, $(1, 0)$ ve $(1, 1)$ 'de bulunan üçgenle sınırlanan bölge.

41. Birinci dörtte bir bölgede üstten $y = x^2$, alttan x -ekseni ve sağdan $x = 2$ doğrusuyla sınırlanan bölge.

42. Birinci dörtte bir bölgede soldan $x^2 + y^2 = 3$ çemberi, sağdan $x = \sqrt{3}$ doğrusu ve alttan $y = \sqrt{3}$ doğrusuyla sınırlanan bölge.

43 ve 44 alıştırmalarında, her bölgenin verilen eksen etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cismin hacmini bulun.

43. Birinci dörtte bir bölgede üstten $y = x^2$ eğrisi, alttan x -ekseni ve sağdan $x = 1$ doğrusuyla sınırlanan bölge, $x = -1$ doğrusu etrafında.

44. İkinci dörtte bir bölgede üstten $y = -x^3$ eğrisi, alttan x -ekseni ve soldan $x = -1$ doğrusuyla sınırlanan bölge, $x = -2$ doğrusu etrafında.

Dönel Cisimlerin Hacimleri

45. $y = \sqrt{x}$ eğrisi ile $y = 2$ ve $x = 0$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin aşağıdaki eksenler etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulun.

- a. x -ekseni b. y -ekseni
c. $y = 2$ doğrusu d. $x = 4$ doğrusu

46. $y = 2x$, $y = 0$ ve $x = 0$ doğrularıyla sınırlı üçgen bölgenin aşağıdaki eksenler etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulun.

- a. $x = 1$ doğrusu b. $x = 2$ doğrusu

47. $y = x^2$ parabolü ve $y = 1$ doğrusuyla sınırlı bölgenin aşağıdaki eksenler etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulun.

- a. $y = 1$ doğrusu b. $y = 2$ doğrusu
c. $y = -1$ doğrusu

48. Köşeleri $(0, 0)$, $(b, 0)$ ve $(0, h)$ 'de bulunan üçgen bölgenin aşağıdaki eksenler etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini integrasyonla bulun.

- a. x -ekseni b. y -ekseni

Teori ve Uygulamalar

49. Bir torusun hacmi. $x^2 + y^2 \leq a^2$ diski $x = b$ ($b > a$) doğrusu etrafında döndürülerek, torus adı verilen simit şeklinde bir

dönel cisim oluşturuluyor. Hacmini bulun. (İpucu: a yarıçaplı bir yarım çemberin alanı olduğu için, $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = \pi a^2/2$ 'dir.)

- 50. Bir kâsenin hacmi** Bir kâsenin şekli, $y = x^2/2$ 'nin grafiğinin $y = 0$ ve $y = 5$ doğruları arasındaki kısmının y -ekseni etrafında çevrilmesi ile elde edilecek şekildedir.

a. kâsenin hacmini bulun

b. İlişkili oranlar Kâseye, 3 birim küp/sn oranı ile su doldurursak, su 4 birim derinlikte iken su seviyesi ne hızla yükselmektedir?

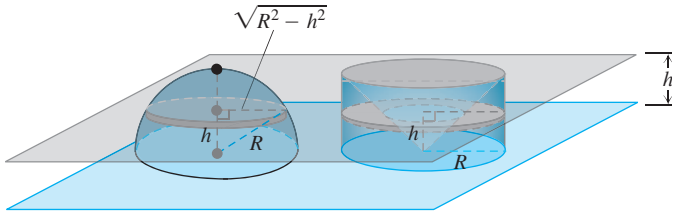
- 51. Bir kâsenin hacmi**

a. a yarıçaplı yarım küre şeklindeki bir kâse h derinliğinde su içermektedir. kâsenin içindeki suyun hacmini bulun.

b. İlişkili oranlar 5 m yarıçaplı yarım küre şeklindeki bir beton kâseye $0.2 \text{ m}^3/\text{sn}$ oranı ile su akmaktadır. Su 4 m derinlikte iken su seviyesi ne hızla yükselmektedir?

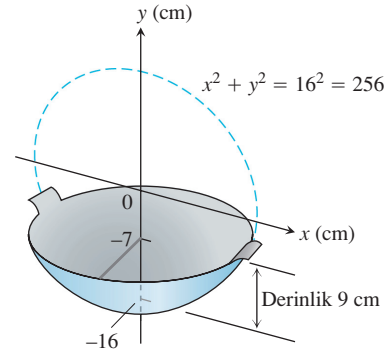
- 52. Bir cismin tam üzerindeki bir ışığın oluşturduğu cisim gölgesinin dönme eksenine paralel uzunluğunu ölçerek bir dönel cismin hacmini nasıl tahmin edebileceğinizi açıklayın.**

- 53. Bir yarıkürenin hacmi** Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi, R yarıçaplı bir yarıkürenin dik-kesitlerini, R yarıçaplı ve yüksekliği R olan bir dik dairesel içi dolu silindirden taban yarıçapı R ve yüksekliği R olan bir dik koni çıkararak elde edilen cismin dik-kesitleri ile karşılaştırarak, yarıkürenin hacmini veren $V = (2/3)\pi R^3$ formülünü elde edin.

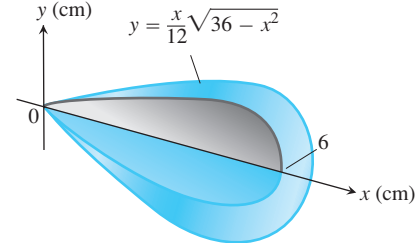


- 54. Bir koninin hacmi** Yüksekliği h ve yarıçapı r olan dik bir koninin hacmini bulmak için analiz kullanın.

- 55. Bir tava tasarlamak** Kulpları olan küresel bir kap şeklinde bir kızartma tavası tasarlıyorsunuz. Evde yaptığımız deneyler sizi, derinliği 9 cm yapar ve küreye 16 cm'lik bir yarıçap verirsiniz onun 3 L civarında sıvı tutacağı konusunda ikna ediyor. Emin olmak için tavaayı aşağıda gösterildiği gibi bir dönel cisim olarak gözünüzde canlandırıyor ve hacmini bir integralle hesaplıyorsunuz. Bulduğunuz hacim santimetre küp olarak nedir? ($1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$)

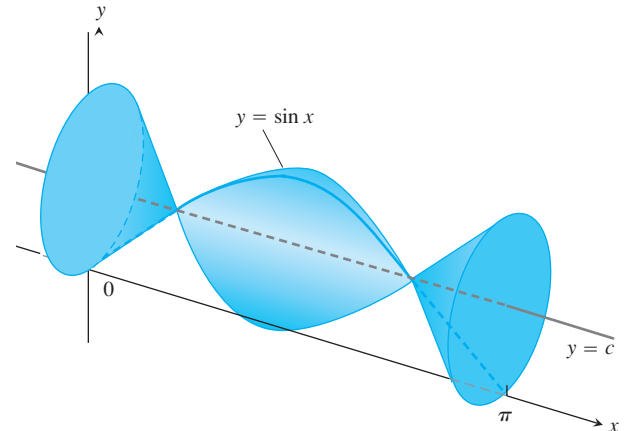


- 56. Bir çekül tasarlamak** Sizden 190 gr civarında bir ağırlığı olan saç bir çekül tasarlanmanız istendiğinde, aşağıda gösterilen dönel cisim gibi tasarlamaya karar veriyorsunuz. Çekülün hacmini bulun. Yoğunluğu 8.5 gr/cm^3 olan bir saç belirlerseniz, çekülün ağırlığı ne olur?



- 57. Maks - Min** $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, yayı $y = c$, $0 \leq c \leq 1$ doğrusu etrafında döndürülerek Şekil 6.16'daki cisim elde ediliyor.

- a. Cismin hacmini minimize eden c değerini bulun. Minimum değer nedir?
- b. $[0, 1]$ 'deki hangi c değeri cismin hacmini maksimize eder?
- T** c. Cismin hacminin grafiğini c 'nin bir fonksiyonu olarak önce $0 \leq c \leq 1$ aralığında, sonra daha geniş bir tanım aralığında çizin. c $[0, 1]$ 'den uzaklaştıkça, cismin hacmine ne olur? Bunun fiziksel bir anlamı var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.



ŞEKİL 6.16

58. Yedek yakıt tankı Bir helikopterin uçuş mesafesini arttırmak için gövdesinin altına sığacak yedek bir yakıt tankı tasarlıyorsunuz. Çizim tahtanızda gerçekleştirdiğiniz deneylerden sonra, tankı $y = 1 - (x^2/16)$, $-4 \leq x \leq 4$ eğrisinin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilecek yüzey gibi şekillendirmeye karar veriyorsunuz (boyutlar ft'tir).

- Tank kaç ft^3 yakıt alacaktır?
- Bir ft^3 7.481 galondur. Eğer helikopter bir galonla 32 mil gidiyorsa, tank yerleştirildiğinde helikopter ne kadar ekstra yol alabilecektir?

6.2

Silindirik Kabuklarla Hacim Bulmak

Bölüm 6.1 de, $A(x)$ bir S cisminin $x = a$ 'dan $x = b$ 'ye kadar integrallenebilir dik-kesit alanı olmak üzere S cisminin hacmini,

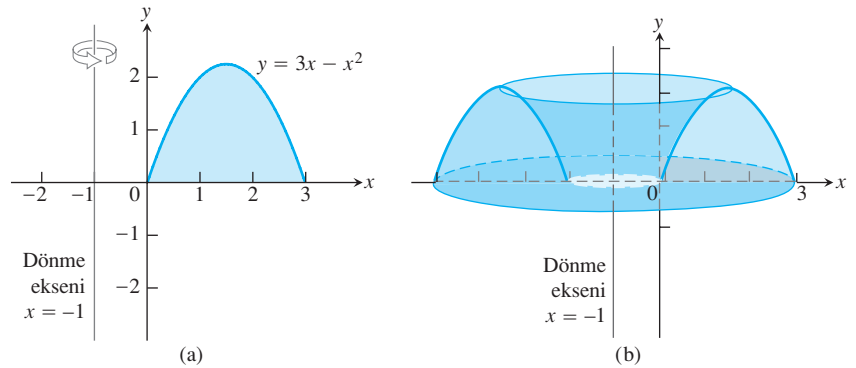
$$V = \int_a^b A(x) dx$$

belirli integrali olarak tanımladık. $A(x)$ alanı, cismi x -eksenine dik bir düzlemle dilimleyerek elde edilmişti. Bu bölümde, hacim için aynı integral tanımını kullanıyoruz, fakat alanı cismi farklı bir şekilde dilimleyerek elde ediyoruz. Bu defa cismi, kurabiye kalıpları gibi giderek artan yarıçaplı dairesel silindirlerle dilimliyoruz. Cisim, silindirin eksenine y -eksenine paralel olacak şekilde, yukarıdan aşağıya x -eksenine dik olarak dilimlenir. Her silindirin dikey eksenine aynı doğrudur fakat silindirlerin yarıçapları her dilimde artar. Bu yöntemle S cismi, ağaçlardaki yaş halkaları gibi, kalınlıkları eşit olan ve ortak eksenden dışarıya doğru gittikçe büyüyen ince silindirik kabuklara dilimlenir. Bir silindirik kabuğu açarsak, hacminin yaklaşık olarak alanı $A(x)$ ve kalınlığı Δx olan dikdörtgensel bir dilimin hacmine eşit olduğunu görürüz. Bu, önceden olduğu gibi, hacim için aynı integral tanımını uygulamamızı sağlar. Yöntemi genel olarak tanımlamadan önce biraz daha tecrübe kazanmak için bir örneğe bakalım.

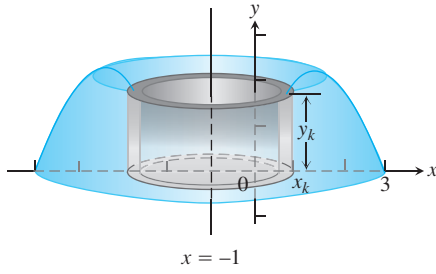
ÖRNEK 1 Kabuklar Kullanarak Bir Hacim Bulmak

x -ekseni ve $y = f(x) = 3x - x^2$ parabolü ile sınırlanan bölge $x = -1$ dikey doğrusu etrafında döndürülerek bir dönel cisim oluşturuluyor (Şekil 6.17). Dönel cismin hacmini bulun.

Çözüm Bölüm 6.1'deki pul yöntemini burada kullanmak zor olacaktır, çünkü parabolün sol ve sağ kollarının x -değerlerini y cinsinden ifade etmemiz gerekecektir.



ŞEKİL 6.17 (a) Örnek 1'deki bölgenin grafiği, döndürülmeden önce. (a)'daki bölgenin $x = -1$ dönme eksenine etrafında döndürülmesi ile oluşan cisim.

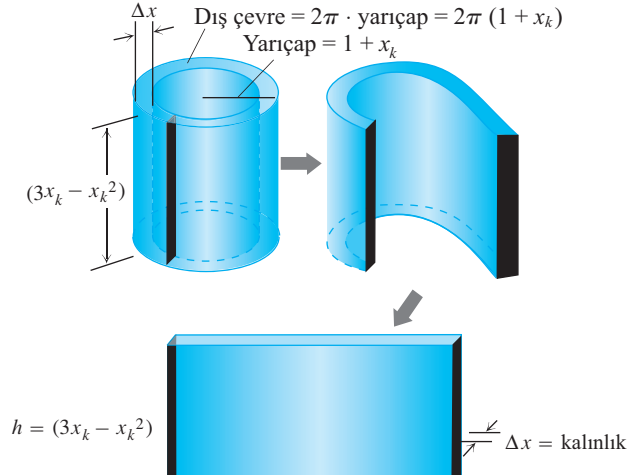


ŞEKİL 6.18 Δx kalınlığındaki bir dikey şeridin $x = -1$ etrafında döndürülmesiyle elde edilen y_k yüksekliğinde bir silindirik kabuk. Silindirin dış yarıçapı $1 + x_k$ 'dir ve bu noktada parabolün yüksekliği $y_k = 3x_k - x_k^2$ dir (Örnek 1).

(Bu x -değerleri tipik bir pulun, karmaşık formüllere yol açan iç ve dış yarıçaplarıdır.) Δy kalınlığında yatay bir şerit döndürmek yerine Δx kalınlığında dikey bir şerit döndürürüz. Bu döndürme, dikey şeridin tabanı içindeki bir x_k noktasının üzerinde y_k yüksekliğinde ve Δx kalınlığında bir *silindirik kabuk* oluşturur. Bir silindirik kabuk örneği Şekil 6.18 de renkli bölge olarak gösterilmiştir. Şekilde gösterilen silindirik kabuğun, cisim boyunca yukarıdan aşağıya doğru dönme eksenine paralel ve bütün çevre boyunca içteki deliğe yakın olarak kesilen bir dilime yaklaşımda bulunduğunu düşünebiliriz. Daha sonra genişlemiş deliğin çevresi boyunca başka bir silindirik dilim keseriz ve sonra bir daha ve böyle devam ederek n tane silindir elde ederiz. Silindirlerin yarıçapları aşamalı olarak artar. Silindirlerin yükseklikleri parabolün şeklini takip ederler: kısıdan uzuna ve sonra geri kısaya (Şekil 6.17a).

Her dilim, x -ekseninin uzunluğundaki (genişliğinde) bir alt aralığı üzerinde oturmaktadır. Yarıçapı yaklaşık olarak $(1 + x_k)$ ve yüksekliği yaklaşık olarak $3x_k - x_k^2$ dir. x_k 'daki silindiri açar ve düzleştirirsek kalınlığı Δx olan dikdörtgensel bir dilim haline (yaklaşık olarak) gelir (Şekil 6.19). k . silindirin dış çevresi $2\pi \cdot \text{yarıçap} = 2\pi(1 + x_k)$ dir ve bu da açılan dikdörtgensel dilimin uzunluğudur. Hacmi ise yaklaşık olarak dikdörtgensel cismin hacmidir,

$$\begin{aligned}\Delta V_x &= \text{çevre} \times \text{yükseklik} \times \text{kalınlık} \\ &= 2\pi(1 + x_k) \cdot (3x_k - x_k^2) \cdot \Delta x\end{aligned}$$



ŞEKİL 6.19 Bir silindirik kabuğu, (yaklaşık olarak) dikdörtgensel düz bir cisim elde etmek için kesip açtığımızı hayal edin (Örnek 1)

$[0, 3]$ aralığı üzerindeki silindirik kabukların ΔV_k hacimlerini toplamak

$$\sum_{k=1}^n \Delta V_k = \sum_{k=1}^n 2\pi(x_k + 1)(3x_k - x_k^2) \Delta x.$$

Riemann toplamını verir.

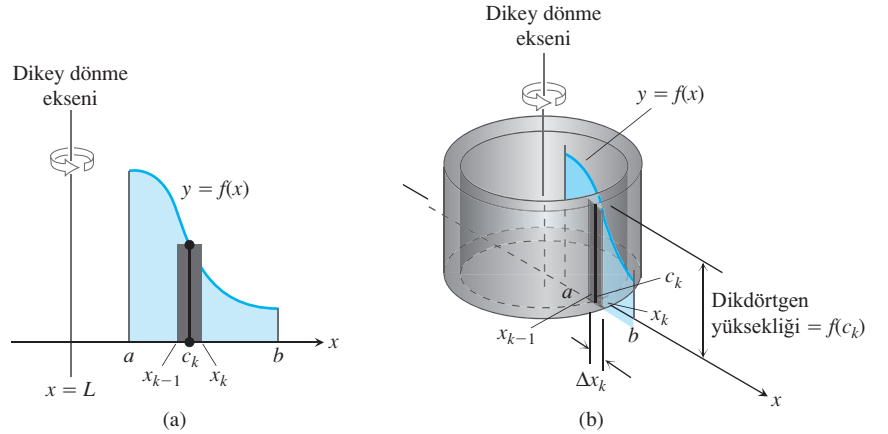
$\Delta x \rightarrow 0$ için limit almak hacim integralini verir:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^3 2\pi(x+1)(3x-x^2) dx \\
 &= \int_0^3 2\pi(3x^2+3x-x^3-x^2) dx \\
 &= 2\pi \int_0^3 (2x^2+3x-x^3) dx \\
 &= 2\pi \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^3 \\
 &= \frac{45\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Şimdi Örnek 1'deki prosedürü genelleştirelim.

Kabuk Yöntemi

Negatif olmayan sürekli bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve x -ekseni tarafından, sonlu $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sınırlanan bölgenin, $x = L$ dikey doğrusunun sağında kaldığını varsayalım (Şekil 6.20a). $a \geq L$ olduğunu kabul ediyoruz. Dolayısıyla, dikey doğru bölgeye dokunabilir fakat bölgenin içinden geçmez. Bu bölgeyi dikey L doğrusu etrafında döndürerek bir S cismi üretiriz.



ŞEKİL 6.20 (a) da gösterilen bölge $x = L$ dikey doğrusu etrafında döndürüldüğünde, silindirik kabuklara dilimlenebilen bir cisim üretilir. Tipik bir kabuk (b) de gösterilmiştir.

$[a, b]$ aralığının $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ noktaları ile bir bölünüşü P ve $[x_{k-1}, x_k]$ aralığının orta noktası c_k olsun. Şekil 6.20a'daki bölgeye $[a, b]$ aralığının bu bölünüşü üzerine oturtulan dikdörtgenlerle yaklaşımda bulunuruz. Tipik bir yaklaşım dikdörtgeninin yüksekliği $f(c_k)$ ve genişliği $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ 'dir. Bu dikdörtgen $x = L$ dikey doğrusu etrafında döndürülürse Şekil 6.20b'deki gibi bir kabuk süpürür. Geometriden bir formül, dikdörtgen tarafından süpürülen kabuğun hacminin

$$\begin{aligned}
 \Delta V_x &= 2\pi \times \text{ortalama kabuk yarıçapı} \times \text{kabuk yüksekliği} \times \text{kalınlık} \\
 &= 2\pi \cdot (c_k - L) \cdot f(c_k) \cdot \Delta x_k
 \end{aligned}$$

olduğunu söyler.

S cisminin hacmine, P üzerine oturtulan n tane dikdörtgenin süpürdüğü kabukların hacimlerini toplayarak yaklaşıyoruz:

$$V \approx \sum_{k=1}^n \Delta V_k$$

$\|P\| \rightarrow 0$ iken bu Riemann toplamının limiti, cismin hacmini bir belirli integral olarak verir:

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi \left(\text{kabuk yarıçapı} \right) \left(\text{kabuk yüksekliği} \right) dx \\ &= \int_a^b 2\pi(x - L)f(x) dx \end{aligned}$$

İntegrasyon değişkenine, burada x , **kalınlık değişkeni** olarak bakarız. İntegrand için bir formül içeren ikinci integralden çok, kabuk yönteminin işleyişini vurgulamak için birinci integrali kullanırız. Bu, yatay bir L doğrusu etrafında döndürmelere de izin verir.

Dikey Bir Doğru Etrafında Dönme İçin Kabuk Formülü

x -ekseni ile sürekli bir $y = f(x) \geq 0$, $L \leq a \leq x \leq b$ fonksiyonunun grafiği arasındaki bölgenin $x = L$ dikey doğrusu etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel cismin hacmi

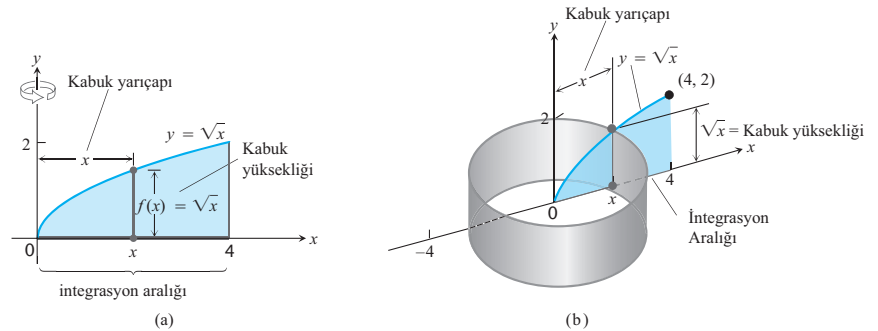
$$V = \int_a^b 2\pi \left(\text{kabuk yarıçapı} \right) \left(\text{kabuk yüksekliği} \right) dx$$

dir.

ÖRNEK 2 y -Eksen Etrafında Döndürme İle Silindirik Kabuklar

$y = \sqrt{x}$, eğrisi, x -ekseni ve $x = 4$ doğrusu ile çevrelenen bölge y -ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor. Dönel cismin hacmini bulun.

Çözüm Bölgeyi çizin ve bölge boyunca dönme eksenine *paralel* bir doğru parçası ekleyin (Şekil 6.21a). Doğru parçasının uzunluğunu (kabuk yüksekliği) ve dönme eksenine uzaklığını (kabuk yarıçapı) belirleyin. (Şekil 6.21b'de kabuğu çizdik, fakat sizin bunu yapmanıza gerek yoktur.)



ŞEKİL 6.21 (a) Örnek 2'deki bölge, kabuk boyutları ve integrasyon aralığı. (b) (a)'daki dikey doğru parçasının süpürdüğü Δx genişliğindeki kabuk.

Kabuk kalınlığı değişkeni x 'dir, dolayısıyla kabuk formülünün integrasyon sınırları $a = 0$ ve $b = 4$ tür (Şekil 6.20). Bu durumda hacim

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi \left(\text{kabuk yarıçapı} \right) \left(\text{kabuk yüksekliği} \right) dx \\ &= \int_0^4 2\pi(x)(\sqrt{x}) dx \\ &= 2\pi \int_0^4 x^{3/2} dx = 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^4 = \frac{128\pi}{5}. \end{aligned}$$

olur.

ÖRNEK 3 x -Eksen Etrafında Döndürme İle Silindirik Kabuklar

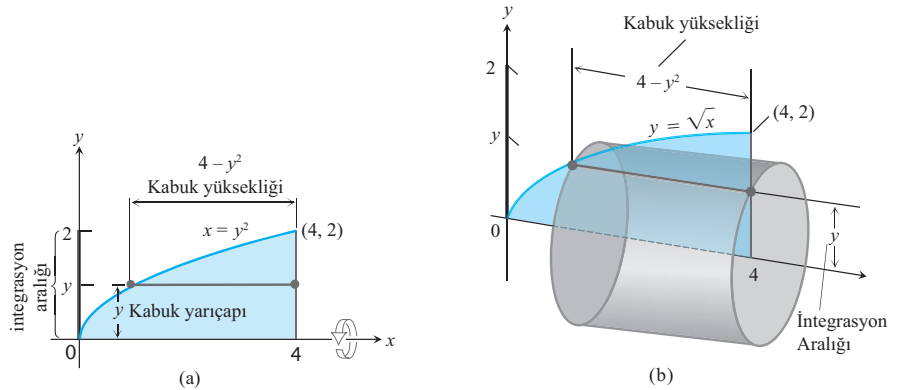
$y = \sqrt{x}$, eğrisi, x -ekseni ve $x = 4$ doğrusu ile çevrelenen bölge x -ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor. Dönel cismin hacmini bulun.

Çözüm Bölgeyi çizin ve bölge boyunca dönme eksenine *paralel* bir doğru parçası ekleyin (Şekil 6.22a). Doğru parçasının uzunluğunu (kabuk yüksekliği) ve dönme eksenine uzaklığını (kabuk yarıçapı) belirleyin. (Şekil 6.22'de kabuğu çizdik, fakat sizin bunu yapmanıza gerek yoktur.)

Bu durumda kabuk kalınlığı değişkeni y dir. Dolayısıyla kabuk formülünün integrasyon sınırları $a = 0$ ve $b = 2$ dir (Şekil 6.22'de y -ekseni üzerinde). Dönel cismin hacmi

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi \left(\text{kabuk yarıçapı} \right) \left(\text{kabuk yüksekliği} \right) dy \\ &= \int_0^2 2\pi(y)(4 - y^2) dy \\ &= \int_0^2 2\pi(4y - y^3) dy \\ &= 2\pi \left[2y^2 - \frac{y^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi \end{aligned}$$

dir.



ŞEKİL 6.22 (a) Örnek 3'teki bölge, kabuk boyutları ve integrasyon aralığı. (b) (a)'daki yatay doğru parçasının süpürdüğü Δy genişliğindeki kabuk.

Kabuk Yönteminin Özeti

Dönme ekseninin konumuna bakılmadan (yatay veya dikey), kabuk yöntemini uygulamanın adımları şunlardır

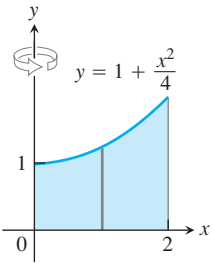
1. *Bölgeyi çizin ve bölge boyunca dönme eksenine paralel bir doğru parçası ekleyin. Doğru parçasının yüksekliğini veya uzunluğunu (kabuk yüksekliği) ve dönme eksenine uzaklığını (kabuk yarıçapı) belirleyin.*
2. Kalınlık değişkeninin integrasyon sınırlarını *bulun*.
3. Hacmi bulmak için 2π (kabuk yarıçapı)(kabuk yüksekliği) çarpımını uygun değişkene göre (x veya y) *integre edin*.

Bir dönel cismin hacmini hesaplamada kabuk ve pul yöntemleri aynı sonucu verirler. Bu sonucu burada ispat etmeyeceğiz fakat 33 ve 34 Alıştırmalarında gösterilmektedir. Her iki hacim formülü, Bölüm 15'te çalışacağımız iki ve üç katlı integrallerdeki genel bir hacim formülünün birer özel halidir. Oradaki genel formül, bölgelerin döndürülmesiyle elde edilen cisimlerden başka cisimlerin de hacimlerini hesaplamamızı sağlar.

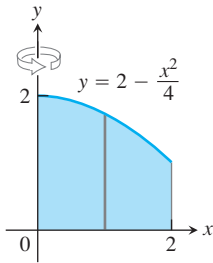
ALİŞTIRMALAR 6.2

1–6 alıştırmalarında, renkli bölgenin belirtilen eksen etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cisimlerin hacimlerini bulmak için kabuk yöntemini kullanın.

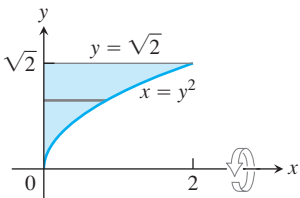
1.



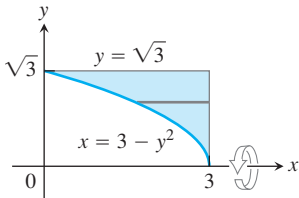
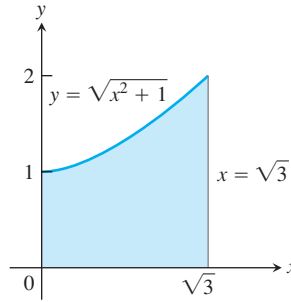
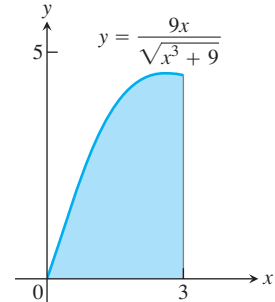
2.



3.



4.

5. y -ekseni6. y -ekseni **y -Ekseninde Döndürme**

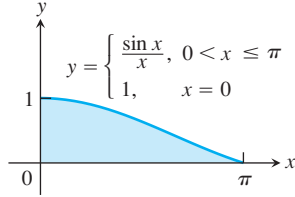
7–14 alıştırmalarındaki eğri ve doğrularla sınırlı bölgelerin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen bölgelerin hacimlerini bulmak için kabuk yöntemini kullanın.

7. $y = x$, $y = -x/2$, $x = 2$
8. $y = 2x$, $y = x/2$, $x = 1$
9. $y = x^2$, $y = 2 - x$, $x = 0$ $x \geq 0$ için
10. $y = 2 - x^2$, $y = x^2$, $x = 0$
11. $y = 2x - 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 0$

12. $y = 3/(2\sqrt{x})$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$

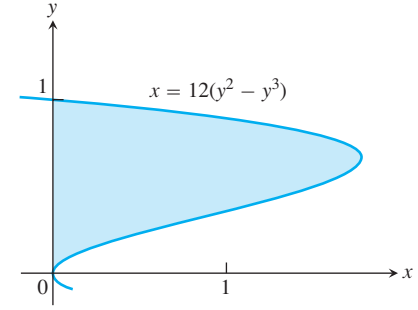
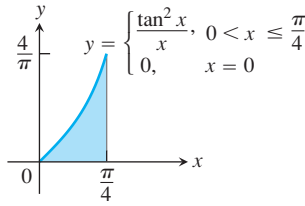
13. $f(x) = \begin{cases} (\sin x)/x, & 0 < x \leq \pi \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ olsun.

- a. $x f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ olduğunu gösterin.
b. Renkli bölgenin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen bölgenin hacmini bulun.

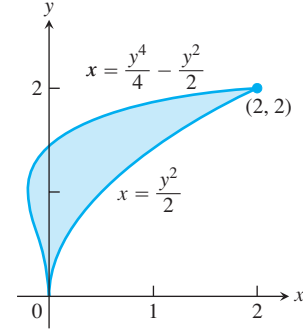


14. $g(x) = \begin{cases} (\tan x)^2/x, & 0 < x \leq \pi/4 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ olsun.

- a. $x g(x) = (\tan x)^2$, $0 \leq x \leq \pi/4$ olduğunu gösterin.
b. Renkli bölgenin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen bölgenin hacmini bulun.



24. a. x -ekseni
b. $y = 2$ doğrusu
c. $y = 5$ doğrusu
d. $y = -5/8$ doğrusu



x-Eksen Etrafında Dönme

15–22 alıştırmalarındaki eğri ve doğrularla sınırlı bölgelerin x -ekseni etrafında döndürülmeleri ile üretilen dönel cisimlerin hacimlerini bulmak için kabuk yöntemini kullanın.

15. $x = \sqrt{y}$, $x = -y$, $y = 2$
16. $x = y^2$, $x = -y$, $y = 2$, $y \geq 0$
17. $x = 2y - y^2$, $x = 0$
18. $x = 2y - y^2$, $x = y$
19. $y = |x|$, $y = 1$
20. $y = x$, $y = 2x$, $y = 2$
21. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = x - 2$
22. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = 2 - x$

Yatay Bir Eksen Etrafında Dönme

23 ve 24 alıştırmalarında, renkli bölgelerin belirtilen eksenler etrafında döndürülmeleri ile üretilen dönel cisimlerin hacimlerini bulmak için kabuk yöntemini kullanın.

23. a. x -ekseni
b. $y = 1$ doğrusu
c. $y = 8/5$ doğrusu
d. $y = -2/5$ doğrusu

Pul ve Kabuk Yöntemlerini Karşılaştırmak

Bazı bölgeler için, bölgenin koordinat eksenleri etrafında döndürülmeleri ile elde edilen dönel cisimler için hem pul yöntemi hem kabuk yöntemi kolaylıkla kullanılabilir, fakat durum her zaman böyle değildir. Örneğin, bir bölge y -ekseni etrafında döndürüldüğünde ve pullar kullanıldığında y 'ye göre integral almamız gerekir. Halbuki, integrand y cinsinden ifade etmemiz mümkün olmayabilir. Böyle bir durumda kabuk yöntemi y yerine x 'e göre integral almamızı sağlar. 25 ve 26 alıştırmaları biraz öngörüş sağlar.

25. $y = x$ ve $y = x^2$ ile sınırlı bölgenin her bir koordinat eksen etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel cismin hacmini
a. kabuk yöntemini
b. pul yöntemini kullanarak hesaplayın.
26. $2y = x + 4$, $y = x$ ve $x = 0$ doğruları ile sınırlı üçgensel bölgenin verilen eksen etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel cismin hacmini belirtilen yöntemle hesaplayın
a. x -ekseni, pul yöntemi
b. y -ekseni, kabuk yöntemi
c. $x = 4$ doğrusu, kabuk yöntemi
d. $y = 8$ doğrusu, pul yöntemi

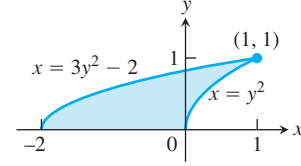
Pul veya Kabuk Yöntemini Seçmek

27–32 alıştırmalarında, bölgelerin verilen eksenler etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cisimlerin hacimlerini bulun. Verilen bir durumda pullar kullanmanın daha iyi olduğunu düşünüyorsanız, istediğiniz yöntemi uygulayın.

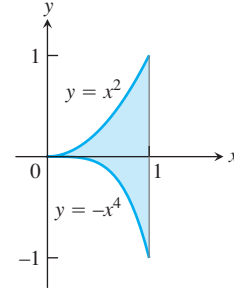
27. Köşeleri $(1, 1)$, $(1, 2)$ ve $(2, 2)$ 'deki üçgen,
- x -ekseni
 - y -ekseni
 - $x = 10/3$ doğrusu
 - $y = 1$ doğrusu
28. $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$ ile sınırlı bölge,
- x -ekseni
 - y -ekseni
 - $x = 4$ doğrusu
 - $y = 2$ doğrusu
29. Birinci dörtte bir bölgede $x = y - y^3$ eğrisi ve y -ekseniyle sınırlı bölge,
- x -ekseni
 - $y = 1$ doğrusu
30. Birinci dörtte bir bölgede $x = y - y^3$, $x = 1$ ve $y = 1$ ile sınırlı bölge,
- x -ekseni
 - y -ekseni
 - $x = 1$ doğrusu
 - $y = 1$ doğrusu
31. $y = \sqrt{x}$, $y = x^2/8$ ile sınırlanan bölge
- x -ekseni
 - y -ekseni
32. $y = 2x - x^2$ ve $y = x$ ile sınırlı bölge,
- y -ekseni
 - $x = 1$ doğrusu
33. Birinci dörtte bir bölgede, üstten $y = 1/x^{1/4}$ eğrisi, soldan $x = 1/16$ doğrusu ve alttan $y = 1$ doğrusuyla sınırlanan bölge x -ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor. Dönel cismin hacmini
- pul yöntemi
 - kabuk yöntemi
- ile bulun.
34. Birinci dörtte bir bölgede üstten $y = 1/\sqrt{x}$, eğrisi, soldan $x = 1/4$ doğrusu ve alttan $y = 1$ doğrusuyla sınırlı bölge y -ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor. Dönel cismin hacmini
- pul yöntemi
 - kabuk yöntemi
- ile bulun.

Disk, Pul veya Kabuk Yöntemini Seçmek

35. Aşağıda gösterilen bölge x -ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretilecektir. Dönel cismin hacmini bulmak için hangi yöntemi (disk, pul, kabuk) kullanırdınız? Her durumda kaç integral gerekir? Açıklayın.



36. Aşağıda gösterilen bölge y -ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretilecektir. Dönel cismin hacmini bulmak için hangi yöntemi (disk, pul, kabuk) kullanırdınız? Her durumda kaç integral gerekir? Cevabınızı açıklayın.



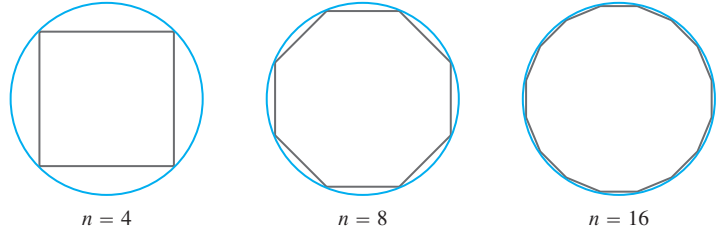
6.3

Düzlem Eğrilerin Uzunlukları

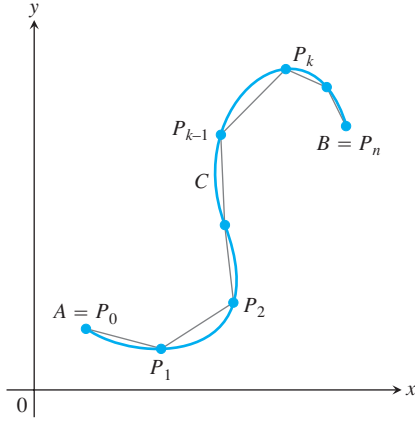
Bir doğru parçasının uzunluğu ile ne demek istendiğini biliyoruz, fakat analiz olmadan, genel bir eğrinin uzunluğu hakkında elimizde kesin bir kavram yoktur. Bir A noktasından bir B noktasına giden bir eğrinin uzunluğuna, eğriyi birçok parçaya ayırıp ardışık ayırma noktalarını doğru parçaları ile birleştirerek, yaklaşımda bulunma fikri eski Yunanlılara dayanır. Archimedes bu yöntemi, içine n kenarlı bir çokgen çizdiği ve sonra çevresini hesaplamak için geometri kullandığı, bir çemberin çevresine yaklaşımda bulunmak için kullanmıştır.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

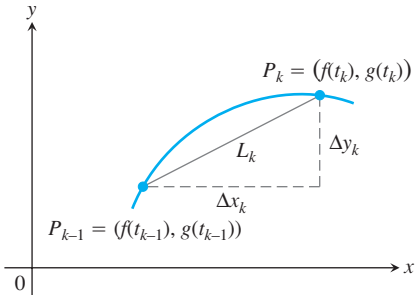
Archimedes
(287–212 B.C.)



ŞEKİL 6.23 Archimedes, bir çemberin çevresine yaklaşımında bulunmak için çemberin içine yerleştirdiği çokgenin çevresini kullanmıştır. $n = 96$ için yaklaşım yöntemi birim çemberin çevresi olarak $\pi \approx 3.14103$ verir.



ŞEKİL 6.24 $x = f(t)$ ve $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$ denklemleri ile parametrik olarak tanımlanmış C eğrisi. Eğrinin A' dan B' ye kadar uzunluğuna, $A = P_0$ dan başlayıp P_1 'e giden ve bu şekilde devam edip $B = P_n$ de biten çokgensel bir yol ile (doğru parçaları) yaklaşımda bulunmaktadır.



ŞEKİL 6.25 Yukarıda gösterilen ve uzunluğu $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$ olan doğru parçası ile $P_{k-1}P_k$ yayına, yaklaşımda bulunmaktadır.

(Şekil 6.23). Bu fikrin daha genel bir eğriye genişletilmesi Şekil 6.24'te gösterilmiştir. Şimdi yöntemin nasıl çalıştığını açıklayacağız.

Parametrik Olarak Tanımlanmış Bir Eğrinin Uzunluğu

C eğrisi

$$x = f(t) \quad \text{ve} \quad y = g(t), \quad a \leq t \leq b$$

denklemleri ile parametrik olarak tanımlanmış olsun. f ve g fonksiyonlarının $[a, b]$ aralığı üzerinde aynı anda sıfır olmayan sürekli türevlerinin var olduğunu kabul ediyoruz. Böyle fonksiyonlara **sürekli olarak türevlenebilir** fonksiyonlar ve bunlarla tanımlı C eğrisine **düzgün eğri** denir. Eğriyi, $t = a$ anında bulunduğu Şekil 6.24'teki $A = f(a), g(a)$ noktasından $B = f(b), g(b)$ giden bir parçacığın yolu olarak düşünmek faydalı olabilir. AB yolunu (yayını) $A = P_0, P_1, P_2, \dots, P_n = B$ noktalarından n parçaya böleriz. Bu noktalar, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ ile $[a, b]$ aralığının $P_k = (f(t_k), g(t_k))$ olduğu bir bölünüşüne karşı gelirler. Bu bölünüşün ardışık noktalarını doğru parçaları ile birleştiririz (Şekil 6.24). Temsili bir doğru parçasının uzunluğu

$$\begin{aligned} L_k &= \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ &= \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2} \end{aligned}$$

dir (Şekil 6.25). Δt_k küçük ise L_k uzunluğu yaklaşık olarak $P_{k-1}P_k$ yayının uzunluğuna eşittir. Ortalama Değer Teoremine göre $[t_{k-1}, t_k]$ içinde

$$\Delta x_k = f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(t_k^*) \Delta t_k,$$

$$\Delta y_k = g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(t_k^{**}) \Delta t_k.$$

eşitliklerini sağlayan t_k^* ve t_k^{**} noktaları vardır. A 'dan B 'ye giden yol, t değeri $t = a$ 'dan $t = b$ 'ye artarken, geriye gidilmeden veya tekrar aynı yoldan geçmeden tam olarak bir defa kat ediliyorsa, AB eğrisinin uzunluğuna sezgisel bir yaklaşım bütün L_k uzunluklarının toplamıdır:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n L_k &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{[f'(t_k^*)]^2 + [g'(t_k^{**})]^2} \Delta t_k. \end{aligned}$$

Sağ taraftaki bu son toplam tam olarak bir Riemann toplamı olmasa da (f' ve g' farklı noktalarda hesaplandıkları için), ileri analizden bir teorem, bölünüşün normunun sıfıra gitmesi durumunda limitinin

$$\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

belirli integrali olarak varlığını garanti eder. Bu nedenle, A 'dan B 'ye kadar eğrinin uzunluğunu bu integral olarak tanımlamak anlamlıdır.

TANIM Parametrik Bir Eğrinin Uzunluğu

Bir C eğrisi, f' ve g' türevleri $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve aynı anda sıfır olmamak üzere $x = f(t)$ ve $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$ denklemleri ile parametrik olarak tanımlanmış ise ve t değeri $t = a$ 'dan $t = b$ 'ye artarken, C eğrisi tam olarak bir defa kat ediliyorsa, C eğrisinin uzunluğu

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

belirli integralidir.

$[a, b]$ zaman aralığı boyunca $(f')^2 + (g')^2 > 0$ olduğundan, düzgün bir C eğrisi aralık üzerinde geriye dönmez veya yön değiştirmez.

$x = f(t)$ ve $y = g(t)$ ise Leibniz notasyonunu kullanarak yay uzunluğu için aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (1)$$

Uzunluğunu bulmak istediğimiz C eğrisinin farklı iki parametrizasyonu varsa ne olur; hangisini kullandığımız fark eder mi? Cevap, ileri analizden, seçtiğimiz parametrizasyon C eğrisinin uzunluğunun tanımında ifade edilen koşulları sağladığı sürece, hayır (Bkz. Alıştırma 29).

ÖRNEK 1 Bir Çemberin Çevresi

$$x = r \cos t \quad \text{ve} \quad y = r \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

denklemleri ile parametrik olarak tanımlanan r yarıçaplı çemberin çevresini bulun.

Çözüm t , 0'dan 2π 'ye değişirken çember tam olarak bir defa kat edilir, dolayısıyla çevre

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

dir.

$$\frac{dx}{dt} = -r \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = r \cos t$$

ve

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = r^2$$

buluruz.

Şu halde,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} dt = r [t]_0^{2\pi} = 2\pi r$$

bulunur.

ÖRNEK 2 Bir Eğrinin Uzunluğu İçin Parametrik Formülü Uygulamak
astroidinin uzunluğunu bulun (Şekil 6.26).

$$x = \cos^3 t \text{ ve } y = \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Çözüm Eğrinin, koordinat eksenlerine göre simetrisinden dolayı, uzunluğu birinci dördte bir bölgedeki uzunluğunun dört katıdır. Buradan,

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = [3 \cos^2 t (-\sin t)]^2 = 9 \cos^4 t \sin^2 t$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = [3 \sin^2 t (\cos t)]^2 = 9 \sin^4 t \cos^2 t$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{9 \cos^2 t \sin^2 t (\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_1)}$$

$$= \sqrt{9 \cos^2 t \sin^2 t}$$

$$= 3 |\cos t \sin t|$$

$$= 3 \cos t \sin t$$

$$0 \leq t \leq \pi/2 \text{ için} \\ \cos t \sin t \geq 0$$

bulunur. Bu nedenle

$$\begin{aligned} \text{Birinci bölgedeki parçanın uzunluğu} &= \int_0^{\pi/2} 3 \cos t \sin t dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt \\ &= -\frac{3}{4} \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\cos t \sin t = \\ (1/2) \sin 2t$$

olur. Astroidin uzunluğu bunun dört katıdır: $4(3/2) = 6$

Bir $y = f(x)$ Eğrisinin Uzunluğu

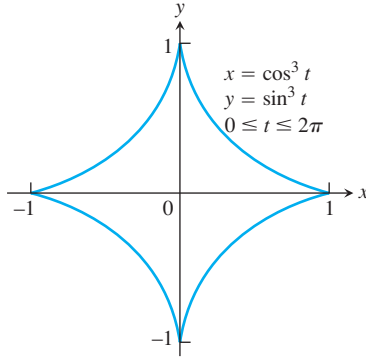
Sürekli olarak türevlenebilen bir $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ eğrisi veriliyor, $x = t$ parametre değerini atayabiliriz. Bu durumda f fonksiyonunun grafiği, daha önce göz önüne aldığımızın bir özel hali olan ve

$$x = t \text{ ve } y = f(t), \quad a \leq t \leq b$$

denklemleri ile parametrik olarak tanımlanan C eğrisidir. Şu halde,

$$\frac{dx}{dt} = 1 \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{dt} = f'(t)$$

dir.



ŞEKİL 6.26 Örnek 2'deki astroid.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Gregory St. Vincent
(1584–1667)

Bölüm 3.5'teki hesaplamalarımızdan,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = f'(t)$$

elde ederiz ve bu da,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= 1 + [f'(t)]^2 \\ &= 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ &= 1 + [f'(x)]^2 \end{aligned}$$

verir. (1) Denkleminde yerine yazmak, $y = f(x)$ 'in grafiği için yay uzunluğu formülünü verir.

$y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ 'nin Uzunluğu İçin Formül

f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli olarak türevlenebiliyorsa, $y = f(x)$ eğrisinin (grafığının) $x = a$ 'dan $x = b$ 'ye kadar uzunluğu şöyledir:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (2)$$

ÖRNEK 3 Bir Grafik İçin Yay Uzunluğu Formülünü Uygulamak

Aşağıdaki eğrinin uzunluğunu bulun.

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Çözüm (2) denklemini $a = 0$, $b = 1$ ve

$$\begin{aligned} y &= \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{2}x^{1/2} \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= (2\sqrt{2}x^{1/2})^2 = 8x \end{aligned}$$

olarak kullanırız. Eğrinin $x = 0$ 'dan $x = 1$ 'e kadar uzunluğu

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 8x} dx \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} (1 + 8x)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

$a = 0$, $b = 1$
ile (2) denklemi
 $u = 1 + 8x$,
alın, nitegre edin
ve u yerine
 $1 + 8x$ yazın. ■

olur.

dy/dx 'teki Süreksizliklerle Uğraşmak

Eğri üzerinde dy/dx 'in bulunmadığı bir noktada, dx/dy bulunabilir ve eğrinin uzunluğunu x 'i y cinsinden ifade ederek ve (2) denkleminin aşağıda verilen dengini uygulayarak bulabiliriz:

 $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$ 'nin Uzunluğu İçin Formül

g fonksiyonu $[c, d]$ aralığı üzerinde sürekli olarak türevlenebiliyorsa, $x = g(y)$ eğrisinin $y = c$ 'den $y = d$ 'ye kadar uzunluğu şöyledir:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy \quad (3)$$

ÖRNEK 4 dy/dx Türevinde Bir Süreksizliği Bulunan Bir Grafiğin Uzunluğu

$y = (x/2)^{2/3}$ 'ün $x = 0$ 'dan $x = 2$ 'ye kadar uzunluğunu bulun.

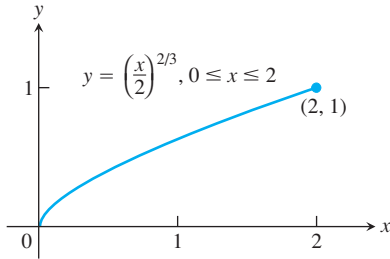
Çözüm

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$$

türevi $x = 0$ 'da tanımlı değildir, dolayısıyla eğrinin uzunluğunu (2) denklemi ile bulamayız. Bu nedenle eşitliği, x 'i y cinsinden ifade edecek şekilde tekrar yazalım:

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} \\ y^{3/2} &= \frac{x}{2} && \text{İki tarafında } 3/2. \\ x &= 2y^{3/2}. && \text{ } x\text{'i çözün.} \end{aligned}$$

Buradan uzunluğunu bulmak istediğimiz eğrinin aynı zamanda $x = 2y^{3/2}$,nin $y = 0$ 'dan $y = 1$ 'e kadar grafiği olduğunu görürüz (Şekil 6.27).



ŞEKİL 6.27 $y = (x/2)^{2/3}$,ün $x = 0$ 'dan $x = 2$ 'ye kadar grafiği aynı zamanda $x = 2y^{3/2}$,nin $y = 0$ 'dan $y = 1$ 'e kadar grafiğidir. (Örnek 4).

$$\frac{dx}{dy} = 2 \left(\frac{3}{2}\right) y^{1/2} = 3y^{1/2}$$

türevi $[0, 1]$ aralığında süreklidir. Dolayısıyla eğrinin uzunluğunu bulmak için (3) denklemini kullanabiliriz:

$$\begin{aligned} L &= \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 9y} dy && c = 0, d = 1 \text{ ile (3) denklemini} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} (1 + 9y)^{3/2} \Big|_0^1 && u = 1 + 9y, du/9 = dy \text{ alın, integre edin ve değerleri yerine koyun.} \\ &= \frac{2}{27} (10\sqrt{10} - 1) \approx 2.27. \end{aligned}$$

TARİHSEL BİYOGRAFİ

James Gregory
(1638–1675)

Kısa Diferansiyel Formül

(1) denklemi genellikle türevler yerine diferansiyellerle yazılır. Bu, formel olarak karekök dışına dt yazmak yerine karekök içine $(dt)^2$ yazmakla ve sonrada

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (dt)^2 = \left(\frac{dx}{dt} dt\right)^2 = (dx)^2$$

ve

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 (dt)^2 = \left(\frac{dy}{dt} dt\right)^2 = (dy)^2$$

yazmakla yapılır. Ayrıca $(dx)^2$ ve $(dy)^2$ deki parantezleri kaldırmakta gelenek haline gelmiştir. Bu nedenle (1) denklemi

$$L = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (4)$$

olarak yazılır. İntegrallerin özelliklerini özetlemenin ve basitleştirmenin bir yolunun bu diferansiyeller olduğunu düşünebiliriz. Diferansiyellerin kesin matematiksel tanımları daha ileri seviyedeki kitaplarda verilmektedir.

Bir integral hesabı yapmak için, dx ve dy 'nin her ikisi birden bir ve aynı değişken cinsinden ifade edilmeli ve (4) denkleminde uygun integrasyon sınırları bulunmalıdır.

(4) denklemini hatırlamanın kullanışlı bir yolu

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (5)$$

yazmak ve ds 'ye, uygun sınırlar arasında bir eğrinin toplam uzunluğunu vermek üzere integre edilebilen bir yay uzunluğu diferansiyeli olarak bakmaktır. Şekil 6.28a, ds 'nin (5) denkleminde karşı gelen tam bir yorumunu vermektedir. Şekil 6.28b tam olarak doğru değildir fakat Şekil 6.28a'nın basitleştirilmiş bir yaklaşımı olarak düşünülebilir.

Aklımızda (5) denklemini varken, yay uzunluğu formüllerini hatırlamanın en kısa yolu

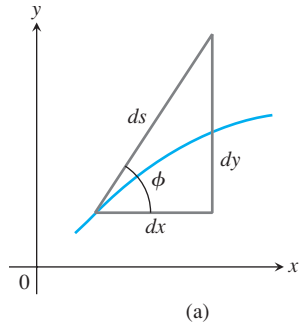
$$\text{Yay uzunluğu} = \int ds$$

eşitliğini hatırlamaktır. $L = \int ds$ yazarsak ve $y = f(x)$ grafiğimiz varsa (5) denklemini tekrar yazarak (2) denklemindeki sonucu elde ederiz:

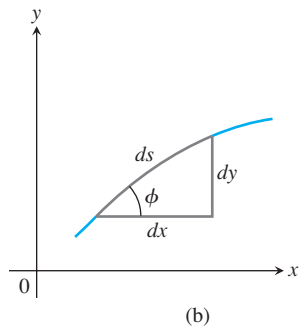
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{dy^2}{dx^2} dx^2} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Elimizde $x = g(y)$ varsa (5) denklemini tekrar yazarak (3) denklemini elde ederiz.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dy^2 + \frac{dx^2}{dy^2} dy^2} = \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} dy = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$



(a)



(b)

ŞEKİL 6.28 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ denklemini hatırlamak için diyagram.

ALİŞTIRMALAR 6.3

Parametrize Eğrilerin Uzunlukları

1–6 alıştırmalarındaki eğrilerin uzunluklarını bulun.

1. $x = 1 - t$, $y = 2 + 3t$, $-2/3 \leq t \leq 1$
2. $x = \cos t$, $y = t + \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$
3. $x = t^3$, $y = 3t^2/2$, $0 \leq t \leq \sqrt{3}$
4. $x = t^2/2$, $y = (2t + 1)^{3/2}/3$, $0 \leq t \leq 4$
5. $x = (2t + 3)^{3/2}/3$, $y = t + t^2/2$, $0 \leq t \leq 3$
6. $x = 8 \cos t + 8t \sin t$, $y = 8 \sin t - 8t \cos t$, $0 \leq t \leq \pi/2$

Eğrilerin Uzunluklarını Bulmak

7–16 alıştırmalarındaki eğrilerin uzunluklarını bulun. Bir grafik çiziciniz varsa, neye benzediklerini görmek için grafiklerini çizmek isteyebilirsiniz.

7. $y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}$, $x = 0$ 'dan $x = 3$ 'e kadar
8. $y = x^{3/2}$, $x = 0$ 'dan $x = 4$ 'e kadar
9. $x = (y^3/3) + 1/(4y)$, $y = 1$ 'den $y = 3$ 'e kadar
(İpucu: $1 + (dx/dy)^2$ bir tam karedir)
10. $x = (y^{3/2}/3) - y^{1/2}$, $y = 1$ 'den $y = 9$ 'a kadar
(İpucu: $1 + (dx/dy)^2$ bir tam karedir)
11. $x = (y^4/4) + 1/(8y^2)$, $y = 1$ 'den $y = 2$ 'ye kadar
(İpucu: $1 + (dx/dy)^2$ bir tam karedir)
12. $x = (y^3/6) + 1/(2y)$, $y = 2$ 'den $y = 3$ 'e kadar
(İpucu: $1 + (dx/dy)^2$ bir tam karedir)
13. $y = (3/4)x^{4/3} - (3/8)x^{2/3} + 5$, $1 \leq x \leq 8$
14. $y = (x^3/3) + x^2 + x + 1/(4x + 4)$, $0 \leq x \leq 2$
15. $x = \int_0^y \sqrt{\sec^4 t - 1} dt$, $-\pi/4 \leq y \leq \pi/4$
16. $y = \int_{-2}^x \sqrt{3t^4 - 1} dt$, $-2 \leq x \leq -1$

İ Eğrilerin Uzunlukları İçin İntegral Bulmak

17–24 alıştırmalarında:

- a. Eğrinin uzunluğu için bir integral kurun.
- b. Eğriyi çizerek neye benzediğine bakın.
- c. Grafik programınızın veya bilgisayarınızın integral hesaplayıcısıyla eğrinin uzunluğunu sayısal olarak bulun.

17. $y = x^2$, $-1 \leq x \leq 2$
18. $y = \tan x$, $-\pi/3 \leq x \leq 0$
19. $x = \sin y$, $0 \leq y \leq \pi$
20. $x = \sqrt{1 - y^2}$, $-1/2 \leq y \leq 1/2$
21. $y^2 + 2y = 2x + 1$ $(-1, -1)$ 'den $(7, 3)$ 'e kadar
22. $y = \sin x - x \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$

$$23. y = \int_0^x \tan t dt, \quad 0 \leq x \leq \pi/6$$

$$24. x = \int_0^y \sqrt{\sec^2 t - 1} dt, \quad -\pi/3 \leq y \leq \pi/4$$

Teori ve Uygulamalar

25. $0 \leq x \leq a$ aralığında uzunluğu her zaman $\sqrt{2}a$ olan düzgün (sürekli olarak türevlenebilen) bir $y = f(x)$ eğrisi var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

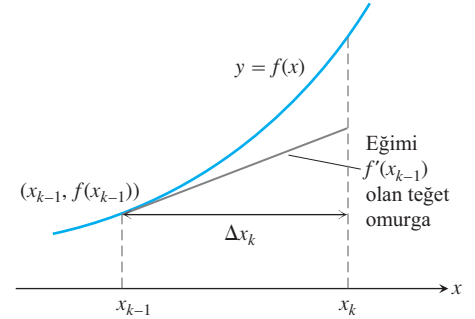
26. Eğrilerin uzunluk formülünü çıkarmak için teğet omurgalar kullanmak f 'nin $[a, b]$ 'de düzgün olduğunu varsayın ve $[a, b]$ aralığını her zamanki gibi bölün. Her $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığında $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ noktasında şekilde gösterilen *teğet omurgayı* kurun.

a. $[x_{k-1}, x_k]$ aralığındaki k . teğet omurganın uzunluğunun $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(x_{k-1}) \Delta x_k)^2}$ olduğunu gösterin.

b. $y = f(x)$ eğrisinin a 'dan b 'ye uzunluğunun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (k. \text{ teğet omurga uzunluğu}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

olduğunu gösterin.



27. a. Uzunluk integrali

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx$$

olan ve $(1, 1)$ noktasından geçen bir eğri bulun.

b. Kaç tane böyle eğri vardır? Yanıtınızı açıklayın.

28. a. Uzunluk integrali

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{y^4}} dy.$$

olan ve $(0, 1)$ noktasından geçen bir eğri bulun.

b. Kaç tane böyle eğri vardır? Yanıtınızı açıklayın.

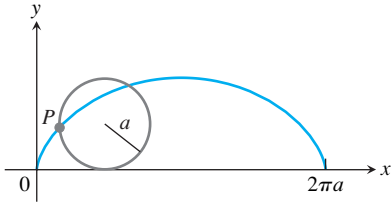
29. Uzunluk parametrisasyondan bağımsızdır Uzunluk için bulduğumuz sayıların eğrilerimizi nasıl parametrize ettiğimizle bağlı olmadığını (daha önce bahsedilen hafif kısıtlamalar dışında)

göstermek için, $y = \sqrt{1 - x^2}$ yarım çemberinin uzunluğunu aşağıdaki iki farklı parametrizasyonla bulun.

a. $x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

b. $x = \sin \pi t, \quad y = \cos \pi t, \quad -1/2 \leq t \leq 1/2$

30. Aşağıdaki şekilde gösterilen $x = a(\theta - \sin \theta)$ $y = a(1 - \cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ sikloidinin bir yayının uzunluğunu bulun. **Sikloid**, bir çemberi x -ekseni gibi bir doğru boyunca yuvarlarken çevresi üzerindeki bir noktanın takip ettiği yoldur.



BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

31–36 alıştırmalarında kapalı aralık üzerinde verilen eğrilere aşağıdaki adımları uygulamak için bir BCS kullanın.

- a. Eğriyi, aralık üzerinde $n = 2, 4, 8$ bölünüş noktaları için çokgensel bir yol yaklaşımı ile birlikte çizin. (Bkz. Şekil 6.24).

- b. Doğru parçalarının uzunluklarını toplayarak, eğrinin uzunluğuna karşı gelen yaklaşımı bulun.
- c. Eğrinin uzunluğunu bir integral kullanarak hesaplayın. $n = 2, 4, 8$ için bulduğunuz yaklaşımlarınızı integralle elde ettiğiniz gerçek uzunlukla karşılaştırın. n arttıkça gerçek uzunlukla yaklaşımlarınızın uyumu nasıldır? Cevabınızı açıklayın.

31. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1$

32. $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}, \quad 0 \leq x \leq 2$

33. $f(x) = \sin(\pi x^2), \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2}$

34. $f(x) = x^2 \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

35. $f(x) = \frac{x - 1}{4x^2 + 1}, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

36. $f(x) = x^3 - x^2, \quad -1 \leq x \leq 1$

37. $x = \frac{1}{3}t^3, \quad y = \frac{1}{2}t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$

38. $x = 2t^3 - 16t^2 + 25t + 5, \quad y = t^2 + t - 3, \quad 0 \leq t \leq 6$

39. $x = t - \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad -\pi \leq t \leq \pi$

40. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

6.4

Momentler ve Ağırlık Merkezleri

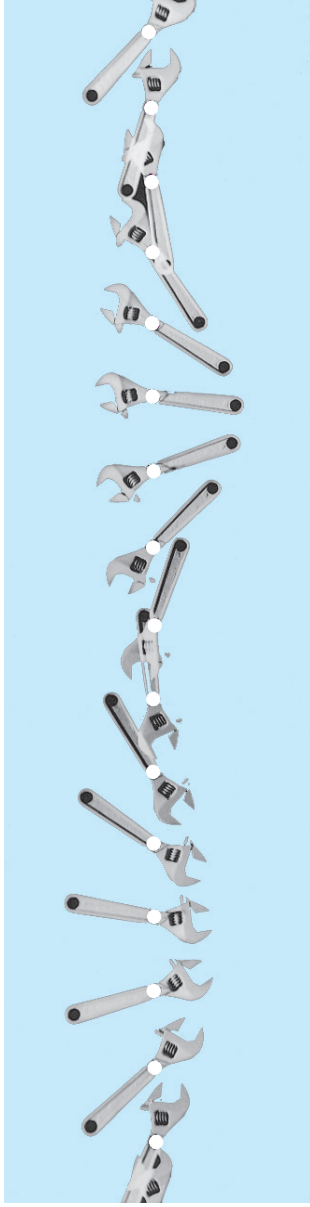
Çoğu yapı ve mekanik sistem, kütleleri *kütle merkezi* adı verilen tek bir noktada yoğunlaşmış gibi hareket ederler (Şekil 6.29). Bu noktanın yerini nasıl bulunacağımızı bilmek önemlidir ve bunu bulmak temelde matematiksel bir olgudur. Şu anda bir ve iki boyutlu cisimlerle uğraşmaktayız. Üç boyutlu cisimler en iyi olarak Bölüm 15'teki çok katlı integrallerle çalışılır.

Bir Doğru Üzerindeki Küteller

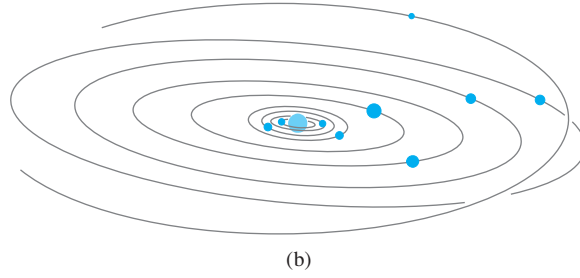
Matematiksel modelimizi aşamalarla geliştireceğiz. İlk aşamamız orijindeki bir destekle desteklenen ve bükülmeyen bir x -ekseni üzerindeki m_1, m_2 ve m_3 kütlelerini hayal etmektir.



Ortaya çıkan sistem dengede olabilir veya olmayabilir. Bu kütlelerin ne kadar büyük olduklarına ve nasıl yerleştirildiklerine bağlıdır.



(a)



ŞEKİL 6.29 (a) Buzda kayan bu anahtarın hareketi, kütle merkezi düz bir çizgi üzerinde ilerlerken, anahtarın merkezi etrafında döndüğünü farkedene kadar garip görünebilir. (b) Güneş sistemimizdeki gezegenler, asteroidler ve kuyruklu yıldızlar toplu kütle merkezlerinin çevresinde dönerler. (Bu merkez güneşin içindedir.)

Her m_k kütlesi aşağı doğru kütle kere yerçekimi ivmesine eşit bir $m_k g$ kuvveti (m_k 'nin ağırlığı) uygular. Bu kuvvetlerden her birinin, bir testereyi kullanırken yaptığınız gibi, eksenini orijin etrafında döndürmeye eğilimi vardır. **Tork** denilen bu döndürme etkisini, $m_k g$ kuvvetini, orijinden uygulama noktasına uzaklık (işaretiyle birlikte) olan x_k ile çarparak ölçeriz. Orijinin solundaki kütleler negatif (saat yönünün tersine) tork uygularlar. Orijinin sağındaki kütleler ise pozitif (saat yönünde) tork uygularlar.

Torkların toplamı sistemin orijin etrafında dönme eğilimini ölçer. Bu toplama **sistem torku** denir.

$$\text{Sistem torku} = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 \quad (1)$$

Ancak ve ancak tork sıfır ise sistem dengeye gelir.

(1) denklemindeki g 'yi dışarı çekersek, sistem torkunun

$$\underbrace{g}_{\text{ortamın bir özelliği}} \cdot \underbrace{(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)}_{\text{sistemin bir özelliği}}$$

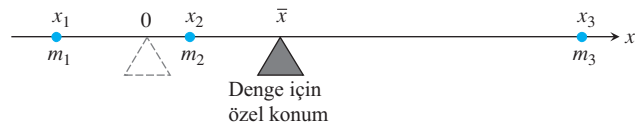
olduğunu görürüz. Yani tork, sistemin içinde bulunduğu ortamın bir özelliği olan g ile sistemin kendisinin bir özelliğini oluşturan ve sistem nerede olursa olsun aynı kalan bir sabit olan $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$ sayısının çarpımıdır.

$(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$ sayısına **sistemin orijin etrafındaki moment** denir. Tek tek $m_1 x_1, m_2 x_2, m_3 x_3$ kütlelerin **momentlerinin** toplamıdır.

$$M_0 = \text{Sistemin orijin etrafında momenti} = \sum m_k x_k$$

(Daha fazla terim içeren toplamaları da hesaba katmak için sigma gösterimi kullanıyoruz.)

Genelde sistemi dengeye getirmek için desteği nereye koyacağımızı, yani hangi $\bar{x}$ noktasına yerleştirirsek torku sıfır yapacağımızı bilmek isteriz.



Bu özel konumda destek civarındaki her kütlenin torku

$$\begin{aligned} \bar{x} \text{ civarındaki } m_k \text{'lerin torku} &= \left(\begin{array}{c} m_k \text{'nin } \bar{x} \text{'den} \\ \text{uzaklığı (işaretiyle)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{aşağı yönde} \\ \text{kuvvet} \end{array} \right) \\ &= (x_k - \bar{x})m_k g \end{aligned}$$

Bu torkların toplamının sıfır olduğunu söyleyen denklemi yazarsak, $\bar{x}$ 'yi çözebileceğimiz bir denklem elde ederiz:

$$\sum (x_k - \bar{x})m_k g = 0 \quad \text{Torkların toplamı sıfıra eşittir.}$$

$$g \sum (x_k - \bar{x})m_k = 0 \quad \text{Toplamlar için Sabitle Çarpım kuralı}$$

$$\sum (m_k x_k - \bar{x} m_k) = 0 \quad g \text{ ile bölünmüş, } m_k \text{ dağıtılmış durumda.}$$

$$\sum m_k x_k - \sum \bar{x} m_k = 0 \quad \text{Toplamlar için fark kuralı}$$

$$\sum m_k x_k = \bar{x} \sum m_k \quad \text{Yeniden düzenlemiş, yine Sabitle Çarpım kuralı}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \quad \bar{x} \text{ çözülmüş.}$$

Bu son denklem bize $\bar{x}$ 'yi sistemin orijin etrafındaki momentini sistemin toplam kütlesine bölerek bulmamızı söyler:

$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{\text{orijin etrafında sistem momenti}}{\text{sistemin kütlesi}}$$

$\bar{x}$ noktasına sistemin **kütle merkezi** denir.

Teller ve İnce Çubuklar

Çoğu uygulamada, bir çubuğun veya ince bir metal şeridin kütle merkezini bulmak isteriz. Kütle dağılımını sürekli bir fonksiyon olarak modelleyebileceğimiz böyle durumlarda, formüllerimizdeki toplam işaretleri, şimdi tanımlayacağımız şekilde integrallere dönüşürler.

x -ekseninde $x = a$ 'dan $x = b$ 'ye kadar uzanan uzun ince bir şerit düşünün ve $[a, b]$ aralığının bir bölünüşünü kullanarak bunu küçük Δm_k kütlelerine ayırın. k . alt aralıktan herhangi bir x_k noktası seçin.



k .inci parça Δx_k birim uzunluğundadır ve orijinden yaklaşık x_k birim uzaklıkta bulunur. Şimdi üç şey gözlemleyin.

İlk olarak, şeridin kütle merkezi $\bar{x}$, her Δm_k kütlelerini x_k noktasına bağlarsak bulacağımız nokta kütle sisteminin kütle merkeziyle neredeyse aynıdır:

$$\bar{x} \approx \frac{\text{sistem momenti}}{\text{sistem kütlesi}}$$

Yoğunluk

Bir malzemenin yoğunluğu birim hacimdeki kütlesidir. Ancak, pratikte, ölçebileceğimiz birimler kullanmayı tercih ederiz. Teller, çubuklar, ince şeritler için birim uzunlukta kütle olarak alırız. Düz plakalar ve tabakalar içinse birim alanda kütle kullanırız.

İkinci olarak, orijin etrafında her şerit parçasının momenti neredeyse $x_k \Delta m_k$ 'dir, dolayısıyla sistem momenti yaklaşık olarak $x_k \Delta m_k$ 'ların toplamıdır:

$$\text{Sistem momenti} \approx \sum x_k \Delta m_k.$$

Üçüncü olarak, şeridin x_k 'deki yoğunluğu, birimi birim uzunluktaki kütle olarak ifade edilen $\delta(x_k)$ ise ve δ sürekli ise Δm_k yaklaşık olarak $\delta(x_k) \Delta x_k$ 'dir (birim uzunluktaki kütle kere uzunluk):

$$\Delta m_k \approx \delta(x_k) \Delta x_k$$

Bu üç gözlemi birleştirirsek aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$\bar{x} \approx \frac{\text{sistem momenti}}{\text{sistem kütlesi}} \approx \frac{\sum x_k \Delta m_k}{\sum \Delta m_k} \approx \frac{\sum x_k \delta(x_k) \Delta x_k}{\sum \delta(x_k) \Delta x_k} \quad (2)$$

(2) denkleminin son pay'ındaki toplam $x\delta(x)$ sürekli fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığında bir Riemann toplamıdır. Paydadaki toplam ise bu aralıktaki $\delta(x)$ fonksiyonunun bir Riemann toplamıdır. Şerit daha ince bölündüğünde, (2) denklemindeki yaklaşımların iyileşmesini bekleriz ve bunun sonucu olarak

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\delta(x) dx}{\int_a^b \delta(x) dx}$$

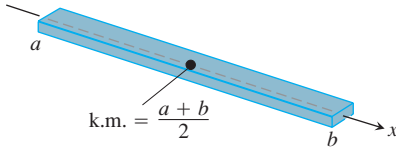
denklemini elde ederiz. $\bar{x}$ 'yi bulmak için kullanacağımız formül budur.

x- Eksenı Boyunca $\delta(x)$ Yoğunluk Fonksiyonlu İnce Bir Çubuk veya Şeridin Momenti, Kütlesi ve Kütle Merkezi

$$\text{Orijin etrafında moment:} \quad M_0 = \int_a^b x\delta(x) dx \quad (3a)$$

$$\text{Kütle:} \quad M = \int_a^b \delta(x) dx \quad (3b)$$

$$\text{Kütle merkezi:} \quad \bar{x} = \frac{M_0}{M} \quad (3c)$$



ŞEKİL 6.30 Sabit yoğunluklu düz, ince bir çubuk veya şeridin kütle merkezi uçlarının ortasında bulunur. (Örnek 1)

ÖRNEK 1 Sabit Yoğunluklu Şeritler ve Çubuklar

Sabit yoğunluklu düz, ince bir şerit veya çubuğun ağırlık merkezinin tam orta noktasında olduğunu gösterin.

Çözüm Şeridi x-ekseninin $x = a$ 'dan $x = b$ 'ye kadar ki kısmı olarak modelleriz (Şekil 6.30). Amacımız $\bar{x} = (a + b)/2$, yani a ile b arasındaki orta nokta olduğunu göstermektir.

Anahtar yoğunluğun değerinin sabit olmasıdır. Bu, (3) denklemlerindeki integrallerde $\delta(x)$ fonksiyonuna bir sabit olarak bakmamızı (δ adını verin) sağlar ve

$$M_0 = \int_a^b \delta x \, dx = \delta \int_a^b x \, dx = \delta \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_a^b = \frac{\delta}{2} (b^2 - a^2)$$

$$M = \int_a^b \delta \, dx = \delta \int_a^b 1 \, dx = \delta [x]_a^b = \delta (b - a)$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_0}{M} = \frac{\frac{\delta}{2} (b^2 - a^2)}{\delta (b - a)} \\ &= \frac{a + b}{2} \end{aligned}$$

$\bar{x}$ formülünde δ 'lar sadeleşir.

sonucunu buluruz. ■

ÖRNEK 2 Değişken Yoğunluklu Çubuk

Şekil 6.31'de 10 m uzunluğundaki çubuk soldan sağa doğru, yoğunluğu sabit olmak yerine $\delta(x) = 1 + (x/10)$ kg/m olacak şekilde kalınlaşmaktadır. Çubuğun kütle merkezini bulun.

Çözüm Orijin etrafında çubuğun momenti (3a denklemi)

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_0^{10} x \delta(x) \, dx = \int_0^{10} x \left(1 + \frac{x}{10} \right) dx = \int_0^{10} \left(x + \frac{x^2}{10} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{30} \right]_0^{10} = 50 + \frac{100}{3} = \frac{250}{3} \text{ kg} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

Moment birimi
kütle $\times$ uzunluktur.

olarak bulunur. Çubuğun kütlesi ise (3b denklemi)

$$M = \int_0^{10} \delta(x) \, dx = \int_0^{10} \left(1 + \frac{x}{10} \right) dx = \left[x + \frac{x^2}{20} \right]_0^{10} = 10 + 5 = 15 \text{ kg}.$$

olarak elde edilir. Kütle merkezi (3c denklemi)

$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{250}{3} \cdot \frac{1}{15} = \frac{50}{9} \approx 5.56 \text{ m}.$$

noktasında bulunmaktadır. ■

Düzlemdeki Bir Bölgeye Dağılmış Kütleler

Kütleleri m_k olan ve (x_k, y_k) noktalarına yerleştirilmiş sonlu bir kütle dizisi bulunduğunu varsayalım (Şekil 6.32). Sistemin kütlesi

$$\text{Sistem kütlesi: } M = \sum m_k$$

ile verilir. Her m_k kütlelerinin her eksen etrafında bir momenti vardır. x -ekseni etrafındaki momenti $m_k y_k$, y -ekseni etrafındaki momenti $m_k x_k$ 'dir. İki eksen etrafında tüm sistemin momenti şöyledir:

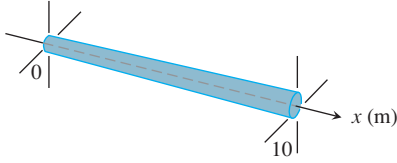
$$x\text{-ekseni etrafında moment: } M_x = \sum m_k y_k,$$

$$y\text{-ekseni etrafında moment: } M_y = \sum m_k x_k.$$

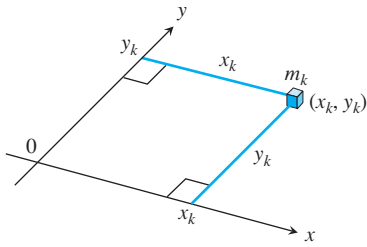
Sistemin kütle merkezinin x -koordinatı

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}$$

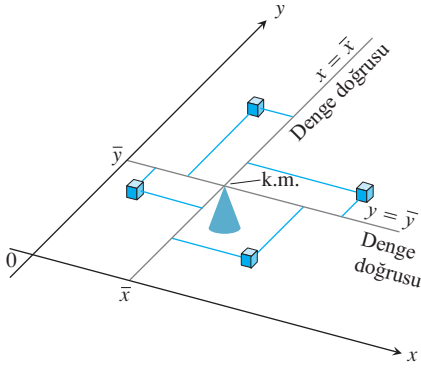
(4)



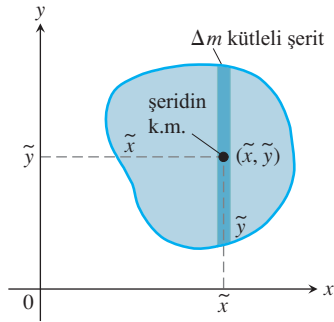
ŞEKİL 6.31 Değişken kalınlıklı bir çubuğu değişken yoğunluklu bir çubuk gibi davranabiliriz (Örnek 2).



ŞEKİL 6.32 Her m_k kütlelerinin her eksen etrafında bir momenti vardır.



ŞEKİL 6.33 İki boyutlu bir kütle dizisi kütle merkezi üzerinde dengelenir.



ŞEKİL 6.34 y-eksenine paralel şeritlere ayrılmış bir plaka. Tipik bir şeridin her eksen boyunca uyguladığı moment, kütlesi Δm şeridin kütle merkezi $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 'da toplanmış olsaydı uygulayacağı momenttir.

olarak tanımlanır. $\bar{x}$ 'nin, tek boyutlu durumda olduğu gibi, bu şekilde seçimiyle sistem $x = \bar{x}$ doğrusu etrafında dengelenir (Şekil 6.33).

Sistemin kütle merkezinin y koordinatı

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} \quad (5)$$

ile tanımlanır. $\bar{y}$ 'nin bu şekilde seçimiyle sistem $y = \bar{y}$ doğrusu etrafında da dengelenir. Kütlelerin $y = \bar{y}$ doğrusu etrafında uyguladıkları torklar birbirini götürür. Yani, denge sözü konusu olduğu sürece, sistem bütün kütlesi tek bir $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasında gibi davranır. Bu noktaya sistemin **kütle merkezi** deriz.

İnce, Düz Plakalar

Çoğu uygulamada, ince, düz bir plakanın kütle merkezini bulmamız gerekir: örneğin bir alüminyum disk veya üçgen bir çelik plakası. Bu gibi durumlarda, kütle dağılımının sürekli olduğunu varsayabiliriz ve $\bar{x}$ ile $\bar{y}$ 'yi hesaplamada kullandığımız formüllerde sonlu toplamlar yerine integraller bulunur. İntegraller aşağıdaki şekilde ortaya çıkarlar.

xy -düzleminde bir yer kaplayan ve eksenlerden birine paralel ince şeritlere ayrılmış bir plaka düşünün (Şekil 6.34'teki y -ekseni). Tipik bir şeridin kütle merkezi $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 'dir. Şeridin kütlesi Δm 'ye sanki $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 'da yoğunlaşmış gibi bakarız. Bu durumda şeridin y -ekseni etrafındaki momenti $\tilde{x} \Delta m$ olur. Şeridin x -ekseni etrafındaki momenti $\tilde{y} \Delta m$ 'dir. (4) ve (5) denklemleri

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum \tilde{x} \Delta m}{\sum \Delta m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum \tilde{y} \Delta m}{\sum \Delta m}$$

halini alır. Tek boyutlu durumda olduğu gibi, toplamlar integrallerin Riemann toplamlarıdır ve plakanın ayrıldığı şeritler darlaştıkça limit değeri olarak bu integrallere yaklaşırlar. Bu integralleri sembolik olarak şöyle yazarız:

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dm}{\int dm} \quad \text{ve} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dm}{\int dm}$$

xy -Düzleminde Bir Bölge Kaplayan İnce bir Plakanın Momentleri, Kütlesi ve Kütle Merkezi

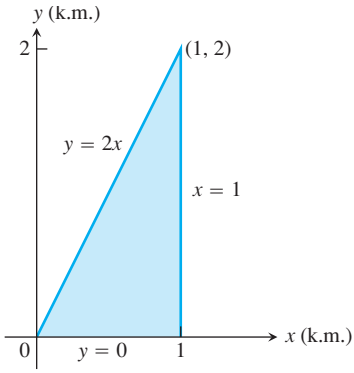
$$x\text{-ekseni etrafında moment: } M_x = \int \tilde{y} dm$$

$$y\text{-ekseni etrafında moment: } M_y = \int \tilde{x} dm \quad (6)$$

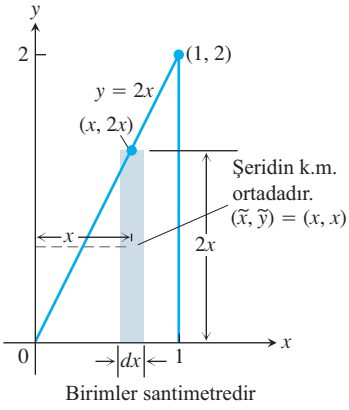
$$\text{Kütle: } M = \int dm$$

$$\text{Kütle merkezi: } \bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

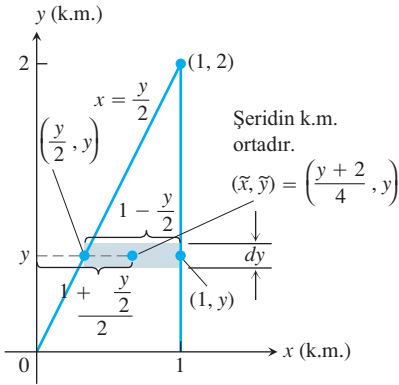
Bu integralleri hesaplamak için, plakayı koordinat düzleminde düşünür ve koordinat eksenlerinden birine paralel bir kütle şeridi çizeriz. Sonra, şeridin kütlesi dm ve şeridin kütle merkezinin $(\tilde{x}, \tilde{y})$ koordinatlarını x veya y cinsinden ifade ederiz. Son olarak, $\tilde{y} dm$, $\tilde{x} dm$ ve dm 'yi plakanın düzlemdeki konumunun belirlediği integrasyon sınırları arasında integre ederiz.



ŞEKİL 6.35 Örnek 3'teki plaka.



ŞEKİL 6.36 Örnek 3'teki plakayı dikey şeritlerle modellemek.



ŞEKİL 6.37 Örnek 3'teki plakayı yatay şeritlerle modellemek.

ÖRNEK 3 Sabit-Yoğunluklu Plaka

Şekil 6.35'te gösterilen üçgen plakanın $\delta = 3 \text{ g/cm}^2$ 'lik sabit bir yoğunluğu vardır.

- (a) Plakanın y -ekseni etrafındaki momenti M_y 'yi,
- (b) plakanın kütlesi M 'yi ve
- (c) plakanın kütle merkezinin (k.m.) x -koordinatını bulun.

Çözüm

Yöntem 1: Dikey şeritler (Şekil 6.36)

- (a) M_y momenti: Tipik dikey şeridin özellikleri şunlardır:

kütle merkezi (k.m.) : $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, x)$

uzunluk: $2x$

genişlik: dx

alan: $dA = 2x \, dx$

kütle: $dm = \delta \, dA = 3 \cdot 2x \, dx = 6x \, dx$

k.m.'nin y -ekseninden uzaklığı: $\tilde{x} = x$

Şeridin y -ekseni etrafındaki momenti şudur:

$$\tilde{x} \, dm = x \cdot 6x \, dx = 6x^2 \, dx.$$

Dolayısıyla plakanın y -ekseni etrafındaki momenti şöyle bulunur:

$$M_y = \int \tilde{x} \, dm = \int_0^1 6x^2 \, dx = 2x^3 \Big|_0^1 = 2 \text{ g} \cdot \text{cm}$$

- (b) Plakanın kütlesi:

$$M = \int dm = \int_0^1 6x \, dx = 3x^2 \Big|_0^1 = 3 \text{ g}$$

- (c) Plakanın kütle merkezinin x -koordinatı:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2 \text{ g} \cdot \text{cm}}{3 \text{ g}} = \frac{2}{3} \text{ cm}$$

Benzer bir hesaplama, M_x ve $\bar{y} = M_x/M$ 'yi bulabiliriz.

Yöntem 2: Yatay şeritler (Şekil 6.37)

- (a) M_y momenti: Tipik bir yatay şeridin kütle merkezinin y -koordinatı y 'dir (şekle bakın), dolayısıyla

$$\tilde{y} = y.$$

olur. x -koordinatı üçgenin ortasındaki noktanın x -koordinatıdır. Bu onu $y/2$ (şeridin soldaki x -değeri) ile 1 'in (şeridin sağdaki x -değeri) ortalaması yapar:

$$\tilde{x} = \frac{(y/2) + 1}{2} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2} = \frac{y+2}{4}.$$

Ayrıca elimizde şunlar vardır:

$$\begin{aligned}\text{uzunluk:} \quad & 1 - \frac{y}{2} = \frac{2-y}{2} \\ \text{genişlik:} \quad & dy \\ \text{alan:} \quad & dA = \frac{2-y}{2} dy \\ \text{kütle:} \quad & dm = \delta dA = 3 \cdot \frac{2-y}{2} dy \\ \text{k.m.'nin } y\text{-ekseninden uzaklığı: } \quad & \tilde{x} = \frac{y+2}{4}\end{aligned}$$

Şeridin y -ekseni etrafındaki momenti şöyledir:

$$\tilde{x} dm = \frac{y+2}{4} \cdot 3 \cdot \frac{2-y}{2} dy = \frac{3}{8} (4-y^2) dy$$

Plakanın y -ekseni etrafındaki momenti ise şudur:

$$M_y = \int \tilde{x} dm = \int_0^2 \frac{3}{8} (4-y^2) dy = \frac{3}{8} \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 = \frac{3}{8} \left(\frac{16}{3} \right) = 2 \text{ g} \cdot \text{cm}$$

(b) Plakanın kütlesi:

$$M = \int dm = \int_0^2 \frac{3}{2} (2-y) dy = \frac{3}{2} \left[2y - \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \frac{3}{2} (4-2) = 3 \text{ g}$$

(c) Plakanın kütle merkezinin x -koordinatı:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2 \text{ g} \cdot \text{cm}}{3 \text{ g}} = \frac{2}{3} \text{ cm}$$

Benzer bir hesaplamayla, M_x 'i ve $\bar{y}$ 'yi bulabiliriz. ■

İnce, düz bir plakanın kütle dağılımının bir simetri eksenine varsa, kütle merkezi bu eksen üzerinde olacaktır. İki simetri eksenine bulunuyorsa, kütle merkezi ikisinin kesişimindedir. Bunlar işimizi basitleştiren bilgilerdir.

ÖRNEK 4 Sabit-Yoğunluklu Plaka

Sabit δ yoğunluklu, üstten $y = 4 - x^2$ parabolü ve alttan x -ekseniyle sınırlı bölgeyi kaplayan ince bir plakanın kütle merkezini bulun (Şekil 6.38).

Çözüm Plaka y -ekseni etrafında simetrik ve yoğunluğu sabit olduğu için, kütle dağılımı y -ekseni etrafında simetriktir ve kütle merkezi y -ekseninde bulunur. Bu $\bar{x} = 0$ anlamına gelir. Geriye $\bar{y} = M_x/M$ 'yi bulmak kalır.

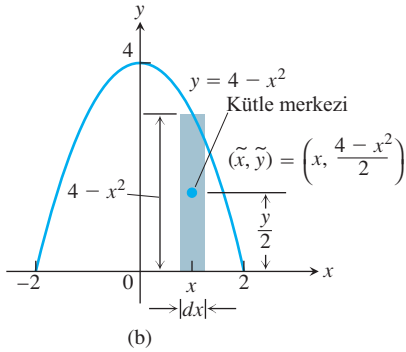
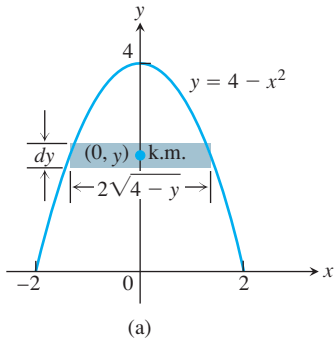
Yatay şeritlerle bir deneme hesabı (Şekil 6.38a) aşağıdaki elverişsiz integrali verir:

$$M_x = \int_0^4 2\delta y \sqrt{4-y} dy.$$

Bundan dolayı, kütle dağılımını dikey şeritlerle modelleriz (Şekil 6.38b).

Bir Tabanın Kütle Merkezi Nasıl Bulunur?

1. Plakanın xy -düzleminde resmini çizin.
2. Koordinat eksenlerinden birine paralel bir kütle şeridi çizin ve boyutlarını bulun.
3. Şeridin kütlesi dm 'yi ve kütle merkezi $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 'yi bulun.
4. $\tilde{y} dm$, $\tilde{x} dm$ ve dm 'yi integre ederek, M_x , M_y , ve M 'yi bulun.
5. Momentleri kütleyle bölerek $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ 'yi bulun.



ŞEKİL 6.38 Örnek 4'teki plakayı dikey şeritlerle (a) modellemek zahmetli bir integrasyona neden olur, dolayısıyla yatay şeritlerle (b) modelleriz.

Tipik bir yatay şeridin özellikleri şöyledir:

$$\text{kütle merkezi (k.m.): } (\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(x, \frac{4-x^2}{2}\right)$$

$$\text{uzunluk: } 4 - x^2$$

$$\text{genişlik: } dx$$

$$\text{alan: } dA = (4 - x^2) dx$$

$$\text{kütle: } dm = \delta dA = \delta(4 - x^2) dx$$

$$\text{k.m.'nin } x\text{-ekseninden uzaklığı: } \tilde{y} = \frac{4 - x^2}{2}$$

Şeridin x -ekseni etrafındaki momenti şöyledir:

$$\tilde{y} dm = \frac{4 - x^2}{2} \cdot \delta(4 - x^2) dx = \frac{\delta}{2} (4 - x^2)^2 dx$$

Dolayısıyla plakanın x -ekseni etrafındaki momenti şöyle bulunur:

$$\begin{aligned} M_x &= \int \tilde{y} dm = \int_{-2}^2 \frac{\delta}{2} (4 - x^2)^2 dx \\ &= \frac{\delta}{2} \int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx = \frac{256}{15} \delta \end{aligned} \quad (7)$$

Plakanın kütlesi şudur:

$$M = \int dm = \int_{-2}^2 \delta(4 - x^2) dx = \frac{32}{3} \delta \quad (8)$$

Dolayısıyla,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{(256/15) \delta}{(32/3) \delta} = \frac{8}{5}$$

olur. Plakanın kütle merkezi

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{5}\right)$$

noktasındadır.

ÖRNEK 5 Değişken Yoğunluklu Plaka

Örnek 4'teki plakanın kütle merkezini (x, y) 'deki yoğunluk $\delta = 2x^2$ yani noktanın y -eksenine uzaklığının karesinin iki katı olması durumunda bulun.

Çözüm Kütle dağılımı hala y -ekseni etrafında simetriktir, dolayısıyla $\bar{x} = 0$ olur. $\delta = 2x^2$ ile, (7) ve (8) denklemleri

$$\begin{aligned} M_x &= \int \tilde{y} \, dm = \int_{-2}^2 \frac{\delta}{2} (4 - x^2)^2 \, dx = \int_{-2}^2 x^2 (4 - x^2)^2 \, dx \\ &= \int_{-2}^2 (16x^2 - 8x^4 + x^6) \, dx = \frac{2048}{105} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} M &= \int dm = \int_{-2}^2 \delta (4 - x^2) \, dx = \int_{-2}^2 2x^2 (4 - x^2) \, dx \\ &= \int_{-2}^2 (8x^2 - 2x^4) \, dx = \frac{256}{15} \end{aligned} \quad (8)$$

halini alırlar. Dolayısıyla,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2048}{105} \cdot \frac{15}{256} = \frac{8}{7}$$

olur. Plakanın yeni kütle merkezi

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{7}\right)$$

noktasındadır.

ÖRNEK 6 Sabit Yoğunluklu Tel

Sabit δ yoğunluklu a yarıçaplı bir yarım çember şeklindeki telin kütle merkezini bulun.

Çözüm Teli $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarım çemberiyle modelleriz (Şekil 6.39). Kütle dağılımı y -ekseni etrafında simetriktir, dolayısıyla $\bar{x} = 0$ olur. $\bar{y}$ 'yi bulmak için, teli kısa parçalara böldüğümüzü düşünürüz. Tipik bir parçanın özellikleri şöyledir (Şekil 6.39a):

$$\text{uzunluk: } ds = a \, d\theta$$

$$\text{kütle: } dm = \delta \, ds = \delta a \, d\theta$$

$$\text{k.m.'nin } x\text{-eksenine uzaklığı: } \tilde{y} = a \sin \theta.$$

birim uzunluktaki
kütle kere uzunluk

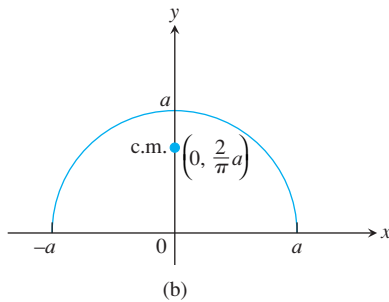
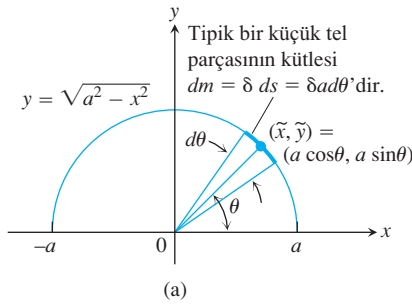
Dolayısıyla,

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y} \, dm}{\int dm} = \frac{\int_0^\pi a \sin \theta \cdot \delta a \, d\theta}{\int_0^\pi \delta a \, d\theta} = \frac{\delta a^2 [-\cos \theta]_0^\pi}{\delta a \pi} = \frac{2}{\pi} a$$

buluruz. Kütle merkezi simetri eksenini üzerinde $(0, 2a/\pi)$, noktasında, orijinden tele olan uzaklığın yaklaşık üçte ikisinde bulunmaktadır (Şekil 6.39b).

Merkezler

Yoğunluk fonksiyonu sabitken, $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ formüllerinin pay ve paydalarından sadeleşir. Bu bölümdeki neredeyse tüm örneklerde durum böyleydi. $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ söz konusu olduğu süreçte, $\delta = 1$ bile olabilirdi. Yani, yoğunluk sabitken, kütle merkezinin konumu cismin yapıldığı malzemenin değil, cismin geometrisinin bir özelliğidir. Böyle durumlarda, mühendisler kütle merkezine, “Bir üçgenin veya katı koninin merkezini bulun” derken olduğu gibi, şeklin **merkezi** diyebilirler. Bunun için δ 'yı bire eşitleyin ve $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ 'yi daha önceki gibi, momentleri kütleyle bölerek, hesaplayın.

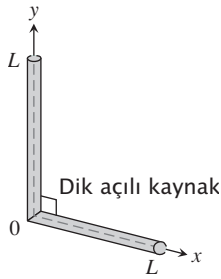


ŞEKİL 6.39 Örnek 6'teki yarım çember şeklindeki tel. (a) Kütle merkezini bulmakta kullanılan boyut ve değişkenler. (b) Kütle merkezi tel üzerinde değildir.

ALİŞTIRMALAR 6.4

İnce Çubuklar

- 80 lb'lik bir çocukla 100 lb'lik bir çocuk bir tahtırevellide dengede durmaktadırlar. 80 lb'lik çocuk destekten 5 ft uzaklıktadır. 100 lb'lik çocuğun destekten uzaklığı nedir?
- Bir kütüğün uçları iki teraziye konulmuştur. Bir terazi 100 kg, diğeri 200 kg okumaktadır. Kütüğün kütle merkezi nerededir?
- Uzunlukları eşit iki ince çelik çubuğun uçları kaynakla birleştirilerek, dik açılı bir çerçeve yapılmıştır. Çerçevenin kütle merkezi-nin yerini bulun. (İpucu: Her çubuğun kütle merkezi nerededir?)



- İki çelik çubuğun uçlarını kaynaklayarak dik açılı bir çerçeve yapıyorsunuz. Çubuklardan birinin uzunluğu diğerinin iki katıdır. Çerçevenin kütle merkezi nerededir? (İpucu: Her çubuğun kütle merkezi nerededir?)

5-12 alıştırmalarında x -ekseninde değişik aralıklarda bulunan ince çubukların yoğunluk fonksiyonları verilmektedir. (3a-c) denklemlerini kullanarak, her çubuğun orijin etrafındaki momentini, kütlelerini ve kütle merkezini bulun.

- $\delta(x) = 4$, $0 \leq x \leq 2$
- $\delta(x) = 4$, $1 \leq x \leq 3$
- $\delta(x) = 1 + (x/3)$, $0 \leq x \leq 3$
- $\delta(x) = 2 - (x/4)$, $0 \leq x \leq 4$
- $\delta(x) = 1 + (1/\sqrt{x})$, $1 \leq x \leq 4$
- $\delta(x) = 3(x^{-3/2} + x^{-5/2})$, $0.25 \leq x \leq 1$
- $\delta(x) = \begin{cases} 2 - x, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$
- $\delta(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Sabit Yoğunluklu İnce Plakalar

13-24 alıştırmalarında, verilen bölgede bulunan sabit δ yoğunluklu ince plakanın kütle merkezini bulun.

- $y = x^2$ parabolü ve $y = 4$ doğrusu ile sınırlanmış bölge.
- $y = 25 - x^2$ parabolü ve x -ekseni ile sınırlanmış bölge.
- $y = x - x^2$ parabolü ve $y = -x$ doğrusu ile sınırlanmış bölge.
- $y = x^2 - 3$ ve $y = -2x^2$ parabolleriyle sınırlanmış bölge.

- y -ekseni ve $x = y - y^3$, $0 \leq y \leq 1$ eğrisiyle sınırlanmış bölge.
- $x = y^2 - y$ eğrisi ve $y = x$ doğrusuyla sınırlanmış bölge.
- x -ekseni ve $y = \cos x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ parabolleriyle sınırlanmış bölge.
- x -ekseni ve $y = \sec^2 x$, $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$ eğrisiyle sınırlanmış bölge.
- $y = 2x^2 - 4x$ ve $y = 2x - x^2$ parabolleriyle sınırlanmış bölge.
- a. Birinci dörtte bir bölgeden $x^2 + y^2 = 9$ çemberi ile kesilmiş bölge.
b. x -ekseni ve $y = \sqrt{9 - x^2}$ yarım çemberiyle sınırlanmış bölge.
Yanıtınızı (a) şıkkındaki yanıtla karşılaştırın.
- Birinci dörtte bir bölgede $x^2 + y^2 = 9$ çemberi ve $x = 3$ ve $y = 3$ doğruları arasında kalan “üçgen” şeklindeki bölge. (İpucu: Alanı bulmak için geometri kullanın.)
- Üstten $y = 1/x^3$ eğrisi, alttan $y = -1/x^3$ eğrisi ve soldan ve sağdan $x = 1$ ve $x = a > 1$ doğrularıyla sınırlanmış bölge. Ayrıca $\lim_{a \rightarrow \infty} \bar{x}$ 'yi de bulun.

Değişken Yoğunluklu İnce Plakalar

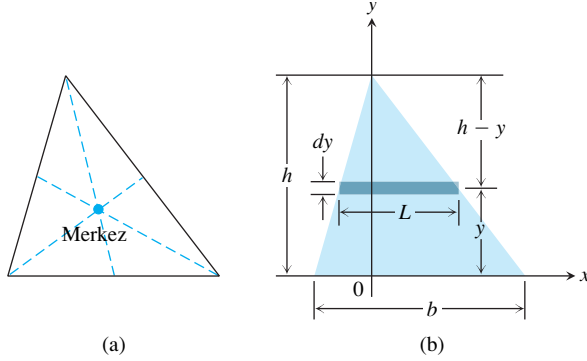
- Plakanın (x, y) noktasındaki yoğunluğu $\delta(x) = x^2$ ise, x -ekseni ile $y = 2/x^2$, $1 \leq x \leq 2$, eğrisi arasında kalan ince plakanın kütle merkezini bulun.
- Plakanın (x, y) noktasındaki yoğunluğu $\delta(x) = 12x$ ise, alttan $y = x^2$ parabolü ve üstten $y = x$ doğrusuyla sınırlı bölgeyi kaplayan ince plakanın kütle merkezini bulun.
- $y = \pm 4/\sqrt{x}$ eğrileri ve $x = 1$ ve $x = 4$ doğrularıyla sınırlı bölge y -ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor.
a. Dönel cismin hacmini bulun.
b. Bölgeyi kaplayan ince plakanın (x, y) noktasındaki yoğunluğu $\delta(x) = 1/x$ ise plakanın kütle merkezini bulun.
c. Plakayı çizin ve çiziminizde kütle merkezini belirtin.
- $y = 2/x$ eğrisi ve $x = 1$ 'den $x = 4$ 'e kadar x -ekseni ile sınırlı bölge x -ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor.
a. Dönel cismin hacmini bulun.
b. Bölgeyi kaplayan ince plakanın (x, y) noktasındaki yoğunluğu $\delta(x) = \sqrt{x}$ ise plakanın kütle merkezini bulun.
c. Plakayı çizin ve çiziminizde kütle merkezini belirtin.

Üçgenlerin Merkezleri

- Bir üçgenin merkezi üçgenin kenar ortaylarının kesişim noktasındadır (Şekil 6.40a) Bir üçgenin her kenarından karşısındaki köşeye olan uzaklığın üçte birinde bulunan noktanın üçgenin üç kenarortayının kesiştiği nokta olduğunu hatırlayabilirsiniz. Üçgenin merkezinin de kenar ortayların kesişim noktasında olduğu-

nu, merkezin de kenarlardan köşelere olan uzaklığın üçte birinde olduğunu göstererek ispatlayın. Bunu yapmak için, aşağıdaki adımları izleyin.

- Üçgenin bir kenarını Şekil 6.40b'deki gibi x -eksenine yerleştirin. dm 'yi L ve dy cimsinden ifade edin.
- Benzer üçgenler kullanarak $L = (b/h)(h - y)$ olduğunu gösterin. L 'nin bu ifadesini dm formülünde yerine koyun.
- $\bar{y} = h/3$ olduğunu gösterin.
- Diğer kenarlar için de aynısını uygulayın.



ŞEKİL 6.40 Alıştırma 29'daki üçgen. (a) Kütlesi merkezi. (b) Kütlesi merkezi bulmak için kullanılacak boyut ve değişkenler.

Alıştırma 29'un sonuçlarını kullanarak 30–34 alıştırmalarında köşeleri verilen üçgenlerin kütlesi merkezlerini bulun. (İpucu: Önce her üçgeni çiziniz.)

30. $(-1, 0), (1, 0), (0, 3)$
31. $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$
32. $(0, 0), (a, 0), (0, a)$
33. $(0, 0), (a, 0), (0, b)$
34. $(0, 0), (a, 0), (a/2, b)$

İnce Teller

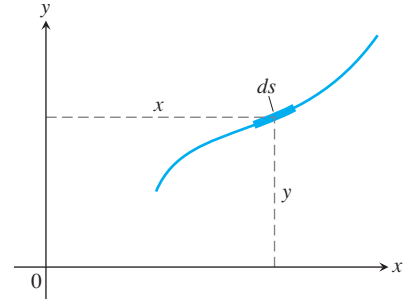
35. **Sabit yoğunluk** $x = 0$ 'dan $x = 2$ 'ye kadar $y = \sqrt{x}$ eğrisi üzerinde bulunan sabit yoğunluklu telin x -ekseni etrafındaki momentini bulun.
36. **Sabit yoğunluk** $x = 0$ 'dan $x = 1$ 'e kadar $y = x^3$ eğrisi üzerinde bulunan sabit yoğunluklu telin x -ekseni etrafındaki momentini bulun.
37. **Değişken yoğunluk** Örnek 6'daki telin yoğunluğunun $\delta = k \sin \theta$ olduğunu varsayın (k sabit). Kütlesi merkezini bulun.
38. **Değişken yoğunluk** Örnek 6'daki telin yoğunluğunun $\delta = 1 + k|\cos \theta|$ olduğunu varsayın (k sabit). Kütlesi merkezini bulun.

Mühendislik Formülleri

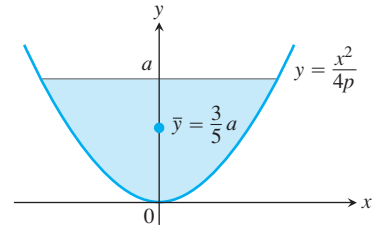
39–42 alıştırmalarındaki ifadeleri ve formülleri doğrulayın.

39. Düzlemde türevlenebilir bir eğrinin merkezinin koordinatları şunlardır:

$$\bar{x} = \frac{\int x \, ds}{\text{uzunluk}}, \quad \bar{y} = \frac{\int y \, ds}{\text{uzunluk}}$$

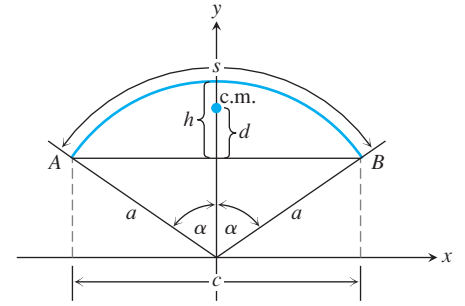


40. $y = x^2/(4p)$ denkleminde $p > 0$ 'ın değeri ne olursa olsun, aşağıda gösterilen parabolik parçanın merkezinin y -koordinatı $\bar{y} = (3/5)a$ 'dır.



41. Merkezleri orijinde bulunan ve y -ekseni etrafında simetrik olan çembersel yaylar şeklindeki sabit yoğunluklu teller ve ince çubukların kütlesi merkezlerinin y -koordinatı şöyledir:

$$\bar{y} = \frac{a \sin \alpha}{\alpha} = \frac{ac}{s}.$$



42. (Alıştırma 41'in devamı)

- a. α küçük olduğunda, merkezden AB kirişine olan d uzaklığının yaklaşık olarak $2h/3$ olduğunu (şekildeki gösterimle) aşağıdaki adımları izleyerek gösterin.

i.

$$\frac{d}{h} = \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \alpha \cos \alpha} \quad (9)$$

olduğunu gösterin.

ii.

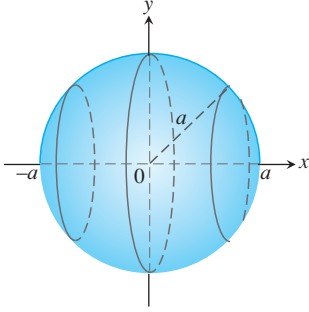
$$f(\alpha) = \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \alpha \cos \alpha}$$

fonsiyonunun grafiğini çizin ve trace özelliğini kullanarak $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} f(\alpha) \approx 2/3$ olduğunu gösterin.

- b. Hata (d ile $2h/3$ arasındaki fark) 45° 'den büyük açılar için bile küçüktür. Bunu (9) denkleminin sağ tarafını $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ ve 1.0 radyan için hesaplayarak kendiniz görün.

6.5

Dönel Yüzeylerin Alanları ve Pappus Teoremleri



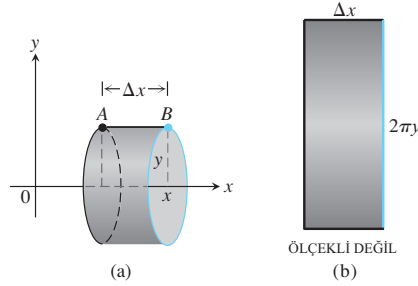
ŞEKİL 6.41 Merkezi orijinde olan a yarıçaplı $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarı çemberini döndürmek alanı $4\pi a^2$ olan küresel bir yüzey üretir.

İp atlarken, ip çevrenizde bir yüzey tarar, dönel yüzey olarak adlandırılan bir yüzey. Tahmin edebileceğiniz gibi, bu yüzeyin alanı ipin uzunluğuna ve ipin her parçasının dönme ekseninden ne kadar uzağa gittiğine bağlıdır. Bu bölümde dönel yüzeylerin alanlarını tanımlıyoruz. Daha karmaşık yüzeylerin alanları Bölüm 16'da verilecektir.

Yüzey Alanı Tanımlamak

Dönel yüzeyin alanı tanımının klasik geometrideki kürelerin, dairesel silindirlerin ve konilerin yüzey alanları için bilinen sonuçlarla uyumlu olmasını isteriz. Dolayısıyla, yukarıdaki atlama ipi, x -ekseni etrafında döndürülen a yarıçaplı bir yarı çember şeklini alırsa (Şekil 6.41), yüzey alanı $4\pi a^2$ olan bir küre üretir.

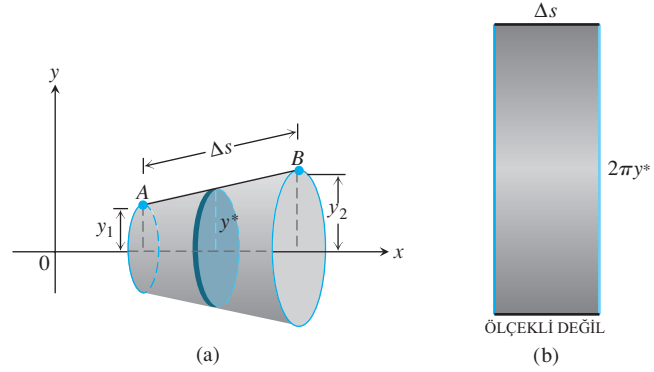
Genel eğrileri ele almadan önce, yatay ve eğimli doğru parçalarının x -ekseni etrafında döndürülmeleri ile başlıyoruz. Uzunluğu Δx olan AB doğru parçasını (Şekil 6.42a) x -ekseni etrafında döndürürsek yüzey alanı $2\pi y \Delta x$ olan bir silindir üretiriz. Bu alan, kenar uzunlukları Δx ve $2\pi y$ olan bir dikdörtgenin alanı ile aynıdır (Şekil 6.42b). $2\pi y$ uzunluğu AB doğrusu üzerindeki (x, y) noktasının x -ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen y yarıçaplı çemberin çevresidir.



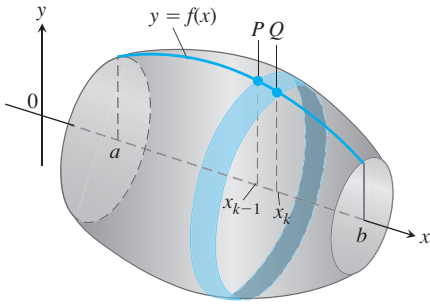
ŞEKİL 6.42 (a) Uzunluğu Δx olan yatay AB doğru parçasının x -ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen silindirik yüzeyin alanı $2\pi y \Delta x$ dir. (b) Silindirik yüzeyin kesilip açılmış hali, bir dikdörtgen.

AB doğru parçasının uzunluğunun Δs olduğunu ve yatay olmak yerine eğimli olduğunu varsayın. Bu defa AB doğru parçası x -ekseni etrafında döndürüldüğünde bir kesik koni elde edilir Şekil (6.43a). Klasik geometriden, bu kesik koninin yüzey alanı, eğimli AB doğru parçasının x -ekseninden ortalama yüksekliği $y^* = (y_1 + y_2)/2$ olmak üzere, $2\pi y^* \Delta s$ 'dir. Bu yüzey alanı, kenar uzunlukları Δs ve $2\pi y^*$ olan bir dikdörtgenin alanı ile aynıdır (Şekil 6.43b).

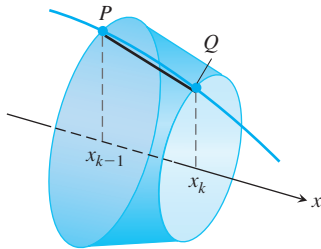
Daha genel eğrilerin x -ekseni etrafında döndürülmeleri ile süpürülen yüzeylerin alanlarını tanımlamak için bu geometrik prensipleri kullanalım. Negatif olmayan ve sürekli bir $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ fonksiyonunun grafiğinin x -ekseni etrafında döndürülmesi ile süpürülen yüzeyin alanını bulmak istediğimizi varsayalım. Her zamanki gibi, $[a, b]$ kapalı aralığının bir bölünüşünü alırsak ve bölünüş noktaları yardımıyla grafiği kısa yaylara ayırırız. Şekil 6.44'te tipik bir PQ yayı ve f 'nin grafiğinin bir parçası olarak süpürdüğü bant görülmektedir.



ŞEKİL 6.43 (a) Uzunluğu Δs olan eğimli AB doğru parçasının x -ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen kesik koninin alanı $2\pi y^* \Delta s$ dir. (b) AB doğru parçasının x -ekseninden ortalama yüksekliği $y^* = \frac{y_1 + y_2}{2}$, için, dikdörtgenin alanı.



ŞEKİL 6.44 Negatif olmayan bir $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, fonksiyonunun grafiğinin x -ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen yüzey. Yüzey, PQ yayının süpürdüğü bant gibi bantların bir birleşimidir.



ŞEKİL 6.45 P ve Q noktalarını birleştiren doğru parçası bir kesik koni süpürür.

PQ yayı x -ekseni etrafında dönerken, P ve Q noktalarını birleştiren doğru parçası x -ekseninde bulunan bir kesik koni süpürür (Şekil 6.45). Bu kesik koninin yüzey alanı, PQ yayı tarafından süpürülen bant'ın yüzey alanına yaklaşır. Şekil 6.45'te gösterilen kesik koninin yüzey alanı, P ve Q noktalarını birleştiren doğru parçasının x -ekseninden ortalama yüksekliği y^* ve uzunluğu L (önceki gibi) olmak üzere, $2\pi y^* L$ 'dir. $f \geq 0$ olduğundan, Şekil 6.46'dan, doğru parçasının ortalama yüksekliğinin $y^* = (f(x_{k-1}) + f(x_k))/2$ olduğunu ve uzunluğun $L = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$ olduğunu görürüz. Bu nedenle,

$$\begin{aligned} \text{Kesik koni yüzey alanı} &= 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ &= \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \end{aligned}$$

dir.

PQ yayı gibi yayların süpürdükleri bantların alanlarının toplamı olan orijinal yüzey alanına, kesik konilerin alanlarının toplamı olan

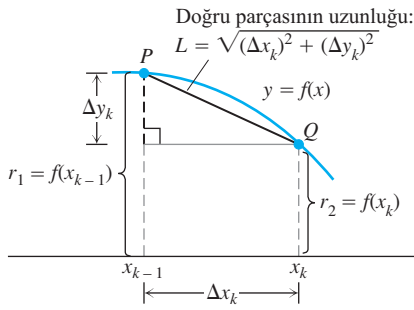
$$\sum_{k=1}^n \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \quad (1)$$

ile yaklaşımda bulunulur. $[a, b]$ 'nin bölünüşünün noktaları arttıkça yaklaşımın iyileşmesini bekleriz. Üstelik, f fonksiyonu türevlenebilir ise, Ortalama Değer Teoremine göre eğri üzerinde P ve Q noktaları arasında teğetin PQ doğru parçasına paralel olduğu bir $(c_k, f(c_k))$ noktası vardır (Şekil 6.47). Bu noktada

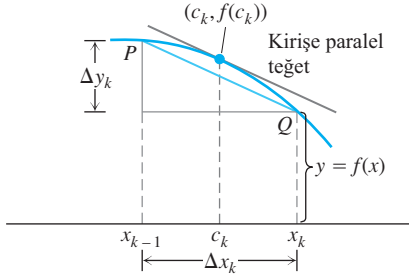
$$f'(c_k) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$$

$$\Delta y_k = f'(c_k) \Delta x_k$$

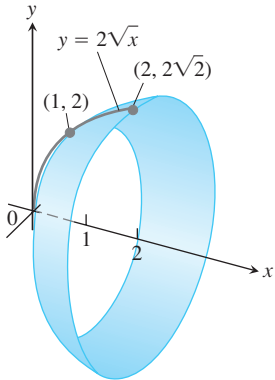
dir.



ŞEKİL 6.46 PQ yayı ve doğru parçası ile eşlenen boyutlar.



ŞEKİL 6.47 f düzgün ise, Ortalama Değer Teoremi, teğetin PQ doğru parçasına paralel olduğu bir c_k noktasının varlığını garanti eder.



ŞEKİL 6.48 Örnek 1'de bu yüzeyin alanını hesaplıyoruz

Δy_k yerine bu dönüşümü yapmakla (1) Denklemi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k)) \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k) \Delta x_k)^2} \\ = \sum_{k=1}^n \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k)) \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k \end{aligned} \quad (2)$$

halini alır. Bu toplamlar herhangi bir fonksiyonun Riemann toplamları değildir çünkü, x_{k-1} , x_k ve c_k noktaları aynı değildir. Ancak, ileri analizden bir teorem şunu garanti eder: $[a, b]$ 'nin bölünüşünün normu sıfıra giderken (2) Denklemindeki toplamlar

$$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

integraline yakınsarlar. Bu nedenle bu integrali, f fonksiyonunun a 'dan b 'ye kadar grafiğinin süpürdüğü yüzeyin alanı olarak tanımlarız.

TANIM

x -Eksen Etrafında Dönme için Yüzey Alanı

$f(x) \geq 0$ fonksiyonu $[a, b]$ 'de sürekli olarak türevlenebilirse, $y = f(x)$ eğrisini x -ekseni etrafında döndürerek üretilen yüzeyin **alanı**

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (3)$$

dir.

(3) Denklemindeki karekök, Bölüm 6.3 Denklem (2)'de, yüzeyi üreten eğrinin uzunluğu formülünde gözüken karekökle aynıdır.

ÖRNEK 1 Yüzey Alanı Formülünü Uygulamak

$y = 2\sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 2$, eğrisinin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanını bulun (Şekil 6.48).

Çözüm

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad \text{Denk. (3)}$$

formülünü

$$\begin{aligned} a = 1, \quad b = 2, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \\ \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} \\ = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

olarak hesaplarız. Bu değerlerle, alan şu şekilde bulunur:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^2 2\pi \cdot 2\sqrt{x} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} dx = 4\pi \int_1^2 \sqrt{x+1} dx \\
 &= 4\pi \cdot \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{8\pi}{3} (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}).
 \end{aligned}$$

y-Eksen Etrafında Dönme

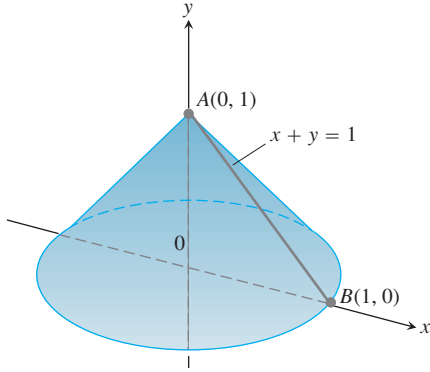
y-ekseni etrafında dönme için, (3) denkleminde x yerine y yazılır.

y-Eksen Etrafında Dönme İçin Yüzey Alanı

$x = g(y) \geq 0$, $[c, d]$ 'de sürekli olarak türevlenebilirse, $x = g(y)$ eğrisini y-ekseni etrafında döndürerek üretilen yüzeyin alanı

$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy \quad (4)$$

dir.



ŞEKİL 6.49 AB doğru parçasını y-ekseni etrafında döndürmek yanal yüzey alanını iki farklı şekilde hesaplayabileceğimiz bir koni oluşturur (Örnek 2).

ÖRNEK 2 y-Eksen Etrafında Dönme İçin Alan Bulmak

$x = 1 - y$, $0 \leq y \leq 1$, doğru parçası y-ekseni etrafında döndürülerek Şekil 6.49'daki koni üretiliyor. Yanal yüzey alanını bulun (taban alanı hariç).

Çözüm Bu bir geometri formülüyle kontrol edebileceğimiz bir hesaptır.

$$\text{Yanal yüzey alanı} = \frac{\text{taban çevresi}}{2} \times \text{yanal ayırt uzunluğu} = \pi\sqrt{2}.$$

(4) denkleminin nasıl aynı sonucu verdiğini görmek için

$$\begin{aligned}
 c &= 0, \quad d = 1, \quad x = 1 - y, \quad \frac{dx}{dy} = -1 \\
 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} &= \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

alır ve denklemini hesaplarız:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^1 2\pi(1 - y)\sqrt{2} dy \\
 &= 2\pi\sqrt{2} \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \pi\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Sonuçlar, olması gerektiği gibi, birbirini tutmaktadır.

Parametrize Eğriler

Döndürme hangi koordinat eksenini etrafında yapılırsa yapılsın, (3) ve (4) denklemlerinde gözüken karekökler, Bölüm 6.3'te yay uzunluğu formüllerinde gözükenlerle aynıdır. f ve g $[a, b]$ üzerinde sürekli olarak türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere, eğri $x = f(t)$ ve $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$ denklemleri ile parametrelenmişse yay uzunluğu formülünde karşı gelen karekök

$$\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

dir. Bu gözlem, düzgün parametrize eğrilerin döndürülmesi ile elde edilen yüzey alanları için aşağıdaki formüllere yol açar.

Parametrize Eğriler İçin Dönel Yüzey Alanı

Düzgün bir $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, eğrisi, t a 'dan b 'ye doğru artarken sadece bir defa katediliyorsa, eğriyi koordinat eksenleri etrafında döndürerek üretilen dönel yüzeylerin alanları aşağıdaki gibidir.

1. x -ekseni etrafında dönme ($y \geq 0$):

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (5)$$

2. y -ekseni etrafında dönme ($x \geq 0$):

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (6)$$

Uzunlukta olduğu gibi, belirtilen kriteri karşılayan herhangi uygun bir parametrisasyonla yüzey alanını hesaplayabiliriz.

ÖRNEK 3 Yüzey Alanı Formülünü Uygulamak

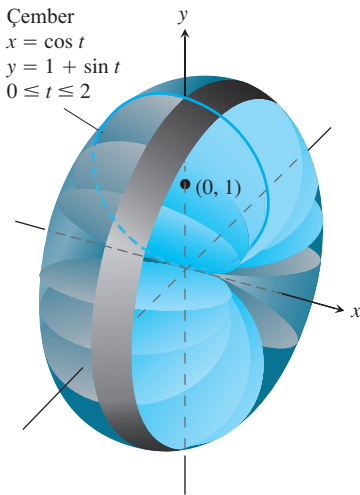
xy -düzleminde merkezi $(0, 1)$ noktasında olan 1 yarıçaplı çemberin standart parametrisasyonu

$$x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

ile verilir. Bu parametrisasyonu kullanarak, çemberin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle süpürülen yüzeyin alanını bulun (Şekil 6.50).

Çözüm Formülü hesaplarız:

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt && \text{x-ekseni etrafında dönme} \\ & && \text{için (5) denklemi} \\ & && y = 1 + \sin t > 0 \\ &= \int_0^{2\pi} 2\pi(1 + \sin t) \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt \\ & && 1 \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} (1 + \sin t) dt \\ &= 2\pi [t - \cos t]_0^{2\pi} = 4\pi^2 \end{aligned}$$



ŞEKİL 6.50 Örnek 3'te bu parametrize eğri tarafından süpürülen dönel yüzeyin alanını hesaplıyoruz.

Kısa Diferansiyel Form

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad \text{ve} \quad S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

denklemleri çoğunlukla $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ yay uzunluk diferansiyeli cinsinden

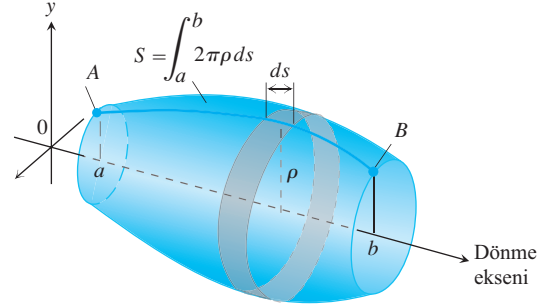
$$S = \int_a^b 2\pi y ds \quad \text{ve} \quad S = \int_c^d 2\pi x ds$$

şeklinde yazılır. Bunların birincisinde, y x -ekseninden ds yay uzunluğu elemanına olan uzaklıktır. İkincisinde ise, x y -ekseninden ds yay uzunluğu elemanına olan uzaklıktır. İki integral de, ρ dönme ekseninden bir ds yay uzunluğu elemanına kadar yarıçap olmak üzere

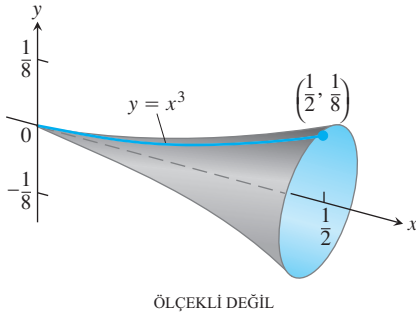
$$S = \int 2\pi(\text{yarıçap})(\text{bant genişliği}) = \int 2\pi\rho ds \quad (7)$$

şeklinde (Şekil 6.51).

Herhangi belirli bir problemde, ρ yarıçap fonksiyonunu ve ds yay uzunluğu diferansiyelini ortak bir değişken cinsinden ifade eder ve bu değişken için integrasyon sınırlarını bulursunuz.



ŞEKİL 6.51 AB yayının burada gösterilen eksen etrafında döndürülmesiyle taranan yüzeyin alanı $\int_a^b 2\pi\rho ds$ 'tir. Kesin ifade ρ 'nun ve ds 'nin formüllerine bağlıdır.



ŞEKİL 6.52 $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1/2$ eğrisini x -ekseni etrafında döndürerek üretilen yüzey bir şampanya kadehi tasarımı olabilir (Örnek 4).

ÖRNEK 4 Diferansiyel Formu Yüzey Alanı İçin Kullanmak

$y = x^3$, $0 \leq x \leq 1/2$ eğrisinin x -ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen yüzeyin alanını bulun (Şekil 6.52).

Çözüm İşe kısa diferansiyel formula başlarız:

$$\begin{aligned} S &= \int 2\pi\rho ds \\ &= \int 2\pi y ds \\ &= \int 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2}. \end{aligned}$$

x -ekseni etrafında dönme için,
 $0 \leq x \leq 1/2$ üzerinde yarıçap
fonksiyonu $\rho = y > 0$ on $0 \leq x \leq 1/2$.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Şimdi dy 'yi mi dx cinsinden, yoksa dx 'i mi dy cinsinden ifade edeceğimize karar veririz. Denklemin orijinal hali, $y = x^3$, dy 'yi dx cinsinden ifade etmemizi kolaylaştırır, dolayısıyla hesabımıza

$$y = x^3, \quad dy = 3x^2 dx, \quad \text{ve} \quad \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (3x^2 dx)^2} \\ = \sqrt{1 + 9x^4} dx.$$

ile devam ederiz. Bu değişiklikleri yaptığımızda, x integrasyon değişkeni olur ve

$$\begin{aligned} S &= \int_{x=0}^{x=1/2} 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \int_0^{1/2} 2\pi x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{36} \right) \left(\frac{2}{3} \right) (1 + 9x^4)^{3/2} \Big|_0^{1/2} \\ &= \frac{\pi}{27} \left[\left(1 + \frac{9}{16} \right)^{3/2} - 1 \right] \\ &= \frac{\pi}{27} \left[\left(\frac{25}{16} \right)^{3/2} - 1 \right] = \frac{\pi}{27} \left(\frac{125}{64} - 1 \right) \\ &= \frac{61\pi}{1728}. \end{aligned}$$

$u = 1 + 9x^4$,
 $du/36 = x^3 dx$;
alın, integre edin
ve değerleri
yerine koyun.

bulunur.

Konik Bantlara Karşı Silindirik Bantlar

Şekil 6.53'te önerildiği gibi, yüzey alanını neden konik bantlar yerine silindirik bantlarla yaklaşım yaparak bulmayalım? Bu şekilde elde edeceğimiz Riemann toplamı da konik bantlardan elde edilenler kadar iyi yakınsalar ve ortaya çıkan integral daha basittir. Bu durumda x -ekseni etrafında dönme için, (7) denkleminde yarıçap $\rho = y$ ve bant genişliği $ds = dx$ 'dir. Bu, (3) tanım denklemi yerine

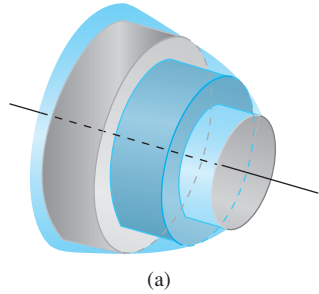
$$S = \int_a^b 2\pi f(x) dx \quad (8)$$

integral formülüne yol açar. Bu yeni formüldeki problem, klasik geometrinin yüzey alanı formülleri ile ve başlangıçta belirttiğimiz amaçlarımızla uyumlu sonuçlar vermemesidir. Sadece hoş görünümlü bir integral bulmamız bunun istediğimizi yapacağı anlamına gelmez (Bkz. Alıştırma 40).

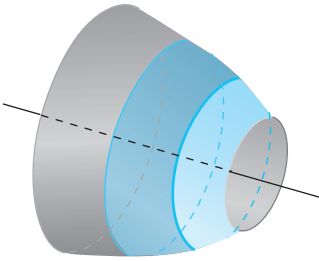
UYARI Yüzey alanı hesaplamak için (8) denklemini kullanmayın. Doğru sonucu *vermez*.

Pappus Teoremleri

Üçüncü asırda, Pappus isminde İskenderiyeli bir Yunan kütle merkezlerini dönel yüzeyler ve dönel cisimler ile ilişkilendiren iki formül keşfetti. Bu formüller başka türlü çok uzun sürecek hesaplamalar için kestirme yollar sağlar.



(a)



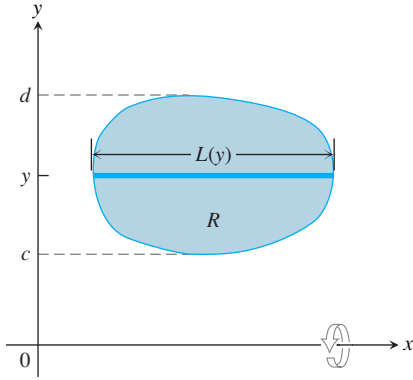
(b)

ŞEKİL 6.53 Yüzey alanına yaklaşımda bulunmak için (b) konik bantlar yerine neden (a) silindirik bantlar kullanılsın?

TEOREM 1 Hacimler İçin Pappus Teoremi

Düzlemdeki bir bölge düzlemdeki bölgenin içiyle kesişmeyen bir doğru etrafında bir kere döndürülürse, üreteceği dönel cismin hacmi bölgenin alanı kere dönme sırasında bölgenin merkezinin aldığı yola eşittir. ρ dönme ekseninden merkeze olan uzaklıksa, hacim şu şekilde ifade edilir.

$$V = 2\pi\rho A. \quad (9)$$



ŞEKİL 6.54 R bölgesi x -ekseni etrafında (bir defa) döndürülerek bir dönel cisim üretilmektedir. 1700 yaşındaki bir teorem dönel cismin hacminin, bölgenin alanıyla kütle merkezinin dönüş sırasında aldığı yol çarpılarak hesaplanabileceğini söyler.

İspat R bölgesi birinci dördte bir bölgede olmak üzere, dönme eksenini x -ekseni olarak seçeriz (Şekil 6.54). y noktasında R 'nin y -eksenine dik olan kesitinin uzunluğu $L(y)$ olsun. $L(y)$ 'nin sürekli olduğunu varsayıyoruz.

Silindirik kabuklar yöntemiyle, bölgeyi x -eksen etrafında döndürerek üretilen dönel cismin hacmi şöyle bulunur:

$$V = \int_c^d 2\pi \left(\begin{array}{c} \text{kabuk} \\ \text{yarıçapı} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{kabuk} \\ \text{yüksekliği} \end{array} \right) dy = 2\pi \int_c^d y L(y) dy. \quad (10)$$

R 'nin merkezinin y -koordinatı

$$\bar{y} = \frac{\int_c^d \tilde{y} dA}{A} = \frac{\int_c^d y L(y) dy}{A} \quad \tilde{y} = y, dA = L(y)dy$$

olarak bulunur, dolayısıyla

$$\int_c^d y L(y) dy = A\bar{y}.$$

olur. (10) denklemindeki son integral yerine $A\bar{y}$ yazmak $V = 2\pi\bar{y}A$ verir. ρ yarıçapı $\bar{y}$ 'ye eşit olduğundan, $V = 2\pi\rho A$ buluruz. ■

ÖRNEK 5 Bir Torus'un Hacmi

a yarıçaplı dairesel bir diski, merkezinden $b \geq a$ kadar uzakta bir eksen etrafında döndürülmesiyle üretilen bir torusun (simit) hacmi

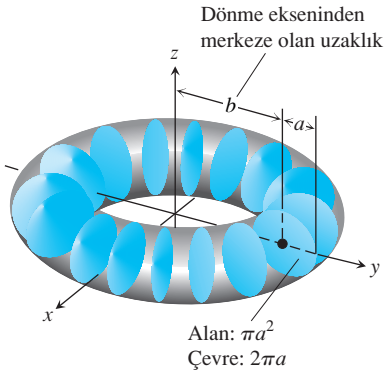
$$V = 2\pi(b)(\pi a^2) = 2\pi^2 b a^2 \quad \blacksquare$$

ÖRNEK 6 Yarım Daire Şeklinde Bir Bölgenin Merkezini Bulun

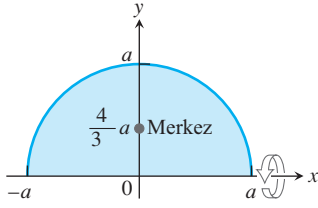
Çözüm Bölgeyi, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarım daire (Şekil 6.56) ile x -ekseni arasındaki bölge olarak alırız ve bölgeyi x -ekseni etrafında döndürerek içi dolu bir küre ürettiğimizi varsayarız. Simetriden dolayı, merkezin x koordinatı $\bar{x} = 0$ 'dır. (9) denkleminde ρ yerine $\bar{y}$ olarak

$$\bar{y} = \frac{V}{2\pi A} = \frac{(4/3)\pi a^3}{2\pi(1/2)\pi a^2} = \frac{4}{3\pi} a \quad \blacksquare$$

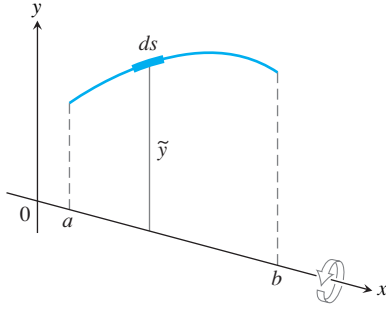
buluruz.



ŞEKİL 6.55 Pappus'un birinci teoremiyle, bir torusun hacmini integral almamız gerekmeden bulabiliriz (Örnek 5).



ŞEKİL 6.56 Pappus'un birinci teoremiyle, yarım daire şeklinde bir bölgenin merkezini integral almadan bulabiliriz (Örnek 6).



ŞEKİL 6.57 Pappus'un alan teoreminin ispatı için şekil

TEOREM 2 Yüzey Alanları İçin Pappus Teoremi

Bir düzgün düzlemsel eğri yayı, aynı düzlemde yayın içiyle kesişmeyen bir doğru etrafında bir kere döndürülürse, yayın ürettiği yüzeyin alanı yayın uzunluğu kere yayın merkezinin dönme sırasında aldığı yoldur. ρ dönme ekseninden merkeze olan uzaklıksa, yüzey şu şekilde bulunur:

$$S = 2\pi\rho L \quad (11)$$

Vereceğimiz ispat dönme eksenini x -ekseni olarak ve yayı x 'in düzgün bir fonksiyonu olarak modelleyebileceğimiz varsayımına dayanmaktadır.

İspat Yay, birinci dörtte bir bölgede $x = a$ 'dan $x = b$ 'ye kadar uzanmak üzere, dönme eksenini x -eksenini olarak seçeriz (Şekil 6.57). Yayın ürettiği yüzeyin alanı şöyle verilir:

$$S = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi y \, ds = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} y \, ds \quad (12)$$

Yayın merkezinin y -koordinatı

$$\bar{y} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} \tilde{y} \, ds}{\int_{x=a}^{x=b} ds} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} y \, ds}{L} \quad \text{L = } \int ds \text{ yay uzunluğudur ve } \tilde{y} = y \text{ 'dir.}$$

olarak bulunur, dolayısıyla

$$\int_{x=a}^{x=b} y \, ds = \bar{y}L$$

olur. (12) denklemindeki son integral yerine $\bar{y}L$ yazmak $S = 2\pi\bar{y}L$ verir. ρ yarıçapı $\bar{y}$ 'ye eşit olduğundan, $S = 2\pi\rho L$ buluruz. ■

ÖRNEK 7 Bir Torusun Yüzey Alanı

Örnek 5'teki torusun yüzey alanı

$$S = 2\pi(b)(2\pi a) = 4\pi^2 ba$$

olarak bulunur.

ALİŞTIRMALAR 6.5

Yüzey Alanı İçin İntegral Bulma

1–8 alıştırmalarında

- a. Verilen eğrinin belirtilen eksen etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanı için bir integral kurun.

- 1** b. Eğriyi çizerek neye benzediğine bakın. Yapabiliyorsanız, yüzeyi de çiziniz
- 1** c. Grafik programınızın veya bilgisayarınızın integral hesaplayıcısıyla yüzeyin alanını sayısal olarak bulun.

1. $y = \tan x$, $0 \leq x \leq \pi/4$ x -ekseni etrafında

2. $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$; x -ekseni etrafında

3. $xy = 1$, $1 \leq y \leq 2$ y -ekseni etrafında

4. $x = \sin y$, $0 \leq y \leq \pi$ y -ekseni etrafında

5. $x^{1/2} + y^{1/2} = 3$, $(4, 1)$ 'den $(1, 4)$ 'e, x -ekseni etrafında

6. $y + 2\sqrt{y} = x$, $1 \leq y \leq 2$; y -ekseni etrafında

7. $x = \int_0^y \tan t \, dt$, $0 \leq y \leq \pi/3$; y -ekseni etrafında

8. $y = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} \, dt$, $1 \leq x \leq \sqrt{5}$; x -ekseni etrafında

Yüzey Alanlarını Bulmak

9. $y = x/2, 0 \leq x \leq 4$, doğru parçasının x -ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen koninin yanal yüzey alanını bulun. Yanıtınızı şu geometri formülüyle karşılaştırın:

Yanal yüzey alanı = $\frac{1}{2}$ taban çevresi $\times$ yanal ayrıt uzunluğu

10. $y = x/2, 0 \leq x \leq 4$ doğru parçasının y -ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen koninin yanal yüzey alanını bulun. Yanıtınızı şu geometri formülüyle karşılaştırın:

Yanal yüzey alanı = $\frac{1}{2}$ taban çevresi $\times$ yanal ayrıt uzunluğu

11. $y = (x/2) + (1/2), 1 \leq x \leq 3$, doğru parçasının x -ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen kesik koninin yüzey alanını bulun. Yanıtınızı aşağıdaki formülle karşılaştırın:

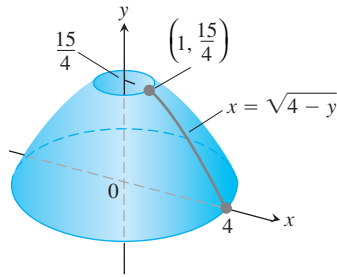
Kesik koni yüzey alanı = $\pi (r_1 + r_2) \times$ yanal ayrıt uzunluğu

12. $y = (x/2) + (1/2), 1 \leq x \leq 3$, doğru parçasının y -ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen kesik koninin yüzey alanını bulun. Yanıtınızı aşağıdaki formülle karşılaştırın:

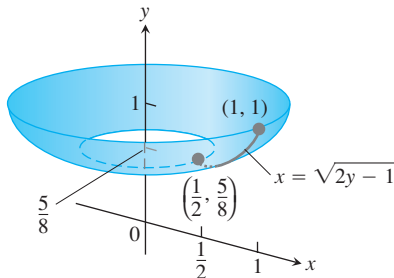
Kesik koni yüzey alanı = $\pi (r_1 + r_2) \times$ yanal ayrıt uzunluğu

13–22 alıştırma larındaki eğrilerin belirtilen eksenler etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzeylerin alanlarını bulun. Bir grafik programınız varsa, eğrileri çizebilirsiniz.

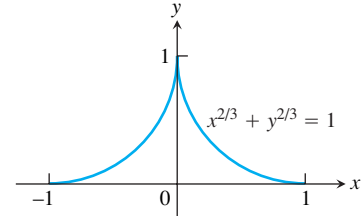
13. $y = x^3/9, 0 \leq x \leq 2$; x -ekseni etrafında
 14. $y = \sqrt{x}, 3/4 \leq x \leq 15/4$; x -ekseni etrafında
 15. $y = \sqrt{2x - x^2}, 0.5 \leq x \leq 1.5$; x -ekseni etrafında
 16. $y = \sqrt{x + 1}, 1 \leq x \leq 5$; x -ekseni etrafında
 17. $x = y^3/3, 0 \leq y \leq 1$; y -ekseni etrafında
 18. $x = (1/3)y^{3/2} - y^{1/2}, 1 \leq y \leq 3$; y -ekseni etrafında
 19. $x = 2\sqrt{4 - y}, 0 \leq y \leq 15/4$; y -ekseni etrafında



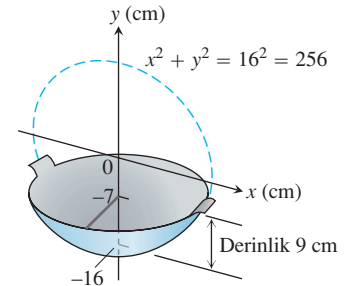
20. $x = \sqrt{2y - 1}, 5/8 \leq y \leq 1$; y -ekseni etrafında



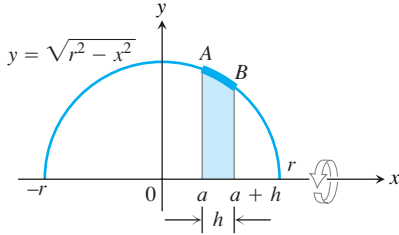
21. $x = (y^4/4 + 1/(8y^2)), 1 \leq y \leq 2$; x -ekseni etrafında (İpucu: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ 'yi dy cinsinden ifade edin ve $S = \int 2\pi y ds$ integralini uygun sınırlarla hesaplayın.)
 22. $y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}, 0 \leq x \leq \sqrt{2}$; y -ekseni etrafında (İpucu: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ 'yi dx cinsinden ifade edin ve $S = \int 2\pi x ds$ integralini uygun sınırlarla hesaplayın.)
 23. **Yeni tanımı test etmek** $y = \sqrt{a^2 - x^2}, -a \leq x \leq a$, eğrisinin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanını (3) denklemleri hesaplayarak a yarıçaplı bir kürenin yüzey alanının hala $4\pi a^2$ olduğunu gösterin.
 24. **Yeni tanımı test etmek** Yüksekliği h ve yarıçapı r olan bir koninin yanal yüzey alanı $\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$, taban yarıçapı r kere yanal ayrıt uzunluğu, olmalıdır. $y = (r/h)x, 0 \leq x \leq h$, eğrisinin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanını bularak bunun hala böyle olduğunu gösterin.
 25. $y = \cos x, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, eğrisinin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanı için bir integral bulun. Bu tip integrallerin nasıl hesaplanacağını Bölüm 8.5'te göreceğiz.
 26. **Bir astroidin yüzeyi** $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ astroidinin aşağıda verilen kısmı x -ekseni etrafında döndürülerek üretilen yüzeyin alanını bulun. (İpucu: Önce birinci bölgedeki kısmını, $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}, 0 \leq x \leq 1$, x -ekseni etrafında döndürün ve sonra sonucunuzu iki ile çarpın.)



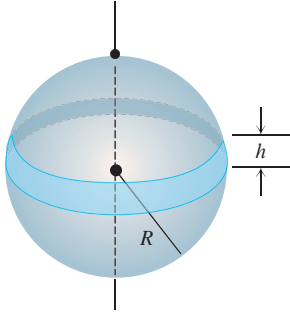
- T 27. Tavaları minelemek** Şirketiniz Bölüm 6.1, Alıştırma 55'te tasarladığınız tavanın lüks şeklini piyasaya sürmeye karar vermişsiniz. Planları tavanın içini beyaz mineyle, dışını kahverengi mineyle kaplamaktır. Her mine fırınlanmadan önce 0.5 mm kalınlığında kaplanacaktır (aşağıdaki diyagrama bakın). Üretim bölümünüz 5000 tava için ellerinde ne kadar mine bulunması gerektiğini merak ediyor. Onlara ne dersiniz? (Atıkları ve kullanılmayan malzemeyi ihmal edin ve yanıtınızı litre olarak verin. $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$, dolayısıyla $1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$ olduğunu hatırlayın.)



- 28. Ekmek kesmek** Eğer küresel bir ekmek somununu eşit genişlikli parçalara bölerseniz, her dilimde aynı miktarda kabuk bulunacağını biliyor muydunuz? Nedenini anlamak için, aşağıda gösterilen $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ yarıçemberini bir küre oluşturacak şekilde x -ekseni etrafında döndürdüğümüzü varsayın. AB , x -ekseninde h uzunluklu bir aralığın karşısındaki yay olsun. AB yayının taradığı alanın, aralığın bulunduğu yere bağlı olmadığını gösterin. (Aralığın uzunluğuna bağlıdır.)



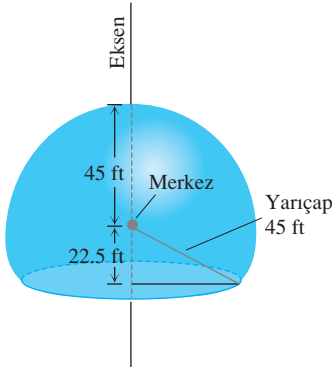
- 29.** Aşağıda gösterilen gölgeli bant h birim aralıklı paralel düzlemlerle R yarıçaplı bir küreden kesiliyor. Bandın yüzey alanının $2\pi Rh$ olduğunu gösterin



- 30.** Aşağıda U.S. Ulusal Hava Servisi tarafından Bozeman, Mont'taki radarı çevrelemek için kullanılan 90 ft'lik bir kubbenin şeması verilmektedir.

a. Boyanacak dış yüzey ne kadardır (tabanı saymadan)?

T b. Yanıtınızı bir ft² hassaslığında ifade edin.



- 31. Dönme eksenini kesen eğrilerle üretilen yüzeyler** (3) denklemi-
mindeki yüzey alanı formülü, grafiği yüzeyi oluşturan f fonksiyonu-
nun $[a, b]$ aralığında negatif olmadığı varsayımı altında geliştirilmiştir.
Dönme eksenini kesen eğriler için (3) denklemini

$$S = \int 2\pi \rho \, ds = \int 2\pi |f(x)| \, ds. \quad [13]$$

mutlak değer formülüyle değiştiririz. (13) denklemini kullanarak $y = x$, $-1 \leq x \leq 2$, doğrusunun x -ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen çift koninin yüzey alanını bulun.

- 32. (Alıştırma 31'in devamı.)** $y = x^3/9$, $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$, eğrisinin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanını bulun. (13) denkleminde mutlak değer işaretlerini atıp alanı $S = \int 2\pi f(x) \, ds$ ile hesaplamaya kalkarsanız, sizce ne olur? Deneyin.

Parametrizasyonlar

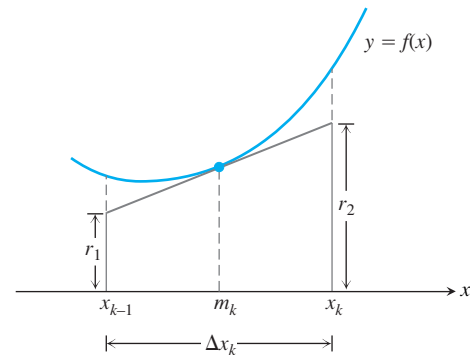
33–35 alıştırmalarındaki eğrilerin belirtilen eksenler etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeylerin alanlarını bulun.

- 33.** $x = \cos t$, $y = 2 + \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$; x -ekseni etrafında
34. $x = (2/3)t^{3/2}$, $y = 2\sqrt{t}$, $0 \leq t \leq \sqrt{3}$; y -ekseni etrafında
35. $x = t + \sqrt{2}$, $y = (t^2/2) + \sqrt{2}t$, $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$; y -ekseni etrafında
36. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, eğrisinin x -ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen yüzeyin alanını temsil eden bir integral yazın fakat hesaplamayın.
37. Kesik koni $(0, 1)$ ve $(2, 2)$ noktalarını birleştiren doğru parçası x -ekseni etrafında döndürülerek bir kesik koni üretiliyor. $x = 2t$, $y = t + 1$, $0 \leq t \leq 1$, parametrizasyonunu kullanarak kesik koninin yüzey alanını bulun. Sonucunuzu şu geometri formülüyle kontrol edin: Alan = $\pi(r_1 + r_2)$ (yanal ayrıt uzunluğu).
38. Bir koni Orijini (h, r) noktasına bağlayan doğru parçası x -ekseni etrafında döndürülerek h yükseklikli ve r yarıçaplı bir koni üretiliyor. $x = ht$, $y = rt$, $0 \leq t \leq 1$, parametrizasyonunu kullanarak koninin yüzey alanını bulun. Sonucunuzu şu geometri formülüyle karşılaştırın: Alan = πr (yanal ayrıt uzunluğu).

- 39. Yüzey Alanı Formülünün Alternatif Elde Edilişi** f 'nin $[a, b]$ üzerinde düzgün olduğunu kabul edelim ve $[a, b]$ 'yi her zamanki gibi alt aralıklara bölelim. Şekilde gösterildiği gibi, $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığının $m_k = (x_{k-1} + m_k)/2$ orta noktasından eğriye bir teğet çizim.

a. $r_1 = f(m_k) - f'(m_k) \frac{\Delta x_k}{2}$ ve $r_2 = f(m_k) + f'(m_k) \frac{\Delta x_k}{2}$ olduğunu gösterin.

b. k . alt aralıktaki teğet doğru parçasının L_k uzunluğunun $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(m_k) \Delta x_k)^2}$ olduğunu gösterin.



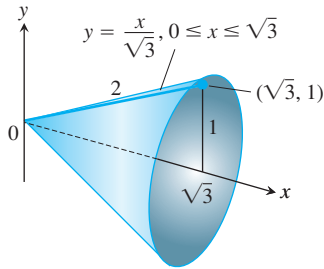
c. Teğet doğru parçasının x -ekseni etrafında dönerken taradığı kesik koninin yanal yüzey alanının $2\pi f(m_k)\sqrt{1 + (f'(m_k))^2} \Delta x_k$ olduğunu gösterin.

d. $y = f(x)$ eğrisini $[a, b]$ boyunca x -ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanının

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(k.\text{inci kesik koninin yanal yüzey alanı} \right) = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

olduğunu gösterin.

40. **Yüzey alanı modelleme** $y = x/\sqrt{3}$, $0 \leq x \leq \sqrt{3}$, doğru parçasını x -ekseni çevresinde döndürerek taranan koninin yanal yüzey alanı $(1/2)$ (taban çevresi)(yanal ayırıt uzunluğu) $(1/2)(2\pi)(2) = 2\pi$ olmalıdır. $f(x) = x/\sqrt{3}$ olarak (8) denklemi kullanırsanız ne bulursunuz?



Pappus Teoremleri

41. Köşeleri $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(4, 2)$ ve $(2, 4)$ 'te olan kare şeklindeki bölge x -ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor. Dönel cismin hacmini ve yüzey alanını bulun.
42. Pappus'un bir teoremini kullanarak, koordinat eksenleri ve $2x + y = 6$ doğrusuyla sınırlanan üçgen bölgenin $x = 5$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen hacmi bulun. (Bölüm 6.4'teki

Alıştırma 29'da gördüğünüz gibi, bir üçgenin merkezi kenar ortayların kesim noktasında, yani her kenarın orta noktasından karşı köşeye olan uzaklığın üçte birinde bulunur.)

43. $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ çemberinin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen torusun hacmini bulun.
44. Pappus teoremlerini kullanarak bir dairesel dik koninin yanal yüzey alanını ve hacmini bulun.
45. Pappus'un ikinci teoremini ve a yarıçaplı bir kürenin yüzey alanının $4\pi a^2$ olduğunu kullanarak, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarım çemberinin merkezini bulun.
46. Alıştırma 45'ten, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarım çemberinin merkezi $(0, 2a/\pi)$ 'de bulunur. Yarım çemberin $y = a$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle taranan yüzeyin alanını bulun.
47. $y = (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$ yarım elipsi ile x -ekseni arasında kalan R bölgesinin alanı $(1/2)\pi ab$ ve R bölgesini x -ekseni etrafında döndürerek üretilen elipsoidin hacmi $(4/3)\pi ab^2$ 'dir. R 'nin merkezini bulun. Konunun a 'dan bağımsız olduğuna dikkat edin.
48. Örnek 6'da bulunduğu gibi, x -ekseni ve $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarım çemberi ile sınırlanan bölgenin merkezi $(0, 4a/3\pi)$ 'dir. Bu bölgenin $y = -a$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cismin hacmini bulun.
49. Alıştırma 48'deki bölge $y = x - a$ doğrusu etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor. Dönel cismin hacmini bulun.
50. Alıştırma 45'ten, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarım çemberinin merkezi $(0, 2a/\pi)$ 'dedir. Yarım çemberin $y = x - a$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen Dönel cismin hacmini bulun.
51. Örnek 6'daki yarım çembersel bölgenin x -ekseni etrafındaki momentini bulun. Bildiğiniz sonuçları kullanırsanız, integre etmeniz gerekmez.

6.6

İş

Günlük yaşamda iş, kas veya zihin gücü gerektiren faaliyetler anlamına gelir. Bilimde ise, bu terim özel olarak bir cisme etki eden kuvveti ve cismin buna karşı gelen yerdeğiştirmesini belirtmektedir. Bu bölüm işin nasıl hesaplanacağını göstermektedir. Uygulamalar vagon yaylarını sıkıştırmak ve yeraltı tanklarını boşaltmaktan elektronları bir araya getirmek ve uyduları yörüngeye taşımaya kadar gider.

Sabit Bir Kuvvet Tarafından Yapılan İş

Bir cisim sabit F büyüklüklü bir kuvvetin etkisi sonucunda bir doğru boyunca d mesafesi kadar ilerlemişse, cisme etki eden kuvvetin yaptığı işi

$$W = Fd \quad (\text{İş için sabit kuvvet formülü}) \quad (1)$$

formülüyle hesaplarız.

Jul

J olarak kısaltılan jul, adını İngiliz fizikçi James Prescott Joule'den (1818-1889) alır. Julü tanımlayan denklem $1 \text{ jul} = (1 \text{ Newton}) (1 \text{ metre})$ olarak verilir. Sembolik olarak $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ 'dir.

(1) denkleminde, herhangi bir sistemdeki iş biriminin birim uzunlukla çarpılan birim kuvvet olduğunu görebiliriz. SI birimleriyle (SI *Système International* veya Uluslararası Sistemin kısaltılmasıdır), kuvvet birimi bir newton, uzaklık birimi ise bir metre ve iş birimi newton metredir (N·m). Bu kombinasyonla o kadar sık karşılaşılır ki, özel bir ismi vardır: **jul**. İngiliz birim sisteminde iş birimi mühendisler tarafından çok sık kullanılan ft·lb'dir.

ÖRNEK 1 Bir Otomobili Kaldırmak

Lastik değiştirmek için 2000 lb'luk bir otomobilin bir tarafını 1.25 ft kaldırırsanız (yaklaşık 1000 lb'luk dikey bir kuvvet uygulamanız gerekir), otomobil üzerinde $1000 \times 1.25 = 1259 \text{ ft} \cdot \text{lb}$ iş yapmış olursunuz. SI birimleriyle, 0.381 m'lik yol boyunca 4448 N 'luk bir kuvvet uygulayarak $4448 \times 0.381 \approx 1695 \text{ J}$ 'lük iş yaparsınız. ■

Değişken Bir Kuvvetin Bir Doğru Boyunca Yaptığı İş

Bir yay sıkıştırırken olduğu gibi, uyguladığınız kuvvet yol boyunca değişiyorsa, $W = Fd$ formülü F 'deki değişmeyi de göz önüne alacak bir inetgral formülüyle değiştirilmelidir.

İşi gerçekleştiren kuvvetin x -ekseni olarak aldığımız bir doğru üzerinde etkidiğini ve kuvvetin F büyüklüğünün, konumun sürekli bir fonksiyonu olduğunu varsayalım. $x = a$ 'dan $x = b$ 'ye kadar olan aralık üzerinde yapılan işi bulmak istiyoruz. $[a, b]$ aralığını her zamanki gibi böler ve her $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığından herhangi bir c_k noktası seçeriz. Alt aralık yeterince kısaysa, F sürekli olduğundan, x_{k-1} 'den x_k 'ye kadar fazla değişmeyecektir. Aralık boyunca yapılan iş yaklaşık olarak, F sabit olsaydı ve (1) denklemini uygulasaydık bulacağımız iş olan, $F(c_k)$ kere Δx_k uzaklığı kadar olurdu. Dolayısıyla, a 'dan b 'ye kadar yapılacak toplam iş'e

$$\text{İş} \approx \sum_{k=1}^n F(c_k) \Delta x_k$$

Riemann toplamı ile yaklaşımda bulunulur. Bölünüşün normu sıfıra giderken, yaklaşımın iyileşmesini bekleriz, bundan dolayı kuvvetin a 'dan b 'ye kadar yaptığı işi F 'nin a 'dan b 'ye kadar integrali olarak tanımlarız.

TANIM İş

Değişken bir $F(x)$ kuvveti tarafından x -ekseni boyunca $x = a$ 'dan $x = b$ 'ye kadar yapılan iş

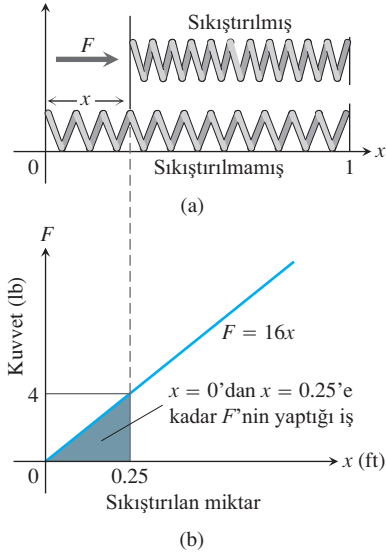
$$W = \int_a^b F(x) dx. \quad (2)$$

dir.

F newton ve x metre olarak verilirse, integralin birimi jul, F lb ve x ft olarak verilirse, integralin birimi ft·lb olacaktır. Dolayısıyla, $F(x) = 1/x^2$ N'luk bir kuvvet tarafından x -ekseni boyunca $x = 1$ m'den $x = 10$ m'ye kadar yapılan iş

$$W = \int_1^{10} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = 0.9 \text{ J}.$$

dir.



ŞEKİL 6.58 Bir yay sıkıştırılırken, yayı sıkışma altında tutmak için gereken F kuvveti lineer olarak artar. (Örnek 2)

Yaylar İçin Hooke Yasası: $F = kx$

Hooke yasası, bir yayı doğal (gerilmemiş) konumundan x birim uzunlukta açmak veya sıkıştırmak için gereken kuvvetin x ile orantılı olduğunu söyler:

$$F = kx \quad (3)$$

Birim uzunluk başına kuvvet birimiyle ölçülen k sabiti, yayın **kuvvet sabiti** (veya **yay sabiti**) adı verilen bir özelliğidir. Hooke yasası (3 denklemi), kuvvet yaydaki metali bozmadıkça, oldukça iyi sonuç verir. Bu bölümdeki kuvvetlerin bunu yapamayacak kadar küçük olduklarını varsayacağız.

ÖRNEK 2 Bir Yay Sıkıştırmak

Kuvvet sabiti $k = 16$ lb/ft ise, bir yayı doğal uzunluğu 1 ft'ten 0.75 ft uzunluğuna sıkıştırmak için gereken işi bulun.

Çözüm Sıkıştırılmamış yayı, serbest ucu orijinde ve sabit ucu $x = 1$ ft'te olacak şekilde, x -ekseni boyunca çizeriz (Şekil 6.58). Bu yayı 0'dan x 'e kadar sıkıştırmak için gereken kuvveti $F = 16x$ formülüyle tanımlamamızı sağlar. Yayı 0'dan 0.25 ft'e sıkıştırmak için, kuvvet

$$F(0) = 16 \cdot 0 = 0 \text{ lb'den} \quad F(0.25) = 16 \cdot 0.25 = 4 \text{ lb'ye}$$

bu aralıkta yaptığı iş kadar artmalıdır. F 'nin

$$W = \int_0^{0.25} 16x \, dx = 8x^2 \Big|_0^{0.25} = 0.5 \text{ ft-lb}$$

$a = 0$, $b = 0.25$,
ve $F(x) = 16x$ ile
(2) denklemi.

olarak bulunur.

ÖRNEK 3 Bir Yay Germek

Bir yayın doğal uzunluğu 1 m'dir. 24 N'luk bir kuvvet yayı 1.8 m'ye germektedir.

- Kuvvet sabiti k 'yi bulun.
- Yayı doğal uzunluğundan 2 m açmak için ne kadar iş gerekir?
- 45 N'luk bir kuvvet yayı ne kadar gerecektir?

Çözüm

- Kuvvet sabiti.** Kuvvet sabitini (3) denkleminde buluruz. 24 N'luk bir kuvvet yayı 0.8 m gerdiğine göre

$$24 = k(0.8)$$

$$k = 24/0.8 = 30 \text{ N/m.}$$

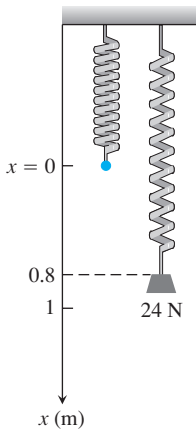
Eq. (3) with
 $F = 24, x = 0.8$

bulunur.

- Yayı 2 m germek için yapılan iş** Gerilmemiş yayı serbest ucu $x = 0$ 'da olacak şekilde x -ekseninde asılmış gibi düşünürüz (Şekil 6.59). Yayı doğal uzunluğundan x m germek için gereken kuvvet, yayın serbest ucunu orijinden x birim çekmek için gereken kuvvettir. $k = 30$ ile Hooke Yasası bu kuvvetin

$$F(x) = 30x$$

olduğunu söyler.



ŞEKİL 6.59 24 N'luk bir ağırlık bu yayı gerilmemiş uzunluğundan 0.8 m uzatır (Örnek 3).

F 'nin yay üzerinde $x = 0$ m'den $x = 2$ m'ye kadar yaptığı iş

$$W = \int_0^2 30x \, dx = 15x^2 \Big|_0^2 = 60 \text{ J}$$

olarak bulunur.

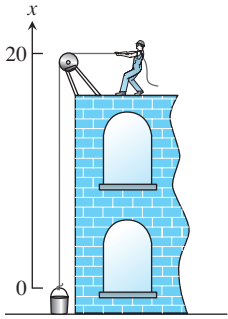
(c) 45 N'luk bir kuvvet yayı ne kadar gerecektir? $F = 30x$ denkleminde $F = 45$ koyarak

$$45 = 30x \quad \text{veya} \quad x = 1.5 \text{ m}$$

olarak bulunur.

buluruz. 45 N'luk bir kuvvet yayı 1.5 m gerecektir. Bunu bulmak için analize gerek yoktur. ■

İş integrali, ağırlıkları yükseklikleri ile değişen nesnelerin kaldırılmasında yapılan işi hesaplamak için kullanışlıdır.



ŞEKİL 6.60 Örnek 4'teki kovayı kaldırmak .

ÖRNEK 4 Bir İp ve Kova Kaldırmak

5 lb'lık bir kova 20 ft'lik bir ip ile sabit hızla çekilerek yerden kaldırılıyor (Şekil 6.60). İpin ağırlığı 0.08 lb/ft'tir. Kovayı ve ip'i kaldırmak için ne kadar iş yapılmıştır?

Çözüm Kovanın ağırlığı sabittir, dolayısıyla sadece kovayı kaldırırken yapılan iş ağırlık $\times$ mesafe lb-ft dir.

İp'in ağırlığı kovanın yüksekliği ile değişmektedir, çünkü daha azı serbestçe asılıdır. Kova yerden x ft yüksekte iken, ip'in kalan parçası hala $(0.08) \cdot (20 - x)$ ağırlığı ile asılıdır. Dolayısıyla ip'i kaldırırken yapılan iş

$$\begin{aligned} \text{İp üzerinde yapılan iş} &= \int_0^{20} (0.08)(20 - x) \, dx = \int_0^{20} (1.6 - 0.08x) \, dx \\ &= [1.6x - 0.04x^2]_0^{20} = 32 - 16 = 16 \text{ ft-lb.} \end{aligned}$$

kova ve ip üzerinde yapılan toplam iş

$$100 + 16 = 116 \text{ ft-lb}$$

kadardır. ■

Kaplardan Sıvı Pompalamak

Bir depodan sıvının hepsini veya bir kısmını pompalamak için ne kadar iş yapmak gerekir? Bunu bulmak için, sıvıyı her bir adımda ince bir tabaka olarak kaldırdığımızı ve her tabakaya $W = Fd$ denklemini uyguladığımızı düşünürüz. Sonra tabakaların incilmesi ve sayılarının artmasının yarattığı integrali hesaplarız. Elde ettiğimiz integral sıvının ağırlığına ve deponun boyutlarına bağlıdır, fakat integrali bulma yöntemimiz hep aynıdır. Aşağıdaki örnek neler yapılması gerektiğini göstermektedir.

ÖRNEK 5 Konik Bir Tanktan Zeytinyağı Pompalamak

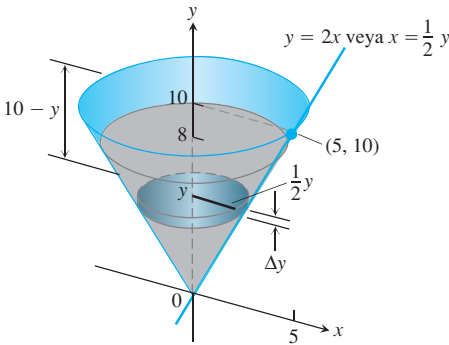
Şekil 6.61'deki konik tank ağzından 2 ft aşağısına kadar 57 lb/ft³ ağırlığında zeytinyağıyla doldurulmuştur. Zeytinyağını tankın ağzına kadar pompalamak için yapılması gereken iş ne kadardır?

Çözüm Zeytinyağının, $[0, 8]$ aralığının bir bölünüşünün noktalarından y -eksenine paralel düzlemlerle ince tabakalara bölündüğünü düşünelim.

y ile $y + \Delta y$ 'deki düzlemler arasında kalan tipik bir tabakanın hacmi yaklaşık olarak

$$\Delta V = \pi(\text{yarıçap})^2 (\text{kalınlık}) = \pi \left(\frac{1}{2}y \right)^2 \Delta y = \frac{\pi}{4} y^2 \Delta y \text{ ft}^3$$

olur.



ŞEKİL 6.61 Örnek 5'teki zeytinyağı ve tank.

Tabakayı kaldırmak için gereken $F(y)$ kuvveti tabakanın ağırlığına eşittir:

$$F(y) = 57 \Delta V = \frac{57\pi}{4} y^2 \Delta y \text{ lb} \quad \begin{array}{l} \text{ağırlık} = \text{birim hacim} \\ \text{başına ağırlık} \times \text{hacim} \end{array}$$

Bu tabakayı tankın ağzına kadar kaldırmak için $F(y)$ 'nin etkimesi gereken mesafe yaklaşık $(10 - y)$ ft'dir, dolayısıyla tabakayı kaldırmak için yapılması gereken iş yaklaşık

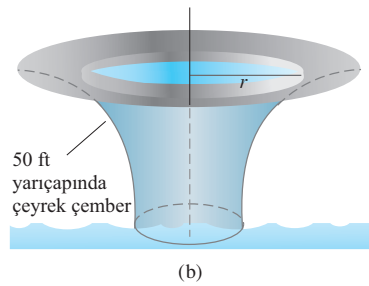
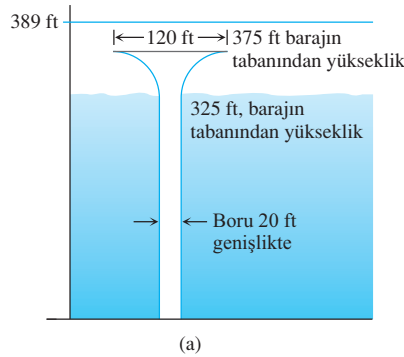
$$\Delta W = \frac{57\pi}{4} (10 - y) y^2 \Delta y \text{ ft-lb}$$

civarındadır. $[0, 8]$ aralığının bir bölünüşüne karşı gelen n tabaka bulunduğunu ve Δy_k kalınlığındaki k . tabakaya karşı gelen düzlemin $y = y_k$ olduğunu kabul ederek, bütün tabakaları kaldırırken yapılan işe

$$W \approx \sum_{k=1}^n \frac{57\pi}{4} (10 - y_k) y_k^2 \Delta y_k \text{ ft-lb}$$

Riemann toplamı ile yaklaşımda bulunabiliriz. Zeytinyağını tankın ağzına kadar pompalamak için yapılması gereken iş, bölünüşün normu sıfıra giderken bu toplamaların limitidir:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^8 \frac{57\pi}{4} (10 - y) y^2 dy \\ &= \frac{57\pi}{4} \int_0^8 (10y^2 - y^3) dy \\ &= \frac{57\pi}{4} \left[\frac{10y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^8 \approx 30,561 \text{ ft-lb} \end{aligned}$$



ŞEKİL 6.62 (a) Bir barajın tahliye borusunun dik-kesiti ve (b) tahliye borusunun üstü (Örnek 6)

ÖRNEK 6 Bir Tahliye Borusunda Su Pompalamak

Bir barajın tahliye borusu, su seviyesinin çok fazla yükselmesini önleyen dikey bir boşaltma borusudur. Bir barajın tahliye borusunun üstü, baraj seviyesinden 14 ft aşağıda ve baraj tabanından 375 ft yukarıdadır (Şekil 6.62). Mevsimlik birikimleri zaman zaman pompalamak için bu boru gereklidir.

Şekil 6.62a'daki dik-kesitten, tahliye borusunun huni şeklinde bir kanal olduğunu görüyoruz. Huninin boğazı 20 ft genişliğinde ve ağzı 120 ft çapındadır. Şekil 6.62b de gösterildiği gibi, üst kısmın dik-kesitinin dış sınırı 50 ft yarıçapında çeyrek çemberler şeklindedir. Tahliye borusu, bir dik-kesitin, merkezi etrafında döndürülmesi ile oluşturulmuştur. Sonuç olarak, tahliye borusunun tamamı boyunca bütün yatay dik-kesitler dairesel disklerdir.

(a) borunun boğazından

(b) huni kısmından

Su pompalamak için gereken işi hesaplıyoruz.

Çözüm

(a) *Boğazdan pompalamak.* y ile $y + \Delta y$ 'deki düzlemler arasında kalan tipik bir tabakanın hacmi yaklaşık olarak

$$\Delta V = \pi(\text{yarıçap})^2 (\text{kalınlık}) = \pi(10)^2 \Delta y \text{ ft}^3$$

tür.

Tabakayı kaldırmak için gereken $F(y)$ kuvveti tabakanın ağırlığına eşittir (su için yaklaşık

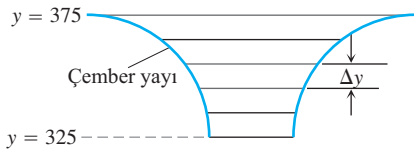
$$F(y) = 62.4 \Delta V = 6240\pi \Delta y \text{ lb}$$

Bu tabakayı borunun üstüne kadar kaldırmak için $F(y)$ 'nin etkimesi gereken mesafe yaklaşık $(375 - y)$ ft'dir, dolayısıyla tabakayı kaldırmak için yapılan iş

$$\Delta W = 6240\pi(375 - y) \Delta y \text{ ft-lb}$$

dir. Borudan su pompalamakla yapılan işe, bütün tabakaları kaldırmak için yapılan işleri toplayarak ve sonra bölünüşün normu sıfıra giderken bu Riemann toplamının limitini alarak yaklaşımda bulunabiliriz. Bu, aşağıdaki integrali verir.

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{325} 6240\pi(375 - y) dy \\ &= 6240\pi \left[375y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{325} \\ &\approx 1,353,869,354 \text{ ft-lb} \end{aligned}$$



ŞEKİL 6.63 Tahliye borusunun huni kısmı

(b) *Huniden pompalamak.* Borunun huni kısmından, $y = 325$ 'ten $y = 375$ 'e kadar, su pompalamakta gereken işi hesaplamak için, Şekil 6.63'te gösterildiği gibi, hunideki yaklaşım elemanı için ΔV 'yi hesaplamamız gerekir. Şekilden görüleceği gibi, tabakaların yarıçapları y yüksekliği ile değişmektedir.

33 ve 34 alıştırmalarında, suyu pompalamak için gereken toplam işi belirlemenin analizini tamamlamanız ve tahliye borusundan dışarıya pompalayabilmek için pompaların gücü istenmektedir. ■

ALİŞTIRMALAR 6.6

Yaylar

- Yay sabiti** Bir yayı doğal uzunluğu olan 2 m'den 5 m'ye germek için 1800 J'lük iş yapılmıştır. Yayın kuvvet sabitini bulun.
- Bir yay germek** Bir yayın doğal uzunluğu 10 inçtir. 800 lb'luk bir kuvvet yayı 14 inçe germektedir.
 - Yayın kuvvet sabitini bulun.
 - Yayı 10 inçten 12 inçe germek için ne kadar iş yapılır?
 - 1600 lb'luk bir kuvvet yayı doğal uzunluğundan ne kadar gerektir?
- Bir lastik bant germek** 2 N'luk bir kuvvet bir lastik bandı 2 cm (0.02 m) gerer. Hooke yasasının geçerli olduğunu varsayarsak, 4 N'luk bir kuvvet lastik bandı ne kadar gerer? Lastik bandı bu kadar germek için ne kadar iş yapılır?
- Bir yay germek** 90 N'luk bir kuvvet bir yayı doğal uzunluğundan 1 m geriyorsa, yayı doğal uzunluğundan 5 m germek için ne kadar iş yapılması gerekir?
- Metro vagonu yayları** Bir New York City Transit Authority metro vagonundaki sarımlı yayı serbest uzunluğu 8 inç'ten tamamen sıkışmış uzunluğu 5 inçe sıkıştırmak için 21.714 lb'luk kuvvet gerekmektedir.

a. Yayın kuvvet sabiti nedir?

b. Yayı ilk yarım inç ve ikinci yarım inç sıkıştırmak için ne kadar iş yapmak gerekir? En hassas şekilde lb olarak bulun.

(New York City Transit Authority'ye 1985'ten 1987'ye kadar teslim edilen metro vagonu yayları için Bombardier, Inc., Toplu Taşıma Bölümü tarafından derlenen veriler.)

- Banyo tartısı** Bir banyo tartısı üzerine 150 lb'luk birisi çıktığında 1/16 inç sıkışmaktadır. Tartının Hooke yasasına uyan bir yay gibi davrandığını varsayarsak, tartıyı 1/8 inç sıkıştıran birisinin ağırlığı ne kadardır? Tartıyı 1/8 inç sıkıştırmak için ne kadar iş yapılır?

Değişken Bir Kuvvetin Yaptığı İş

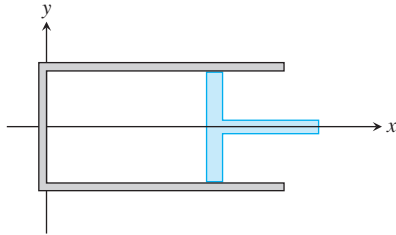
- Bir ipi kaldırmak** Bir dağcı 50 m uzunluğunda bir tırmanma ipini yukarı çekmek üzeredir. İp 0.624 N/m ağırlığındaysa, dağcı ne kadar iş yapacaktır?
- Delik kum torbası** Başlangıçta 144 lb ağırlığında olan bir torba kum sabit hızla kaldırılmaktadır. Yukarı kalkarken, kum da sabit hızla sızmaktadır. Torba 18 ft yukarı çekildiğinde, içindeki kumun yarısı gitmiştir. Kum bu yüksekliğe çekmek için ne kadar

iş yapılmıştır? (Torbanın ve kaldırma aletlerinin ağırlıklarını ihmal edin.)

9. **Bir asansör kablosunu kaldırmak** Tepede bir motoru olan elektrikli bir asansörün 4.5 lb/ft ağırlığında sarımlı bir ipi vardır. Asansör birinci kattayken, 180 ft kablo açılmıştır ve asansör en üst kata vardığında 0 ft kablo açıktır. Asansörü birinci kattan en üst kata çıkarırken, motor sadece ipi taşıyarak ne kadar iş yapmıştır?
10. **Çekme kuvveti** m kütleli bir parçacık $(x, 0)$ 'dayken, büyüklüğü k/x^2 olan bir kuvvetle orijine doğru çekilir. Parçacık harekete $x = b$ 'den durgun olarak başlarsa ve üzerine başka bir kuvvet etkimiyorsa, $x = a$, $0 < a < b$ noktasına vardığında parçacık üzerinde ne kadar iş yapılmış olduğunu bulun.
11. **Gaz sıkıştırmak** A kesit alanlı bir silindirdaki gazın bir pistonla sıkıştırıldığını varsayın. p gazın lb/in² olarak basıncı ve V in³ olarak hacmiyse, gazı (p_1, V_1) durumundan (p_2, V_2) durumuna sıkıştırmak için yapılması gereken işin

$$\text{İş} = \int_{(p_1, V_1)}^{(p_2, V_2)} p \, dV$$

olduğunu gösterin. (İpucu: Şekilde verilen koordinatlarla $dV = A \, dx$ olur. Pistona karşı koyan kuvvet pA 'dır.)



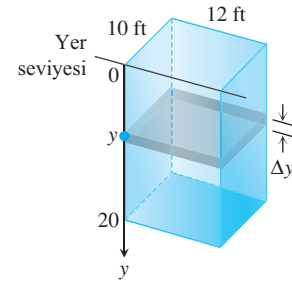
12. (Aıştırma 11'nin devamı) Aıştırma 11'deki integrali kullanarak, $p_1 = 50$ lb/in² ise ve p ve V , $pV^{1.4} = \text{sabit}$ gaz yasasına uyuyorsa, gazı $V_1 = 243$ in³'ten $V_2 = 32$ in³'e sıkıştırmak için yapılan işi bulun.
13. **Delik kova** Örnek 4'teki kovanın sızdırdığını varsayın. 2 galon (16 lb) su ile başlar ve sabit bir hızla sızdırmaktadır. Tepeye vardığı anda, kova boşalır. Sadece suyu kaldırmak için ne kadar iş yapılmıştır? (İpucu: İp ve kovayı dahil etmeyin ve yükseklik x ft iken su miktarını bulun.)
14. (Aıştırma 13'ün devamı) Örnek 4'teki ve Aıştırma 13'teki işçiler, ellerindeki kovayı 5 galon (40 lb) su alan daha büyük bir kovayla değiştirdiler, fakat bu kovada daha büyük bir delik vardı, öyle ki yeni kova da yukarı çıktığı anda boşalmıştı. Suyun sabit bir hızla sızdığını varsayarsak, sadece suyu yukarı çekerken ne kadar iş yapılmıştır? (İpi ve kovayı hesaba katmayın.)

Kaplardan Sıvı Pompalamak

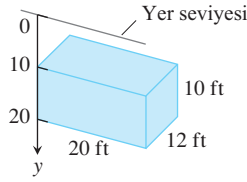
Suyun Ağırlığı

Dünyanın dönmesi ve yerçekimi alanındaki değişimlerden dolayı, deniz seviyesinde 1 ft³ suyun ağırlığı, %0.5'lik bir değişimle ekvatorda 62.26 lb'den kutuplarda 62.59 lb'a kadar değişebilir. Melbourne ve New York Şehri'nde 62.4 lb ağırlığındaki 1 ft³ su Juneau ve Stockholm'de 62.5 lb ağırlığında olacaktır. 62.4 tipik ve kitaplarda kullanılan bir değer olsa bile, önemli bir değişim sözkonusudur.

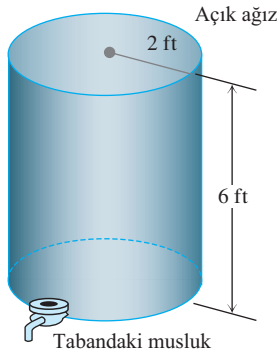
15. **Su Pompalamak** Aşağıda gösterilen, ağız toprak seviyesinde olan dikdörtgenler prizması şeklindeki tank yağmur suyu toplamakta kullanılmaktadır. Suyun 62.4 lb/ft³ ağırlığında olduğunu varsayın.
- Tank tamamen dolduğunda, suyu yeniden dışarı pompalayarak tankı boşaltmak için ne kadar iş yapılması gerekir?
 - Su dışarı (5/11) beygir gücünde (iş çıkışı 250 ft-lb/sn) bir motorla pompalanırsa, dolu tankı boşaltmak ne kadar sürecektir (dakika olarak)?
 - (b) şıkkındaki pompanın, pompalamanın ilk 25 dakikasında su seviyesini 10 ft (yarısı) azaltacağını gösterin.
 - Suyun ağırlığı** (a) ve (b) şıklarındaki yanıtlar suyun ağırlığının 62.26 lb/ft³ ve 62.59 lb/ft³ olduğu yerlerde ne olur?



16. **Bir sarnıcı boşaltmak** Aşağıda gösterilen dikdörtgenler prizması şeklindeki sarnıcın (yağmur suyu toplamakta kullanılan tank) ağız yer seviyesinden 10 ft aşağıdadır. Şu anda dolu olan sarnıç denetleme için içindekiler yer seviyesine pompalanarak boşaltılacaktır.
- Sarnıcı boşaltmak için ne kadar iş yapılması gerekir?
 - Suyun (1/2) beygir gücünde, 275 ft-lb/sn hızında bir motorla dışarı pompalanması ne kadar sürer?
 - (b) şıkkındaki pompanın, sarnıcı yarıya kadar boşaltması ne kadar sürer? (Sarnıcı tamamen boşaltmak için gereken zamanın yarısından daha az sürecektir.)
 - Suyun ağırlığı** (a)-(c) şıklarındaki yanıtlar suyun ağırlığının 62.26 lb/ft³ ve 62.59 lb/ft³ olduğu yerlerde ne olur?

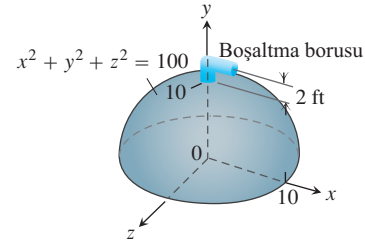


17. **Yağ pompalamak** Örnek 5'teki tank tamamen dolu ise tankta bulunan yağı tankın ağzına kadar pompalamak için ne kadar iş yapılması gerekir?
18. **Yarı-dolu tanktan pompalamak** Örnek 5'teki tankın, dolu olmak yerine, yarı dolu olduğunu varsayın. Kalan suyu tankın ağzından 4 m yukarıya pompalamak için ne kadar iş yapılması gerekir?
19. **Bir tankı boşaltmak** Dikey bir dairesel dik silindirik tank 30 ft yüksekliğinde ve 20 ft çapındadır. 51.2 lb/ft³ ağırlığındaki kerosenle doludur. Keroseni tankın ağzına kadar pompalamak için ne kadar iş yapılması gerekir?
20. Aşağıda gösterilen silindirik tank, tankın tabanının 15 ft aşağısındaki bir gölden su pompalanarak doldurulabilmektedir. Bunu yapmanın iki yolu vardır. Birisi, suyu tankın tabanındaki bir musluğa takılı bir hortumla pompalamaktır. Diğeri ise hortumu tankın ağzına bağlamak ve suyu akıtmaktır. Hangi yol daha hızlıdır? Yantınızı açıklayın.



21. **a. Süt pompalamak** Örnek 5'teki konik tankta zeytinyağı yerine, 64.5 lb/ft³ ağırlığında süt bulunduğunu varsayın. İçindekileri tankın ağzına kadar pompalamak için ne kadar iş yapmak gerekir?
- b. Pumping oil** Örnek 5'teki zeytinyağını tankın ağzının 3 ft yukarısında bir seviyeye getirmek için ne kadar iş yapmak gerekir?
22. **Deniz suyu pompalamak** Büyük bir paslanmaz çelik tankın iç yüzeyini tasarlamak için, $y = x^2$, $0 \leq x \leq 4$ eğrisini y -ekseni etrafında döndürüyorsunuz. Boyutları metre olan depo 10,000 N/m³ ağırlığındaki deniz suyuyla doldurulacaktır. Suyu tankın ağzına pompalayarak boşaltmak için ne kadar iş yapmak gerekir?
23. **Depodan su pompalamak** Küresel depolardan pompalamayı da diğer depolarda olduğu gibi inetgrasyon eksenini kürenin dikey ekseninde alarak modelleriz. Aşağıdaki şekli kullanarak, yarıçapı 5 m olan dolu bir yarıküre şeklindeki su deposunu, suyu deponun 4 m yüksekine pompalayarak boşaltmak için ne kadar iş yapılacağını bulun. Suyun ağırlığı 9800 N/m³'tür.

24. Aşağıda gösterilen depolama tankının boşaltılması ve tamiri ile görevlisiniz. Tank 10 ft yarıçapında bir yarıküre şeklindedir ve 56 lb/ft³ ağırlığında benzenle doludur. Başvurduğunuz bir firma tankı ft-lb başına 1.2¢'e boşaltabileceğini söylüyor. Benzeni tankın iki ft yukarısındaki bir boşaltma musluğuna pompalayarak tankı boşaltmak için ne kadar iş yapılması gerektiğini hesaplayın. İş için bütçeniz 5000\$ ise, firmayı tutmaya gücünüz yeter mi?



İş ve Kinetik Enerji

25. **Kinetik Enerji** Büyüklüğü $F(x)$ olan değişken bir kuvvet m kütleli bir cismi x -ekseni boyunca x_1 'den x_2 'ye taşırsa, cismin hızı v , dx/dt olarak yazılabilir (t zamanı göstermektedir). Newton' un İkinci Hareket Yasası $F = m(dv/dt)$ 'yi ve

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

Zincir Kuralını kullanarak, kuvvetin cismi x_1 'den x_2 'ye taşıyarak yaptığı işin

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2$$

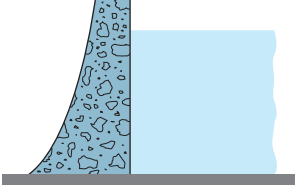
olduğunu gösterin. Burada v_1 ve v_2 , cismin x_1 ve x_2 'deki hızlarıdır. Fizikte $(1/2)mv^2$ ifadesine v hızıyla ilerleyen bir cismin *kinetik enerjisi* denir. Dolayısıyla, kuvvetin yaptığı iş cismin kinetik enerjisindeki değişime eşittir ve işi bu değişimi hesaplayarak bulabiliriz.

26–32 Alıştırma 25'in sonucunu kullanın

26. **Tenis** 2 onsluk bir tenis topu 160 ft/sn (yaklaşık 109 mil/sa) hızla atılmıştır. Topun bu kadar hızlı gitmesini sağlamak için ne kadar iş yapılmıştır? (Topun ağırlığından kütesini bulmak için, ağırlığı lb olarak ifade edin ve yerçekimi ivmesi 32 ft/sn² ile bölün.)
27. **Beyzbol** Bir beyzbol topunu 90 mil/sa ile fırlatmak için kaç ft-lb'lik iş yapılır? Bir beyzbol topunun ağırlığı 5 ons = 0.3125 lb'dir.

6.7

Akışkan Basınçları ve Kuvvetleri



ŞEKİL 6.64 Artan basınca dayanabilmeleri için, barajların alt kısımları daha kalın yapılır.

Barajların altını üstlerinden daha kalın yaparız (Şekil 6.64), çünkü üzerlerindeki basınç derinlikle artar. Bir barajda, herhangi bir noktadaki basıncın barajın o noktada nasıl eğimlendirildiğine değil de o noktanın derinliğine bağlı olması önemli bir gerçektir. Basınç, yüzeyin h ft altında lb/ft^2 olarak, her zaman $62.4 h$ 'dir. 62.4 sayısı suyun lb/ft^3 olarak ağırlık yoğunluğudur. Herhangi bir akışkanın yüzeyinden h ft aşağıdaki basıncı, akışkanın *ağırlık yoğunluğu* kere h 'dir.

Basınç-Derinlik Denklemi

Hareketsiz duran bir akışkanda, h derinliğindeki p basıncı akışkanın ağırlık yoğunluğu w kere h 'dir:

$$p = wh \quad (1)$$

Bu bölümde $p = wh$ denklemini kullanarak bir akışkanın dikey veya yatay bir kap duvarının bir kısmına veya tamamına uyguladığı toplam kuvvet için bir formül türeteceğiz.

Ağırlık yoğunluğu

Bir akışkanın ağırlık yoğunluğu birim hacimdeki ağırlığıdır. Bazı değerler (lb/ft^3) aşağıda verilmiştir.

Mazot	42
Civar	849
Süt	64.5
Melas	100
Zeytinyağı	57
Deniz suyu	64
Su	62.4

Akışkan Kuvveti İçin Sabit-Derinlik Formülü

Yatay tabanlı bir akışkan kabında, akışkanın tabana uyguladığı toplam kuvvet, taban alanını tabandaki basınçla çarparak hesaplanabilir. Bunu yapabiliriz, çünkü toplam kuvvet, birim alandaki kuvvet (basınç) kere alandır (Şekil 6.65'e bakın). F , p ve A sırası ile toplam kuvvet, basınç ve alansa,

$$\begin{aligned} F &= \text{toplam kuvvet} = \text{birim alandaki kuvvet} \times \text{alan} \\ &= \text{basınç} \times \text{alan} = pA \\ &= whA \end{aligned} \quad \begin{array}{l} (1) \text{ denklemden} \\ p = wh \end{array}$$

bulunur.

Sabit-Derinlikte Bir Yüzey Üzerindeki Toplam Kuvvet

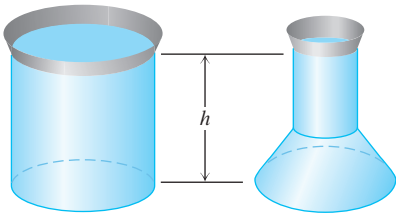
$$F = pA = whA \quad (2)$$

Örneğin, suyun ağırlık-yoğunluğu $62.4 \text{ lb}/\text{ft}^3$ 'tür. Dolayısıyla, 3 ft derinliğinde ve $10 \text{ ft} \times 20 \text{ ft}$ ölçülerinde dikdörtgen şeklindeki bir havuzun tabanındaki akışkan kuvveti

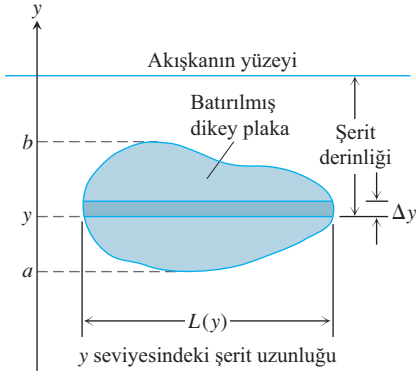
$$\begin{aligned} F &= whA = (62.4 \text{ lb}/\text{ft}^3)(3 \text{ ft})(10 \cdot 20 \text{ ft}^2) \\ &= 37,440 \text{ lb} \end{aligned}$$

dir.

Yukarıda incelemiş olduğumuz yüzme havuzunun tabanı gibi, yatay olarak batırılmış düz bir levha için, sıvı basıncından dolayı üst yüzeyine aşağıya doğru etki eden kuvvet (2) denklemi ile verilir. Halbuki, levha dikey olarak batırılırsa, farklı derinliklerdeki basınç farklı olacaktır ve artık (2) Denklemi kullanılamaz (h değiştiğinden). Levhayı bir çok ince yatay bant'a veya şerite bölerek, limiti dikey olarak batırılmış levhanın yüzeyine etki eden kuvvet olan, bir Riemann toplamı oluşturabiliriz. Prosedür aşağıdadır.



ŞEKİL 6.65 Bu kapların içinde aynı derinlikte su vardır ve taban alanları aynıdır. Dolayısıyla her kabın dibindeki toplam kuvvet aynıdır. Burada kapların şeklinin önemi yoktur.



ŞEKİL 6.66 Bir akışkanın ince yatay bir şeridin bir tarafına uyguladığı kuvvet yaklaşık $\Delta F = \text{basınç} \times \text{alan} = w \times (\text{şerit derinliği}) \times L(y) \Delta y$ 'dir.

Değişken Derinlik Formülü

Ağırlık yoğunluğu w olan bir akışkanın içine batırılmış dikey bir plakanın bir tarafına akışkanın uyguladığı kuvveti bulmak istediğimizi varsayalım. Bunu bulmak için, plakayı xy -düzleminde $y = a$ 'dan $y = b$ 'ye kadar uzanan bir bölge olarak modelleyelim (Şekil 6.66). $[a, b]$ aralığını her zamanki gibi böler ve bölgenin, bölünüş noktalarından y -eksenine dik düzlemlerle ince yatay şeritlere ayrıldığını varsayalım. y 'den $y + \Delta y$ 'ye kadar olan tipik bir şerit Δy birim genişliğinde ve $L(y)$ birim uzunluğundadır. $L(y)$ 'nin y 'nin sürekli bir fonksiyonu olduğunu varsayalım.

Basınç şerit boyunca yukarıdan aşağıya değişir. Fakat şerit yeterince ince ise basınç, alt kenar değeri olan $w \times (\text{şerit derinliği})$ 'ne yakın kalacaktır. Akışkanın şeridin bir tarafına uyguladığı kuvvet

$$\Delta F = (\text{taban kenarı boyunca basınç}) \times (\text{alan})$$

$$= w \cdot (\text{şerit derinliği}) \cdot L(y) \Delta y$$

civarında olacaktır. $a \leq y \leq b$ bölünüşüne karşı gelen n tane şerit bulunduğunu ve y_k 'nin, uzunluğu $L(y_k)$ ve genişliği Δy_k olan k . şeridin alt kenarı olduğunu varsayalım. Tüm plakaya karşı uygulanan kuvvete, her şeride etki eden kuvvetleri toplayarak yaklaşımda bulunulur. Bu toplam bir Riemann yoplama verir:

$$F \approx \sum_{k=1}^n (w \cdot (\text{şerit derinliği})_k \cdot L(y_k)) \Delta y_k \quad (3)$$

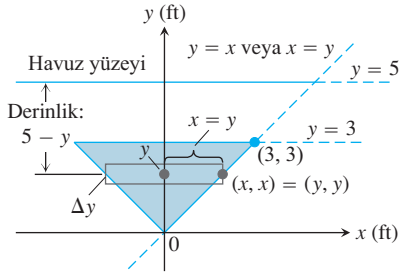
(3)'teki toplam sürekli bir fonksiyonun $[a, b]$ aralığındaki Riemann toplamıdır ve bölünüşün normu sıfıra giderken yaklaşımların iyileşmesini bekleriz. Plakaya karşı uygulanan kuvvet bu toplamın limitidir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (w \cdot (\text{şerit derinliği})_k \cdot L(y_k)) \Delta y_k = \int_a^b w \cdot (\text{şerit derinliği}) \cdot L(y) \Delta y$$

TANIM Dikey Bir Levhaya Etki Eden Akışkan Basıncı İçin İntegral

Ağırlık yoğunluğu w olan bir akışkanın içine batırılmış bir plakanın y -ekseninde $y = a$ 'dan $y = b$ 'ye kadar uzandığını varsayın. $L(y)$, y seviyesinde plakanın yüzeyi boyunca soldan sağa doğru ölçülen yatay şeridin uzunluğu olsun. Bu durumda, plakanın bir tarafına akışkanın uyguladığı basınç şu şekildedir:

$$F = \int_a^b w \cdot (\text{şerit derinliği}) \cdot L(y) \Delta y \quad (4)$$



ŞEKİL 6.67 Örnek 1'de bulunan su altındaki plakanın bir tarafına uygulanan kuvveti bulmak için, buradaki gibi bir koordinat sistemi kullanabiliriz.

ÖRNEK 1 Akışkan Basıncı İntegralini Uygulamak

Tabanı 6 ft ve yüksekliği 3 ft olan bir ikizkenar dik üçgen plaka dikey ve tabanı yukarıda olacak şekilde, bir yüzme havuzunun yüzeyinin 2 ft altına yerleştiriliyor. Plakanın bir tarafına suyun uyguladığı kuvveti bulun.

Çözüm Orijini plakanın alt köşesine koyup, y -eksenini plakanın simetri eksenini boyunca yukarı doğru alarak çalışacak bir koordinat sistemi oluştururuz (Şekil 6.67). Havuzun yüzeyi $y = 5$ doğrusu ve plakanın üst tabanı $y = 3$ doğrusu üzerindedir. Plakanın sağ kenarı, sağ köşesi $(3, 3)$ noktasında olmak üzere, $y = x$ doğrusu üzerindedir. y seviyesindeki ince bir şeridin uzunluğu şudur:

$$L(y) = 2x = 2y$$

Yüzeyin altındaki şeridin uzunluğu $(5 - y)$ 'dir. Dolayısıyla, plakanın bir tarafına suyun uyguladığı kuvvet

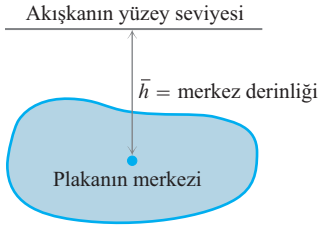
$$\begin{aligned}
 F &= \int_a^b w \cdot (\text{şerit derinliği}) \cdot L(y) \, dy && \text{Denk. (4)} \\
 &= \int_0^3 62.4(5 - y)2y \, dy \\
 &= 124.8 \int_0^3 (5y - y^2) \, dy \\
 &= 124.8 \left[\frac{5}{2}y^2 - \frac{y^3}{3} \right]_0^3 = 1684.8 \text{ lb}
 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Akışkan Kuvvetleri ve Merkezler

Sıvıya batırılmış dikey bir plakanın merkezinin yerini biliyorsak (Şekil 6.68), plakanın bir tarafına uygulanan kuvveti bulmak için kestirme bir yol kullanabiliriz. Bu yol (4) denkleminin çıkar:

$$\begin{aligned}
 F &= \int_a^b w \times (\text{şerit derinliği}) \times L(y) \, dy \\
 &= w \int_a^b (\text{şerit derinliği}) \times L(y) \, dy \\
 &= w \times (\text{plakanın kapladığı alanın yüzey seviye çizgisi etrafında moment}) \\
 &= w \times (\text{plakanın merkezinin derinliği}) \times (\text{plakanın alanı})
 \end{aligned}$$



ŞEKİL 6.68 Plakanın bir tarafına uygulanan kuvvet $w \cdot \bar{h} \cdot \text{plaka alanı}$ dır.

Akışkan Kuvvetleri ve Merkezler

Ağırlık yoğunluğu w olan bir akışkanın sıvı altındaki dikey bir tabakaya uyguladığı kuvvet w , plakanın merkezinden akışkan yüzeyine olan uzaklık $\bar{h}$ ve plakanın alanının çarpımıdır:

$$F = w\bar{h}A. \quad (5)$$

ÖRNEK 2 (5) Denklemini Kullanarak Akışkan Kuwetini Bulmak

(5) denklemini kullanarak Örnek 1'deki kuvveti bulun.

Çözüm Üçgenin merkezi (Şekil 6,67) y -ekseni üzerinde, tabandan köşeye olan uzaklığın üçte birindedir, dolayısıyla $\bar{h} = 3$ olur. Üçgenin alanı

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} (\text{taban}) (\text{yükseklik}) \\
 &= \frac{1}{2} (6)(3) = 9
 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

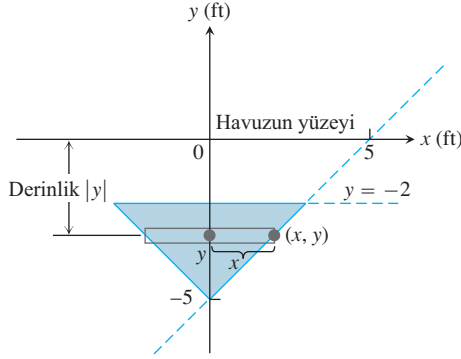
$$\begin{aligned}
 F &= w\bar{h}A = (62.4)(3)(9) \\
 &= 1684.8 \text{ lb}
 \end{aligned}$$

buluruz.

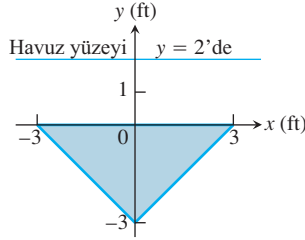
ALİŞTIRMALAR 6.7

Aşağıdaki alıştırmalar için akışkanların ağırlık-yoğunlukları sayfa 456'daki tablodan bulunabilir.

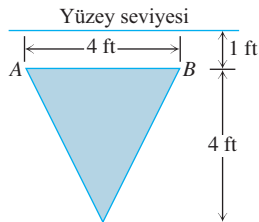
1. **Üçgensel plaka** Örnek 1'deki plakanın bir tarafına uygulanan akışkan kuvvetini buradaki koordinat sistemiyle bulun.



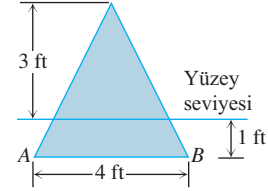
2. **Üçgensel plaka** Örnek 1'deki plakanın bir tarafına uygulanan akışkan kuvvetini buradaki koordinat sistemiyle bulun.



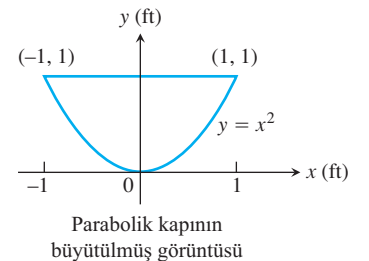
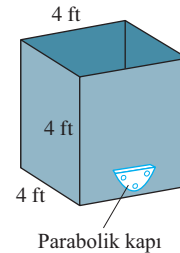
3. **Alçaltılmış üçgensel plaka** Örnek 1'deki plaka suyun 2 ft daha içine indiriliyor. Plakanın bir tarafındaki akışkan kuvveti şimdi nedir?
4. **Yükseltilmiş üçgensel plaka** Örnek 1'deki plaka, üst kenarı havuzun yüzeyine gelecek şekilde kaldırılıyor. Bir tarafındaki akışkan kuvveti nedir?
5. **Üçgensel plaka** Burada gösterilen ikizkenar üçgen şeklindeki plaka dikey olarak bir gölün yüzeyinin 1 ft altına koyuluyor.
- Plakanın bir tarafındaki akışkan kuvvetini bulun.
 - Su, temiz su yerine deniz suyu olsaydı, plakanın bir tarafındaki akışkan basıncı ne olurdu?



6. **Döndürülmüş üçgensel plaka** Alıştırma 5'teki plaka, AB doğrusu etrafında plakanın bir kısmı gölün dışına çıkacak şekilde 180° döndürülüyor. Artık akışkan plakanın bir tarafına ne kadar kuvvet uygular?

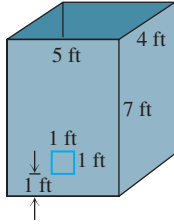


7. **New England Akvaryumu** Boston'daki New England Akvaryumundaki tipik bir balık tankının dikdörtgen cam penceresinin gözlem kısmı 63 inç genişliğindedir ve su yüzeyinin 0.5 inç altından yüzeyin 33.5 inç aşağısına kadar uzanır. Pencerenin bu kısmına uygulanan akışkan basıncını bulun. Deniz suyunun ağırlık-yoğunluğu 64 lb/ft^3 'tür. (Merak ediyorsanız, cam $3/4$ inç kalınlığındadır ve balıkların dışarı atlamasını engellemek için tank duvarları suyun 4 inç yukarısına kadar çıkar.)
8. **Balık tankı** Tabanı $2 \times 4 \text{ ft}$ ve yüksekliği 2 ft olan (iç boyutlar) yatay, dikdörtgen şeklinde bir tatlı su balık tankı tepesinden 2 ft aşağıya kadar su ile doludur.
- Tankın yanlarındaki ve uçlarındaki akışkan kuvvetini bulun.
 - Tank mühürlenir ve kare yüzeylerinden biri taban olacak şekilde üzerine kaldırılırsa (dökülmeden), dikdörtgen yüzeylerdeki akışkan basıncına ne olur?
9. **Yarım daire şeklinde bir plaka** Çapı 2 ft olan yarım daire şeklinde bir plaka çapı yüzeyde olacak şekilde temiz suya daldırılıyor. Plakanın bir tarafına suyun uyguladığı akışkan basıncını bulun.
10. **Süt tankeri** Bir tanker 6 ft çapında yatay bir silindirik tankla süt taşımaktadır. Tank yarı doluyken, süt tankın uçlarına ne kadar kuvvet uygular?
11. Burada gösterilen kübik metal tankın vidalarla yerinde tutulan ve akıtmadan 169 lb'lık akışkan basıncına dayanabilecek parabolik bir kapısı vardır. Depolamayı düşündüğünüz sıvının ağırlık yoğunluğu 50 lb/ft^3 'tür.
- Sıvı 2 ft derinliğindeyken, kapıya uygulanan akışkan kuvveti nedir?
 - Bu kabın tasarım sınırlarını geçmeden doldurulabileceği maksimum yükseklik nedir?

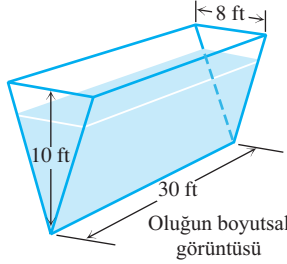
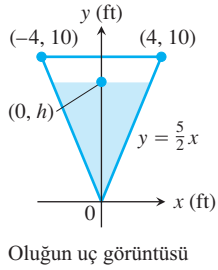


12. Burada gösterilen dikdörtgen tankın tabandan 1 ft yükseklikte $1 \text{ ft} \times 1 \text{ ft}$ 'lik kare bir penceresi vardır. Pencere çatlamadan 312 lb'lik bir akışkan basıncına dayanacak şekilde yapılmıştır.

- a. Tank 3 ft derinliğinde suyla doluyken, pencerenin karşı koyacağı akışkan kuvveti ne kadardır?
- b. Pencerenin tasarım sınırları aşılmadan tank hangi seviyeye kadar doldurulabilir?

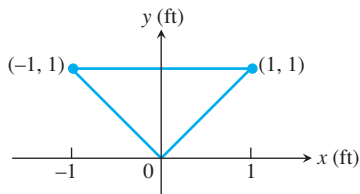
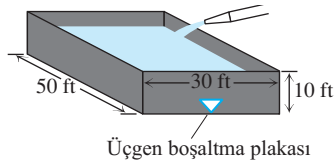


13. Burada gösterilen oluğun uç plakaları 6667 lb'lik akışkan kuvvetine dayanacak şekilde tasarlanmıştır. Bu sınırları aşmadan, tank kaç ft^3 su alabilir? Yanıtınızı yuvarlayın.



14. Burada gösterilen dikdörtgen havuza $1000 \text{ ft}^3/\text{sa}$ hızla su akmaktadır.

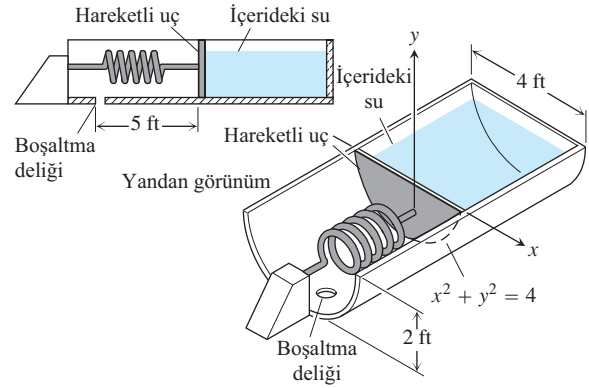
- a. 9 saatlik dolumdan sonra üçgen boşaltma plakasındaki akışkan basıncını bulun.
- b. Boşaltma plakası 20 lb'lik bir akışkan kuvvetine dayanacak şekilde tasarlanmıştır. Bu limiti aşmadan, havuzu hangi yüksekliğe kadar doldurabilirsiniz?



15. Uzunluğu a birim, genişliği b birim olan dikey dikdörtgen bir plaka uzun kenarları akışkanın yüzeyine paralel olacak şekilde ağırılık yoğunluğu w olan bir akışkanın içine konuluyor. Plakanın dikey boyutundaki basıncın ortalama değerini bulun. Yanıtınızı açıklayın.

16. (Aıştırma 15'in devamı) Akışkanın plakanın bir tarafına uyguladığı kuvvetin, basıncın ortalama değeri (Aıştırma 15'te bulunmuştur) kere plakanın alanı olduğunu gösterin.

17. Aşağıdaki tanka $4 \text{ ft}^3/\text{dak}$ hızla su dolmaktadır. Tankın dik-kesitleri 4 ft çaplı yarım dairelerdir. Tankın bir ucu hareketlidir, fakat hacimi arttırmak için ucu hareket ettirmek bir yayı sıkıştırır. Yay sabiti $k = 100 \text{ lb/ft}$ 'tir. Tankın ucu yayı 5 ft sıkıştırırsa, su dipteki bir güvenlik deliginden $5 \text{ ft}^3/\text{dak}$ hızla boşalacaktır. Hareketli uç, tank taşmadan deliğe varabilir mi?



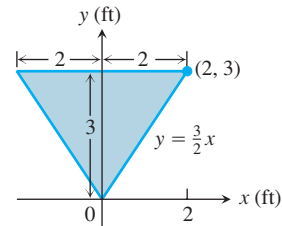
18. **Sulama oluğu** Bir sulama oluğunun dikey uçları, bir kenarı 3 ft olan karelerdir.

- a. Oluk doluyken, uçlarındaki akışkan kuvvetini bulun.
- b. Akışkan kuvvetini %25 azaltmak için, oluktaki su seviyesini kaç inç azaltmalıyız?

19. **Süt kartonu** Dikdörtgen bir süt kartonunun tabanı 3.75×3.75 inç ve yüksekliği 7.75 inçtir. Karton doluyken, süttün bir kenara uyguladığı akışkan basıncını bulun.

20. **Yağ tenekesi** Standart bir yağ tenekesinin tabanı 5.75×3.5 inç ve yüksekliği 10 inçtir. Teneke doluyken, tabana ve her kenara uygulanan akışkan basıncını bulun.

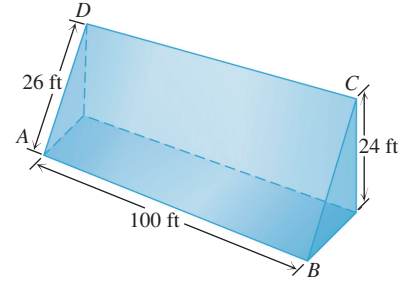
21. **Sulama oluğu** Bir sulama oluğunun dikey uçları aşağıda gösterildiği şekilde ikizkenar üçgenlerdir (ft olarak).



- a. Oluk doluyken, uçlardaki akışkan kuvvetini bulun.

- b. Uçlardaki akışkan kuvvetini yarıya indirmek için oluktaki su seviyesini kaç inç azaltmalısınız? (Yarım inç hassaslıkta yanıtlayın.)
- c. Oluğun ne kadar uzun olduğunun önemi var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.
22. Bir barajın set'i bir dikdörtgendir, $ABCD$ ve boyutları $AB = CD = 100$ ft, $AD = BC = 26$ ft dir. $ABCD$ düzlemi dikey olmak yerine şekilde gösterildiği gibi eğimlidir. Dolayısıyla setin üst kısmı tabandan 24 ft yüksektir.

Su seviyesi set seviyesinde iken su basıncından dolayı sete etki eden kuvveti bulun.



Bölüm 6

Tekrar Soruları

1. Dilimleme yöntemiyle cisimlerin hacimlerini nasıl tanımlar ve hesaplarsınız? Bir örnek verin.
2. Hacim hesaplamak için disk ve pul yöntemleri dilimleme yönteminden nasıl üretilir? Bu yöntemlerle hacim hesaplanmasına örnekler verin.
3. Silindirik kabuk yöntemini açıklayın. Bir örnek verin.
4. Düzgün bir $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, parametrize eğrisinin uzunluğunu nasıl tanımlarsınız? Düzgünlüğün uzunlukla ne ilgisi vardır? Eğrinin uzunluğunu bulmak için parametrisasyonla ilgili başka ne bilmek gerekir?
5. Kapalı bir aralıkta düzgün bir fonksiyonun grafiğinin uzunluğunu nasıl bulursunuz? Bir örnek verin. Peki ya sürekli bir birinci türevi olmayan fonksiyonlar için ne diyebilirsiniz?
6. Kütle Merkezi nedir?
7. İnce bir çubuğun veya bir malzeme şeridinin kütle merkezini nasıl bulursunuz? Örnek verin. Bir malzemenin yoğunluğu sabitse, kütle merkezinin nerede olduğunu hemen söyleyebilirsiniz. Nere-dedir?

8. İnce düz bir malzeme tabakasının kütle merkezini nasıl bulursunuz? Örnek verin.
9. Düzgün bir $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ fonksiyonunun grafiğinin x -ekseni etrafında döndürülmesi ile süpürülen yüzeyin alanını nasıl tanımlar ve hesaplarsınız? Bir örnek verin.
10. Hangi koşullar altında bir $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$ eğrisinin a. x -ekseni b. y -ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen yüzeyin alanını bulabilirsiniz? Örnekler verin.
11. Pappus'un iki teoremi ne der? Yüzey alanları ile hacimleri hesaplamada ve merkezlerin yerini bulmada nasıl kullanıldıklarına dair örnek verin.
12. x -ekseninin bir bölümü üzerinde değişken bir kuvvetin yaptığı işi nasıl tanımlar ve hesaplarsınız? Bir sıvıyı bir tanktan pompalamak için yapılan işi nasıl hesaplarsınız? Örnekler verin.
13. Dikey bir duvarın bir kısmı üzerine bir sıvının uyguladığı kuvveti nasıl hesaplarsınız? Bir örnek verin.

Bölüm 6

Problemler

Hacimler

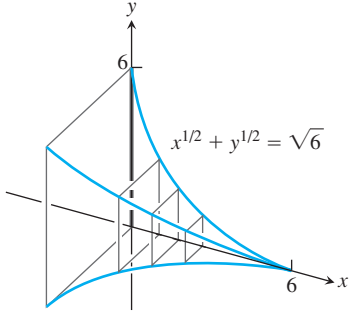
1–16 alıştırmalarındaki cisimlerin hacimlerini bulun.

1. Cisim, $x = 0$ ve $x = 1$ 'de x eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. Bu düzlemler arasında x -eksenine dikey olan dik-

kesitleri, çapları $y = x^2$ parabolünden $y = \sqrt{x}$ parabolüne kadar giden dairesel disklerdir.

2. Cismin tabanı birinci bölgede $y = x$ doğrusu ile $y = 2\sqrt{x}$ parabolü arasında kalan bölgedir. Cismin x -eksenine dikey olan dik-ketitleri, tabanları doğrudan eğriye uzanan eşkenar üçgenlerdir.

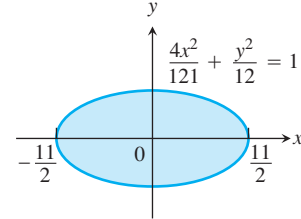
3. Cisim, $x = \pi/4$ ve $x = 5\pi/4$ 'te x -eksenine dik olan düzlemler arasında bulunmaktadır. Bu düzlemler arasındaki dik-kesitler çapları $y = 2 \sin x$ eğrisinden $y = 2 \cos x$ eğrisine giden dairesel disklerdir.
4. Cisim, $x = 0$ ve $x = 6$ 'da x -eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. Bu düzlemler arasındaki dik-kesitler tabanları x -ekseninden $x^{1/2} + y^{1/2} = \sqrt{6}$ eğrisine kadar giden karelerdir.



5. Cisim, $x = 0$ ve $x = 4$ 'te x -eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. Cismin bu düzlemler arasında x -eksenine dikey olan dik-kesitleri çapları $x^2 = 4y$ eğrisinden $y^2 = 4x$ eğrisine giden dairesel disklerdir.
6. Cismin tabanı xy -düzlemindeki $y^2 = 4x$ parabolü ile $x = 1$ doğrusu arasında kalan bölgedir. x -eksenine dikey her dik-kesit bir kenarı düzlemde olan bir eşkenar üçgendir (Üçgenlerin hepsi düzlemin aynı tarafındadır).
7. x -ekseni, $y = 3x^4$ eğrisi, $x = 1$ ve $x = -1$ doğruları ile sınırlanan bölgenin (a) x -ekseni, (b) y -ekseni, (c) $x = 1$ doğrusu ve (d) $y = 3$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen cisimlerin hacimlerini bulun.
8. $x = y^2 + 1$ eğrisi ile $x = 1$ ve $y = 1/2$ doğruları arasındaki "üçgen" bölgenin (a) x -ekseni, (b) y -ekseni, (c) $x = 2$ doğrusu ve (d) $y = 4$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen cisimlerin hacimlerini bulun.
9. Soldan $x = y^2 + 1$ ve sağdan $x = 5$ doğrusuyla sınırlanan bölgenin (a) x -ekseni, (b) y -ekseni ve (c) $x = 5$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen cisimlerin hacimlerini bulun.
10. $y^2 = 4x$ parabolü ve $y = x$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin (a) x -ekseni, (b) y -ekseni, (c) $x = 4$ doğrusu ve (d) $y = 4$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen cisimlerin hacimlerini bulun.
11. Birinci bölgede x -ekseni, $x = \pi/3$ doğrusu ve $y \tan x$ eğrisi ile sınırlanan "üçgen" bölgenin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmini bulun.
12. $y = \sin x$ eğrisi ile $x = 0$, $x = \pi$ ve $y = 2$ doğruları ile sınırlanan bölgenin, $y = 2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmini bulun.
13. x -ekseni ile $y = x^2 - 2x$ eğrisi arasındaki bölgenin (a) x -ekseni, (b) $y = -1$ doğrusu, (c) $x = 2$ doğrusu ve (d) $y = 2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen cisimlerin hacimlerini bulun.
14. $y = 2 \tan x$, $y = 0$, $x = -\pi/4$ ve $x = \pi/4$ ile sınırlanan bölgenin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmini bulun. (Bölge birinci ve üçüncü bölgelerde bulunur ve eğri bir papyona benzer.)

15. **Bir küre deliğinin hacmi** 2 ft yarıçaplı içi dolu bir kürenin merkezinden geçen $\sqrt{3}$ ft yarıçaplı yuvarlak bir delik oyulmuştur. Küreden çıkarılan malzemenin hacmini bulun.

16. **Bir futbol topunun hacmi** Bir futbol topunun profili aşağıdaki elipse benzer. Topun hacmini in^3 olarak bulun.



Eğrilerin Uzunlukları

17–23 Alıştırmalarındaki eğrilerin uzunluklarını bulun

17. $y = x^{1/2} - (1/3)x^{3/2}$, $1 \leq x \leq 4$

18. $x = y^{2/3}$, $1 \leq y \leq 8$

19. $y = (5/12)x^{6/5} - (5/8)x^{4/5}$, $1 \leq x \leq 32$

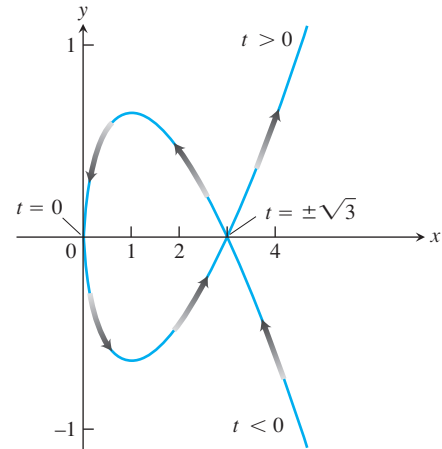
20. $x = (y^3/12) + (1/y)$, $1 \leq y \leq 2$

21. $x = 5 \cos t - \cos 5t$, $y = 5 \sin t - \sin 5t$, $0 \leq t \leq \pi/2$

22. $x = t^3 - 6t^2$, $y = t^3 + 6t^2$, $0 \leq t \leq 1$

23. $x = 3 \cos \theta$, $y = 3 \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$

24. Şekilde gösterilen $x = t^2$, $y = (t^3/3) - t$ kapalı halkanın uzunluğunu bulun. Halka, $t = -\sqrt{3}$ te başlayıp $t = \sqrt{3}$ bitmektedir.



Merkezler ve Kütle Merkezleri

25. $y = 2x^2$ ve $y = 3 - x^2$ parabolleriyle çevrelenen bölgeyi kaplayan ince, düz bir tabakanın merkezini bulun.
26. x -ekseni, $x = 2$ ve $x = -2$ doğruları ve $y = x^2$ parabolü ile çevrelenen bölgeyi kaplayan ince, düz tabakanın merkezini bulun.

27. Birinci bölgede bulunan ve y -ekseni, $y = x^2/4$ parabolü ve $y = 4$ doğrusuyla çevrelenen “üçgen” bölgeyi kaplayan ince, düz tabakanın merkezini bulun.
28. $y^2 = x$ parabolü ve $x = 2y$ doğrusu ile çevrelenen bölgeyi kaplayan ince, düz tabakanın merkezini bulun.
29. Yoğunluk fonksiyonu $\delta(y) = 1 + y$ ise, $y^2 = x$ parabolü ve $x = 2y$ ile çevrelenen bölgeyi kaplayan ince, düz plakanın kütle merkezini bulun. (Yatay şeritler kullanın.)
30. a. $x = 1$ 'den $x = 9$ 'a kadar $y = 3/x^{3/2}$ eğrisi ile x -ekseni arasındaki bölgeyi kaplayan sabit yoğunluklu ince bir plakanın ağırlık merkezini bulun.
b. Yoğunluğu sabit olmak yerine, $\delta(x) = x$ ise, plakanın kütle merkezini bulun. (Dikey şeritler kullanın.)

Dönel Yüzeylerin Alanları

31–36 Problemlerinde, eğrilerin verilen eksenler etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeylerin alanlarını bulun.

31. $y = \sqrt{2x + 1}$, $0 \leq x \leq 3$; x -ekseni
32. $y = x^3/3$, $0 \leq x \leq 1$; x -ekseni
33. $x = \sqrt{4y - y^2}$, $1 \leq y \leq 2$; y -ekseni
34. $x = \sqrt{y}$, $2 \leq y \leq 6$; y -ekseni
35. $x = t^2/2$, $y = 2t$, $0 \leq t \leq \sqrt{5}$; x -ekseni
36. $x = t^2 + 1/(2t)$, $y = 4\sqrt{t}$, $1/\sqrt{2} \leq t \leq 1$; y -ekseni

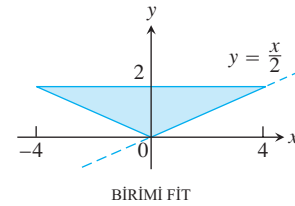
İş

37. **Donanım kaldırmak** Bir dağcı, arkasından sarkan ve her metresi 0.8 newton ağırlığındaki 40 metrelik bir ipten asılı olan 100 N'luk (yaklaşık 22.5 lb) donanımı yukarı çekmek üzeredir. Ne kadar iş yapar? (*İpucu:* Yük ve ip için ayrı ayrı çözün ve toplayın.)
38. **Sızdıran tanker** 800 galonluk bir tankeri Washington Dağı'nın eteğinden zirvesine kadar çıkardınız ve zirveye vardığınızda tankın sadece yarıya kadar dolu olduğunu farkettiler. Dolu bir tankla yola çıkmış, sabit hızla gitmiş ve 4750 ft'lik yükseklik farkını 50 dakikada almıştınız. Suyun sabit bir hızla sızdığını varsayarsanız, suyu tepeye kadar çıkartmak için ne kadar iş yapmışsınızdır? Kendinizi ve tankeri yukarı çıkarmak için yapılan işi saymayın. Suyun ağırlığı 8 lb/Amerikan galonudur.
39. **Bir yayı germek** Bir yayı normal uzunluğundan 1 ft germek için 20 lb'lık bir kuvvet gerekiyorsa, yayı bu kadar germek için ne kadar iş yapmak gerekir? Peki ya 1 ft daha?
40. **Garaj kapısı yayı** 200 N'luk bir kuvvet bir garaj kapısı yayını normal uzunluğundan 0.8 m uzatacaktır? 300 N'luk bir kuvvet yayı ne kadar gerer? Yayı bu kadar germek için ne kadar iş yapmak gerekir?
41. **Bir rezervuardan su pompalamak** Üstü 20 ft genişliğinde ve derinliği 8 ft olan tepesi aşağıda dik bir koni şeklindeki bir rezervuar su doludur. Suyu rezervuarın 6 ft yukarısına pompalamak için ne kadar iş yapmak gerekir?

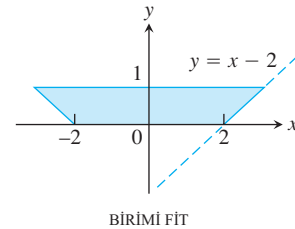
42. **Bir rezervuardan su pompalamak** (Problem 41'in devamı) Rezervuar 5 ft derinliğinde doludur ve su rezervuarın üstüyle aynı seviyeye pompalanacaktır. Ne kadar iş yapılır?
43. **Konik bir tanktan sıvı pompalamak** 5 ft yarıçaplı ve 10 ft yüksekliğinde tepesi aşağıya doğru olan bir dairesel dik koni şeklindeki bir depo ağırlık yoğunluğu 60 lb/ft³ olan bir sıvıyla doludur. Sıvıyı tankın 2 ft yukarısına pompalamak için ne kadar iş yapılması gerekir? Pompa 275 ft-lb/sn hızlı (1/2 bg) bir motorla çalışıyorsa, depoyu boşaltmak ne kadar sürer?
44. **Silindirik bir tanktan sıvı pompalamak** Bir depolama tankı eksenini yatay olan 20 ft uzunluğunda ve 8 ft çapında bir silindirdir. Tank yarısına kadar ağırlığı 57 lb/ft³ olan zeytinyağıyla doluysa, tankın dibinden tankın 6 ft yukarısına kadar çıkan bir boruyla yağ boşaltılırken ne kadar iş yapılacağını bulun.

Akışkan Kuvveti

45. **Su oluğu** Aşağıda görülen dikey üçgen tabaka suyla dolu bir oluğun uç kısmıdır ($w = 62.4$). Plakaya karşı olan akışkan kuvveti nedir?

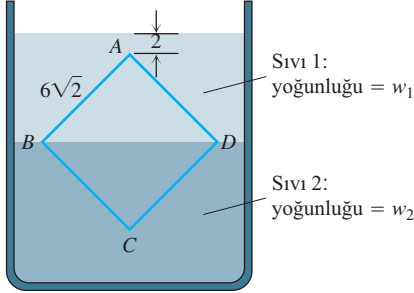


46. **Akçağaç şurubu oluğu** Aşağıda gösterilen dikey yamuk şeklindeki tabaka ağırlığı 75 lb/ft³ olan akçağaç şurubuyla dolu bir oluğun uç kısmıdır. Şurup 10 ft derinliğindeyken, oluğun uç tabakasına uygulanan akışkan basıncı nedir?

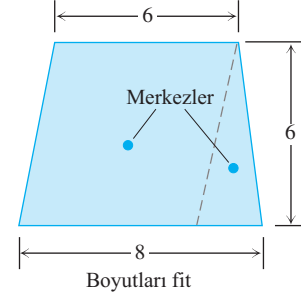


47. **Parabolik kapak üzerindeki kuvvet** Bir barajdaki dikey düz bir kapağın şekli, birimler fit olmak üzere, $y = 4x^2$ parabolü ile $y = 4$ doğrusu arasında kalan bölgenin şekli gibidir. Kapının tepesi suyun yüzeyinin 5 ft altındadır. Suyun kapağa uyguladığı kuvveti bulun ($w = 62.4$).
48. Taban kenarı 1 ft olan ve iç duvarları 40.000 lb'lık akışkan kuvvetine dayanabilecek dikey bir kare tankta civa ($w = 849 \text{ lb/ft}^3$) depolamak istiyorsunuz. Herhangi bir zamanda tankta kaç ft³ civa depolayabilirsiniz?

49. Şekilde yandan görülen depo, ağırlık yoğunlukları w_1 ve w_2 olan karışmayan iki sıvıyla doludur. Dikey $ABCD$ kare plakasının bir tarafındaki akışkan kuvvetini bulun. B ve D noktaları sınırdadır ve karenin bir kenarı $6\sqrt{2}$ ft'tir.



50. Aşağıda gösterilen yamuk palaka üst köşesi yüzeyin 4 ft altında olacak şekilde su ($w = 62.4$) altına konuluyor. Plakanın bir tarafındaki akışkan kuvvetini iki yoldan bulun:



Bölüm 6

Ek ve İleri Alıştırıcılar

Hacim ve Uzunluk

- $y = f(x)$ sürekli fonksiyonun grafiği, x -ekseni, $x = a$ sabit doğrusu ve $x = b$, $b > a$, değişken doğrusu ile çevrelenen bölgenin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle bir cisim üretiliyor. Hacim her b değeri için $b^2 - ab$ 'dir. $f(x)$ 'i bulun.
- $y = f(x)$ sürekli fonksiyonun grafiği, x -ekseni, $x = 0$ ve $x = a$ doğrularıyla sınırlanan bölgenin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle bir cisim üretiliyor. Hacim her $a > 0$ değeri için $a^2 + a$ 'dır. $f(x)$ 'i bulun.
- Artan $f(x)$ fonksiyonunun $x \geq 0$ için düzgün olduğunu ve $f(0) = a$ olduğunu varsayın. $s(x)$, $(0, a)$ 'dan $(x, f(x))$ 'e kadar, $x > 0$, f 'nin grafiğini gösterebilir. Bir C sabiti için, $s(x) = Cx$ ise $f(x)$ 'i bulun. C 'nin alabileceği değerler nedir?
- a. $0 < \alpha \leq \pi/2$ için

$$\int_0^\alpha \sqrt{1 + \cos^2 \theta} d\theta > \sqrt{\alpha^2 + \sin^2 \alpha}.$$

olduğunu gösterin.

- b. (a)'daki sonucu genelleştirin.

Moment ve Kütle Merkezleri

- Altın x -ekseni ve üstten $y = 1 - x^n$, n bir pozitif çift tamsayı, eğrisiyle sınırlanan bölgenin merkezini bulun. $n \rightarrow \infty$ iken, merkezin limit konumu nedir?
- Bir kamyonun arkasındaki iki tekerlekli bir römorkla bir telefon direği taşırsanız, uygun bir "dil" ağırlığı sağlamak için tekerleklerin direğin kütle merkezinin 3 ft kadar arkasında olmasını istersiniz.

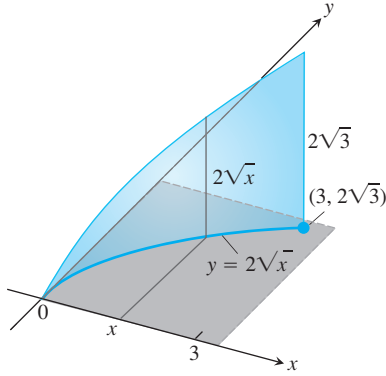
- Bir integral hesaplayarak.
- Plakayı bir paralelkenar ve bir ikizkenar üçgene bölüp, merkezlerini hesaplayarak ve Bölüm 6.7'deki $F = w\bar{h}A$ denklemini kullanarak.

tersiniz. NYNEX' in sınıf 1.40 ft'lik tahta direklerinin çevresi üstte 27 inç ve tabanda 43.5 inçtir. Kütle merkezi üstten ne kadar uzaktadır?

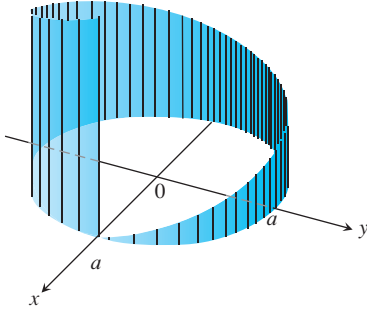
- Alanı A ve yoğunluğu sabit δ olan ince metal bir tabakanın xy -düzleminde bir R bölgesini kapladığını varsayın ve M_y tabakanın y -ekseni etrafındaki momenti olsun. Tabakanın $x = b$ etrafındaki momentinin aşağıdaki şekilde olduğunu gösterin:
 - Tabaka doğrunun sağındaysa, $M_y - b\delta A$
 - Tabaka doğrunun solundaysa, $b\delta A - M_y$
- $y^2 = 4ax$ eğrisi ve $x = a$, $a =$ pozitif sabit, doğrusu ile sınırlanan bölgeyi kaplayan ince bir tabakanın (x, y) 'deki yoğunluğu doğrudan (a) x ile ve (b) $|y|$ ile orantılı ise, tabakanın kütle merkezini bulun.
- a. Birinci bölgede, yarıçapları a ve b olan ve merkezleri orijinde bulunan iki eşmerkezli çember ve koordinat eksenleri arasında kalan bölgenin merkezini bulun.
b. a, b 'ye yaklaşırken merkezin koordinatlarının limitini bulun ve sonucun anlamını tartışın.
- Kenarı 1 ft olan bir kareden üçgen bir köşe kesilmektedir. Çıkarılan üçgenin alanı 36 inç²'dir. Kalan bölgenin merkezi orijinal karenin bir kenarından 7 inç uzaktaysa, diğer kenarlardan ne kadar uzaktadır?

Yüzey Alanı

- $y = 2\sqrt{x}$ eğrisinin üzerindeki noktalarda, uzunlukları $h = y$ olan doğru parçaları xy -düzlemine dik olarak çizilmektedir (Şekle bakın). Bu dik doğruların $(0, 0)$ 'dan $(3, 2\sqrt{3})$ 'e kadar oluşturdukları yüzeyin alanını bulun.



12. a yarıçaplı bir çemberin üzerindeki noktalarda, çemberin düzlemine dik doğru parçaları çizilmektedir. Her P noktasındaki dik doğrunun uzunluğu ks 'dir. s çemberin $(a, 0)$ 'dan P 'ye kadar saat yönünün tersine radyan olarak ölçülen yay uzunluğu ve k de aşağıda gösterildiği gibi bir sabittir. $(a, 0)$ 'dan başlayıp çemberi bir kere dönen yay üzerindeki dik doğruların oluşturdukları yüzeyin alanını bulun.



İş

13. m kütleli bir parçacık $t = 0$ anında durgun konumdan harekete başlamakta ve x -ekseni boyunca büyüklüğü $F(t) = t^2$ olan değişken bir kuvvete karşı $x = 0$ 'dan $x = h$ 'ye kadar sabit ivmeyle götürülmektedir. Yapılan işi bulun.
14. **İş ve kinetik enerji** 16 onsluk bir golf topunun kuvvet sabiti $k = 2$ lb/inç olan dikey bir yaya yerleştirildiğini varsayın. Yay 6 inç sıkıştırılır ve serbest bırakılır. Top (yayın denge konumundan) ne kadar yükseğe çıkar?

Akışkan Kuvveti

15. Üçgen bir ABC tabakası düzlemi dikey olacak şekilde suya batırılır. 4ft uzunluğundaki AB kenarı suyun 6 ft altındayken, C köşesi suyun 2 ft altındadır. Suyun, tabakanın bir tarafına uyguladığı akışkan basıncını bulun.
16. Dikey bir dikdörtgen tabaka, üst kenarı akışkanın yüzeyine paralel olacak şekilde bir akışkanın içine batırılmıştır. Akışkanın, tabakanın bir tarafına uyguladığı kuvvetin tabakanın altındaki ve üstündeki basıncın ortalama değeri kere tabakanın alanını olduğunu gösterin.
17. Bir akışkan içine batırılmış bir tabakanın bir tarafındaki basınç merkezi akışkanın uyguladığı toplam kuvvetin düzlemdeki herhangi bir eksen etrafındaki momenti değiştirmeyecek şekilde uygulanabildiği nokta olarak tanımlanır. (a) h yükseklikli ve b genişlikli dikey bir tabakanın üst kenarı akışkanın yüzeyindeyse ve (b) h yükseklikli ve b tabanlı dikey bir üçgenin b kenarının karşısındaki köşe akışkanın yüzeyinin a ft ve b tabanı akışkanın yüzeyinin $(a + h)$ ft altındaysa basınç merkezlerini bulun.

Bölüm 6

Teknoloji Uygulama Projeleri

Mathematica/Maple Module

Alanları, Hacimleri ve Eğrilerin Uzunluklarını Kestirmek için Riemann Toplamlarını Kullanmak

Alanları ve hacimleri gözünüzde canlandırın ve yaklaşımda bulunun **Kısım I** ve **Kısım II**: Dönel Cisim Hacimleri; ve Kısım III: Eğrilerin Uzunlukları.

Mathematica/Maple Module

Bir Bungee Atlayışını Modellemek

Bir bungee atlayıcısının harcadığı kuvveti modellemek için veri toplayın (veya önceden toplanmış veri kullanın). Verilen bir atlayıcı ve verilen bir bungee ipi uzunluğu için atlayıcının düşmüş olduğu mesafeyi hesaplamak için iş-enerji teoremini kullanın.