

4.8

Ters Türevler

Bir fonksiyonun türevinin nasıl bulunacağını öğrendik. Ancak, bir çok problem, bilinen türevinden (bilinen değişim oranından) fonksiyonun bulunmasını gerektirir. Örneğin, belli bir başlangıç yüksekliğinden düşmekte olan bir cismin hız fonksiyonunu biliyor olabiliriz ve belirli bir periyot içinde herhangi bir anda cismin yüksekliğini bilmeye ihtiyacımız olabilir. Daha genel olarak, bir F fonksiyonunu türevi olan f 'den bulmak istiyoruz. Böyle bir F fonksiyonu varsa, buna f 'nin *ters türevi* denir.

Ters Türevleri Bulmak

TANIM Ters Türev

Bir I aralığındaki her x için $F'(x) = f(x)$ ise F 'ye I aralığı üzerinde f 'nin bir **ters türevi** denir.

$F(x)$ fonksiyonunu, türevi olan $f(x)$ 'ten bulma işlemine *ters türev alma* denir. Bir f fonksiyonunun ters türevini göstermek için F , bir g fonksiyonunun ters türevini göstermek için G vs. gibi büyük harfler kullanırız.

ÖRNEK 1 Ters Türevleri Bulmak

Aşağıdaki fonksiyonların her biri için bir ters türev bulunuz

- (a) $f(x) = 2x$
- (b) $g(x) = \cos x$
- (c) $h(x) = 2x + \cos x$

Çözüm

- (a) $F(x) = x^2$
- (b) $G(x) = \sin x$
- (c) $H(x) = x^2 + \sin x$

Her cevap, türev olarak kontrol edilebilir. $F(x) = x^2$ 'nin türevi $2x$ 'dir. $G(x) = \sin x$ 'in türevi $\cos x$ ve $H(x) = x^2 + \sin x$ 'in türevi de $2x + \cos x$ 'dir. ■

Türevi $2x$ olan tek fonksiyon $F(x) = x^2$ değildir. $x^2 + 1$ fonksiyonunun türevi de aynıdır. Herhangi bir C için $x^2 = C$ 'nin de öyle. Başka var mıdır?

Bölüm 4.2'deki Ortalama Değer Teoreminin 2. Sonucu cevabı verir: Bir fonksiyonun herhangi iki ters türevi bir sabit kadar fark eder. Bu nedele, C **keyfi bir sabit** olmak üzere $x^2 + C$ fonksiyonları, $f(x) = 2x$ 'in *bütün* ters türevlerini oluşturur. Daha genel olarak, aşağıdaki sonuç geçerlidir.

F fonksiyonu bir I aralığı üzerinde f 'nin bir **ters türevi** ise f 'nin I aralığı üzerindeki en genel Ters Türevi, C keyfi bir sabit olmak üzere

$$F(x) + C$$

dir.

Böylece, f 'nin I aralığı üzerindeki en genel ters türevi, grafikleri dikey olarak birbirinin ötelenmesi olan bir $F(x) + C$ fonksiyon *ailesi*dir. Bu aileden özel bir ters türevi, C 'ye belirli bir değer atayarak seçebiliriz. Böyle bir atamanın nasıl yapılabileceğini gösteren bir örnek aşağıdadır.

ÖRNEK 2 Özel Bir Ters Türev Bulmak

$f(x) = \sin x$ 'in $F(0) = 3$ eşitliğini sağlayan bir ters türevini bulun

Çözüm $-\cos x$ 'in türevi $\sin x$ olduğundan,

$$F(x) = -\cos x + C$$

genel ters türevi $f(x)$ 'in bütün ters türevlerini verir. $F(0) = 3$ koşulu C için belirli bir değer tanımlar. $F(x) = -\cos x + C$ de $x = 0$ yazmak

$$F(0) = -\cos 0 + C = -1 + C$$

verir. $F(0) = 3$ olduğundan, C 'yi çözersek $C = 4$ buluruz. Böylece,

$$F(x) = -\cos x + 4$$

$F(0) = 3$ eşitliğini sağlayan ters türevdir. ■

Değişik türev alma kurallarından geriye doğru çalışırken, ters türevler için formüller ve kurallar geliştirebiliriz. Her bir durumda, verilen bir fonksiyonun bütün ters türevlerini gösteren genel ifadede keyfi bir C sabiti vardır. Tablo 4.2, önemli birkaç fonksiyonun ters türevlerini göstermektedir.

TABLO 4.2 Ters Türev Formülleri

	Fonksiyon	Genel ters türev
1.	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, n \text{ rasyonel}$
2.	$\sin kx$	$-\frac{\cos kx}{k} + C, \quad k \text{ bir sabit, } k \neq 0$
3.	$\cos kx$	$\frac{\sin kx}{k} + C, \quad k \text{ bir sabit, } k \neq 0$
4.	$\sec^2 x$	$\tan x + C$
5.	$\csc^2 x$	$-\cot x + C$
6.	$\sec x \tan x$	$\sec x + C$
7.	$\csc x \cot x$	$-\csc x + C$

Tablo 4.2 deki kurallar, soldaki fonksiyonu elde etmek üzere, genel ters türev'in, türevi alınarak kolaylıkla gerçekleştirilebilir. Örneğin, C sabitinin değeri ne olursa olsun, $\tan x + C$ 'nin türevi $\sec^2 x$ dir ve bu, $\sec^2 x$ 'in en genel ters türevi formülünü saptar.

ÖRNEK 3 Tablo 4.2'yi Kullanarak Ters Türev Bulmak

Aşağıdaki fonksiyonların her birinin genel ters türevlerini bulunuz.

(a) $f(x) = x^5$

(b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(c) $h(x) = \sin 2x$

(d) $i(x) = \cos \frac{x}{2}$

Çözüm

(a) $F(x) = \frac{x^6}{6} + C$

$n = 5$ ile
Formül 1

(b) $g(x) = x^{-1/2}$, bu yüzden

$$G(x) = \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$$

$n = -1/2$ ile
Formül 1

(c) $H(x) = \frac{-\cos 2x}{2} + C$

$k = 2$ ile
Formül 2

(d) $I(x) = \frac{\sin(x/2)}{1/2} + C = 2 \sin \frac{x}{2} + C$

$k = 1/2$ ile
Formül 3

Diğer türev kurallarına karşılık da ters türev kuralları vardır. Ters türevleri toplayıp çıkarabilir, bir sabitle çarpabiliriz.

Tablo 4.3'teki formüller, ters türevlerin türevleri alınarak ve sonucun orijinal fonksiyonla uyduğu gerçekleştirilerek, kolaylıkla ispatlanabilir. Formül 2, $k = -1$ ile Formül 1'in özel halidir.

TABLO 4.3 Ters Türevlerin Lineerlik Kuralları

	Fonksiyon	Genel ters türev
1.	<i>Sabit Çarpan Kuralı:</i> $kf(x)$	$kF(x) + C$, k bir sabit
2.	<i>Negatif Kuralı:</i> $-f(x)$	$-F(x) + C$,
3.	<i>Toplam veya Fark Kuralı:</i> $f(x) \pm g(x)$	$F(x) \pm G(x) + C$

ÖRNEK 4 Ters Türevler için Lineerlik Kurallarını Kullanmak

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + \sin 2x$$

Fonksiyonunun genel ters türevini bulun.

Çözüm Örnek 3'teki g ve h fonksiyonları ile, elimizde $f(x) = 3g(x) + h(x)$ vardır. Örnek 3b'den $g(x)$ 'in bir ters türevi $G(x) = 2\sqrt{x}$ olduğundan, ters türevler için Sabit Çarpan Kuralından, $3g(x) = 3/\sqrt{x}$ 'in bir ters türevi $3G(x) = 3 \cdot 2\sqrt{x} = 6\sqrt{x}$ dir. Benzer şekilde, Örnek 3c'den $h(x) = \sin 2x$ 'in bir ters türevinin $H(x) = (-1/2) \cos 2x$ olduğunu biliyoruz. Ters türevler için Toplam Kuralından, $f(x)$ 'in genel ters türev formülünü, C keyfi bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} F(x) &= 3G(x) + H(x) + C \\ &= 6\sqrt{x} - \frac{1}{2} \cos 2x + C \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. ■

Ters türevler birkaç önemli rol oynar. Bunları bulmanın yöntem ve teknikleri analizin başlıca bölümlerinden biridir (Bu, Bölüm 8'in konusudur).

Başlangıç Değer Problemleri ve Diferansiyel Denklemler

Bir $f(x)$ fonksiyonu için bir ters türev bulma problemi,

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

denklemini sağlayan bir $y(x)$ fonksiyonu bulmakla aynıdır. Bilinmeyen bir y fonksiyonunun türevini içeren bir denklem olduğundan, böyle bir denkleme **diferansiyel denklem** denir. Bunu çözmek için, denklemini sağlayan bir $y(x)$ fonksiyonu bulmamız gerekir. Bu fonksiyon, $f(x)$ 'in ters türevi alınarak bulunur. Ters türev alma işlemi sırasında ortaya çıkan keyfi sabiti, bir

$$y(x_0) = y_0$$

başlangıç koşulu belirleyerek saptarız. Bu koşul, $x = x_0$ iken $y(x)$ 'in değeri y_0 'dır demektir. Bir diferansiyel denklem ve bir başlangıç koşulu kombinasyonu başlangıç **değer problemi** adını alır. Böyle denklemler bütün bilim kollarında önemli roller oynarlar. Aşağıda başlangıç değer problemi çözümüne bir örnek verilmiştir.

ÖRNEK 5 Eğim Fonksiyonundan ve Bir Noktasından Bir Eğriyi Bulmak

$(1, -1)$ noktasından geçmesi gereken ve (x, y) noktasındaki eğimi $3x^2$ olan eğrinin denklemini bulun.

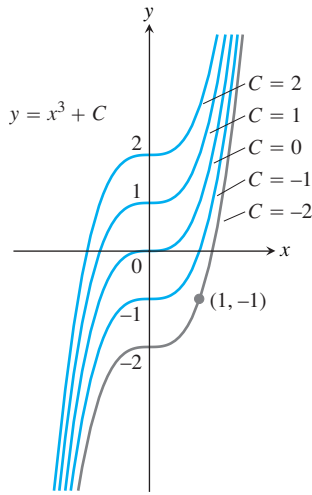
Çözüm Matematiksel lisanla, aşağıdakilerden oluşan başlangıç değer problemini çözmemiz istenmektedir:

$$\begin{aligned} \text{Diferansiyel denklem:} \quad & \frac{dy}{dx} = 3x^2 && \text{Eğrinin eğimi } 3x^2\text{'dir} \\ \text{Başlangıç koşulu:} \quad & y(1) = -1 \end{aligned}$$

1. *Diferansiyel denklemi çözün:* y fonksiyonu $f(x) = 3x^2$ 'nin bir ters türevidir, şu halde

$$y = x^3 + C$$

dir. Bu sonuç bize, y 'nin bir C değeri için $x^3 + C$ 'ye eşit olduğunu söyler. Bu değeri, $y(1) = -1$ başlangıç koşulundan buluruz.



ŞEKİL 4.54 $y = x^3 + C$ eğrileri koordinat düzlemini üst üste gelmeden doldururlar. Örnek 5'te, verilen $(1, -1)$ noktasından geçen eğriyi $y = x^3 - 2$ olarak tanımlarız.

2. C 'yi hesaplayın.

$$\begin{aligned} y &= x^3 + C \\ -1 &= (1)^3 + C & y(1) = -1 \text{ başlangıç koşulu} \\ C &= -2. \end{aligned}$$

Aradığımız eğri, $y = x^3 - 2$ dir (Şekil 4.54.)

$f(x)$ fonksiyonunun en genel ters türevi $F(x) + C$ (Örnek 5'te $x^3 + C$), $dy/dx = f(x)$ diferansiyel denkleminin $y = F(x) + C$ **genel çözümünü** verir. Genel çözüm, denklemin *bütün* çözümlerini (sonsuz tane vardır, her C içi bir tane) verir. Diferansiyel denklemin genel çözümünü bularak **çözeriz**. Sonra, $y(x_0) = y_0$ koşulunu sağlayan bir **özel çözüm** bularak başlangıç değer problemini çözeriz.

Ters Türev ve Hareket

Şunu öğrendik: bir cismin konumunun türevi, cismin hızını ve hızının türevi de cismin ivmesini verir. Bir cismin ivmesini bilerek, bir ters türev bulmakla cismin hızını ve hızının ters türevinden de cismin konum fonksiyonunu ortaya çıkarabiliriz. Bu işlem, Bölüm 4.2 Sonuç 2 de bir uygulama olarak kullanılmıştır. Şimdi, ters türevler cinsinden bir terminolojimiz ve kavramsal bir yapımız bulunduğuna göre, problemi, diferansiyel denklemler açısından bir kere daha ele alalım.

ÖRNEK 6 Yükselen Bir Balondan Bir Paket Bırakmak

Bir balon, 80 ft yükseklikten bir paket bıraktığında 12 ft/sn hızla yükselmektedir. Paketin yere ulaşması ne kadar sürer.

Çözüm $v(t)$ paketin t anındaki hızını ve $s(t)$ de yerden yüksekliğini gösterebiliriz. Dünyanın yüzeyi civarında yerçekimi ivmesi 32 ft/sn²'dir. Bırakılan pakete başka kuvvetlerin etki etmediğini kabul ederek

$$\frac{dv}{dt} = -32 \quad \text{yerçekimi ivmesi alçalma yönünde etki ettiğinden negatiftir.}$$

buluruz. Bu bizi, paketin hareketi için matematik modelimiz olan, aşağıdaki başlangıç değer problemine götürür:

$$\text{Diferansiyel denklem: } \frac{dv}{dt} = -32$$

$$\text{Başlangıç koşulu: } v(0) = 12$$

Paketin hızını elde etmek için, başlangıç değer problemini çözeriz.

1. *Diferansiyel denklemi çözün:* -32 'nin ters türevi için genel bir formül

$$v = -32t + C$$

dir. Diferansiyel denklemin genel çözümünü bulduğumuza göre, problemimizin çözümü olan özel bir çözüm bulmak için başlangıç koşulunu kullanırız.

2. C 'yi hesaplayın:

$$\begin{aligned} 12 &= -32(0) + C & v(0) = 12 \text{ başlangıç koşulu} \\ C &= 12. \end{aligned}$$

Başlangıç değer probleminin çözümü

$$v = -32t + 12$$

dir. Hız, yüksekliğin türevi olduğundan ve paketin bırakıldığı $t = 0$ anında paketin yüksekliği 80 ft olduğundan, ikinci bir başlangıç değer problemi elde ederiz:

$$\text{Diferansiyel denklem: } \frac{ds}{dt} = -32t + 12 \quad \text{Son denklemde } v = ds/dt \text{ yazın}$$

$$\text{Başlangıç koşulu: } s(0) = 80$$

Yüksekliği, zamanın bir fonksiyonu olarak bulmak için bu başlangıç değer problemini çözeriz.

1. *Diferansiyel denklemi çözün:* $-32t + 12$ 'nin genel ters türevi aşağıdaki gibidir.

$$s = -16t^2 + 12t + C$$

2. *C'yi hesaplayın:*

$$80 = -16(0)^2 + 12(0) + C \quad s(0) = 80 \text{ başlangıç koşulu}$$

$$C = 80$$

Paketin, t anında yerden yüksekliği

$$s = -16t^2 + 12t + 80$$

dir.

Çözümü kullanın : Paketin ne kadar zamanda yere ulaşacağını bulmak için s yerine sıfır yazarsak ve t 'yi çözeriz:

$$-16t^2 + 12t + 80 = 0$$

$$-4t^2 + 3t + 20 = 0$$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{329}}{-8} \quad \text{Kuatratik formül}$$

$$t \approx -1.89, \quad t \approx 2.64.$$

Paket, balondan bırakıldıktan yaklaşık 2.64 sn sonra yere çarpar (Negatif kökün fiziksel anlamı yoktur). ■

Belirsiz İntegraller

Bir f fonksiyonun bütün ters türevlerini göstermek için özel bir sembol kullanılır.

TANIM Belirsiz İntegraller, İntegrant

f 'nin bütün ters türevlerinin kümesine, f 'nin x 'e göre **belirsiz integrali** denir ve

$$\int f(x) dx$$

ile gösterilir. $\int$ sembolü bir **integral işareti**dir. f fonksiyonu integralin **integrandı**, x ise **integrasyon değişkeni**dir.

Bu notasyonu kullanarak, Örnek 1'in çözümünü aşağıdaki gibi tekrar ifade ederiz:

$$\begin{aligned}\int 2x \, dx &= x^2 + C \\ \int \cos x \, dx &= \sin x + C \\ \int (2x + \cos x) \, dx &= x^2 + \sin x + C\end{aligned}$$

Bu notasyon, Bölüm 5'te incelenecek olan, ters türevlerin başlıca uygulamasıyla ilgilidir. Ters türevler, sonsuz toplamların limitlerini hesaplamada anahtar rol oynar. Bölüm 5'in, Analizin Temel Teoremi, denen ana sonucunda tanımlanan beklenmedik ve harika bir şekilde faydalı bir rol.

ÖRNEK 7 Terim – Terime Yapılan Belirsiz İntegrasyon ve İntegrasyon Sabitini Yeniden Yazmak

Hesaplayınız:

$$\int (x^2 - 2x + 5) \, dx$$

Çözüm $x^2 - 2x + 5$ 'in bir ters türevinin $(x^3/3) - x^2 + 5x$ olduğunu hatırlarsak, integrali

$$\int (x^2 - 2x + 5) \, dx = \overbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}^{\text{Ters türev}} + \underbrace{C}_{\text{keyfi sabit}}$$

olarak hesaplayabiliriz. Ters türevi hatırlamazsak, Toplam, Fark ve Sabit Çarpan kuralları ile terim-terim ortaya çıkarabiliriz:

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x + 5) \, dx &= \int x^2 \, dx - \int 2x \, dx + \int 5 \, dx \\ &= \int x^2 \, dx - 2 \int x \, dx + 5 \int 1 \, dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + C_1 \right) - 2 \left(\frac{x^2}{2} + C_2 \right) + 5(x + C_3) \\ &= \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 - 2C_2 + 5x + 5C_3\end{aligned}$$

Bu formül olması gerektiğinden karmaşıktır. C_1 , $-2C_2$ ve $5C_3$ 'ü tek bir $C = C_1 - 2C_2 + 5C_3$ keyfi sabitinde birleştirirsek, formül

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

basit haline sadeleşir.

ve halâ bütün ters türevleri verir. Bu nedenle, terim terim integre etmeyi seçseniz bile doğrudan son hale gitmenizi tavsiye ederiz.

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x + 5) dx &= \int x^2 dx - \int 2x dx + \int 5 dx \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C\end{aligned}$$

yazın. Her bir kısım için bulabildiğiniz en basit ters türevi bulun ve integrasyonun sonunda bir keyfi sabit ekleyin.

ALİŞTIRMALAR 4.8

Ters Türevleri Bulmak

1–16 alıştırmalarında her bir fonksiyon için bir ters türev bulun. Yaptıklarınızı akıldan yapın. Yanıtlarınızı türev olarak kontrol edin.

- | | | |
|--------------------------------|---|---|
| 1. a. $2x$ | b. x^2 | c. $x^2 - 2x + 1$ |
| 2. a. $6x$ | b. x^7 | c. $x^7 - 6x + 8$ |
| 3. a. $-3x^{-4}$ | b. x^{-4} | c. $x^{-4} + 2x + 3$ |
| 4. a. $2x^{-3}$ | b. $\frac{x^{-3}}{2} + x^2$ | c. $-x^{-3} + x - 1$ |
| 5. a. $\frac{1}{x^2}$ | b. $\frac{5}{x^2}$ | c. $2 - \frac{5}{x^2}$ |
| 6. a. $-\frac{2}{x^3}$ | b. $\frac{1}{2x^3}$ | c. $x^3 - \frac{1}{x^3}$ |
| 7. a. $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ | b. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | c. $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ |
| 8. a. $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ | b. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$ | c. $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ |
| 9. a. $\frac{2}{3}x^{-1/3}$ | b. $\frac{1}{3}x^{-2/3}$ | c. $-\frac{1}{3}x^{-4/3}$ |
| 10. a. $\frac{1}{2}x^{-1/2}$ | b. $-\frac{1}{2}x^{-3/2}$ | c. $-\frac{3}{2}x^{-5/2}$ |
| 11. a. $-\pi \sin \pi x$ | b. $3 \sin x$ | c. $\sin \pi x - 3 \sin 3x$ |
| 12. a. $\pi \cos \pi x$ | b. $\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$ | c. $\cos \frac{\pi x}{2} + \pi \cos x$ |
| 13. a. $\sec^2 x$ | b. $\frac{2}{3} \sec^2 \frac{x}{3}$ | c. $-\sec^2 \frac{3x}{2}$ |
| 14. a. $\csc^2 x$ | b. $-\frac{3}{2} \csc^2 \frac{3x}{2}$ | c. $1 - 8 \csc^2 2x$ |
| 15. a. $\csc x \cot x$ | b. $-\csc 5x \cot 5x$ | c. $-\pi \csc \frac{\pi x}{2} \cot \frac{\pi x}{2}$ |
| 16. a. $\sec x \tan x$ | b. $4 \sec 3x \tan 3x$ | c. $\sec \frac{\pi x}{2} \tan \frac{\pi x}{2}$ |

Belirsiz İntegralleri Bulmak

17–54 alıştırmalarındaki en genel ters türevleri veya belirsiz integraleri bulun. Yanıtlarınızı türev olarak kontrol edin.

- | | |
|--|--|
| 17. $\int (x + 1) dx$ | 18. $\int (5 - 6x) dx$ |
| 19. $\int \left(3t^2 + \frac{t}{2}\right) dt$ | 20. $\int \left(\frac{t^2}{2} + 4t^3\right) dt$ |
| 21. $\int (2x^3 - 5x + 7) dx$ | 22. $\int (1 - x^2 - 3x^5) dx$ |
| 23. $\int \left(\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}\right) dx$ | 24. $\int \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{x^3} + 2x\right) dx$ |
| 25. $\int x^{-1/3} dx$ | 26. $\int x^{-5/4} dx$ |
| 27. $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$ | 28. $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$ |
| 29. $\int \left(8y - \frac{2}{y^{1/4}}\right) dy$ | 30. $\int \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{y^{5/4}}\right) dy$ |
| 31. $\int 2x(1 - x^{-3}) dx$ | 32. $\int x^{-3}(x + 1) dx$ |
| 33. $\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} dt$ | 34. $\int \frac{4 + \sqrt{t}}{t^3} dt$ |
| 35. $\int (-2 \cos t) dt$ | 36. $\int (-5 \sin t) dt$ |
| 37. $\int 7 \sin \frac{\theta}{3} d\theta$ | 38. $\int 3 \cos 5\theta d\theta$ |
| 39. $\int (-3 \csc^2 x) dx$ | 40. $\int \left(-\frac{\sec^2 x}{3}\right) dx$ |
| 41. $\int \frac{\csc \theta \cot \theta}{2} d\theta$ | 42. $\int \frac{2}{5} \sec \theta \tan \theta d\theta$ |

43. $\int (4 \sec x \tan x - 2 \sec^2 x) dx$ 44. $\int \frac{1}{2} (\csc^2 x - \csc x \cot x) dx$
45. $\int (\sin 2x - \csc^2 x) dx$ 46. $\int (2 \cos 2x - 3 \sin 3x) dx$
47. $\int \frac{1 + \cos 4t}{2} dt$ 48. $\int \frac{1 - \cos 6t}{2} dt$
49. $\int (1 + \tan^2 \theta) d\theta$ 50. $\int (2 + \tan^2 \theta) d\theta$
(İpucu: $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$)
51. $\int \cot^2 x dx$ 52. $\int (1 - \cot^2 x) dx$
(İpucu: $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$)
53. $\int \cos \theta (\tan \theta + \sec \theta) d\theta$ 54. $\int \frac{\csc \theta}{\csc \theta - \sin \theta} d\theta$

Ters Türev Formüllerini Kontrol Etmek

55–60 alıştırma sorularındaki formülleri türev olarak doğrulayın.

55. $\int (7x - 2)^3 dx = \frac{(7x - 2)^4}{28} + C$
56. $\int (3x + 5)^{-2} dx = -\frac{(3x + 5)^{-1}}{3} + C$
57. $\int \sec^2(5x - 1) dx = \frac{1}{5} \tan(5x - 1) + C$
58. $\int \csc^2\left(\frac{x-1}{3}\right) dx = -3 \cot\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$
59. $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} + C$
60. $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{x}{x+1} + C$

61. Her formülün doğru mu yanlış mı olduğunu söyleyin ve yanıtınızı kısaca açıklayın.

- a. $\int x \sin x dx = \frac{x^2}{2} \sin x + C$
- b. $\int x \sin x dx = -x \cos x + C$
- c. $\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$

62. Her formülün doğru mu yanlış mı olduğunu söyleyin ve yanıtınızı kısaca açıklayın.

- a. $\int \tan \theta \sec^2 \theta d\theta = \frac{\sec^3 \theta}{3} + C$
- b. $\int \tan \theta \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \tan^2 \theta + C$
- c. $\int \tan \theta \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \sec^2 \theta + C$

63. Her formülün doğru mu yanlış mı olduğunu söyleyin ve yanıtınızı kısaca açıklayın.

- a. $\int (2x + 1)^2 dx = \frac{(2x + 1)^3}{3} + C$
- b. $\int 3(2x + 1)^2 dx = (2x + 1)^3 + C$
- c. $\int 6(2x + 1)^2 dx = (2x + 1)^3 + C$

64. Her formülün doğru mu yanlış mı olduğunu söyleyin ve yanıtınızı kısaca açıklayın.

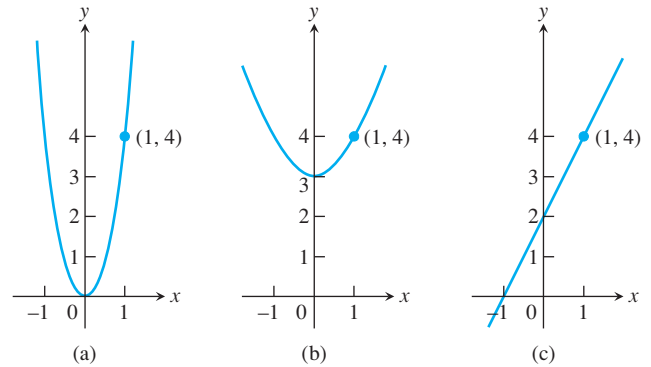
- a. $\int \sqrt{2x + 1} dx = \sqrt{x^2 + x} + C$
- b. $\int \sqrt{2x + 1} dx = \sqrt{x^2 + x} + C$
- c. $\int \sqrt{2x + 1} dx = \frac{1}{3} (\sqrt{2x + 1})^3 + C$

Başlangıç Değer Problemleri

65. Aşağıdaki grafiklerden hangisi

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad x = 1 \text{ iken } y = 4$$

başlangıç değer probleminin çözümünü gösterir?

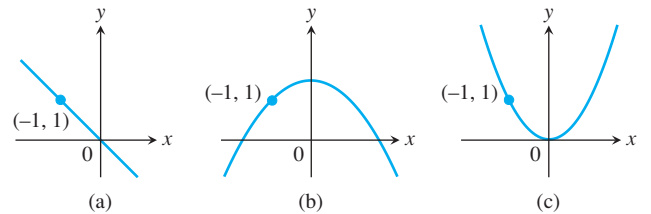


Yanıtınızı açıklayın.

66. Aşağıdaki grafiklerden hangisi

$$\frac{dy}{dx} = -x, \quad x = -1 \text{ iken } y = 1$$

başlangıç değer probleminin çözümünü gösterir?



Yanıtınızı açıklayın.

67–86 alıştırmalarındaki başlangıç değer problemlerini çözün.

67. $\frac{dy}{dx} = 2x - 7$, $y(2) = 0$

68. $\frac{dy}{dx} = 10 - x$, $y(0) = -1$

69. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + x$, $x > 0$; $y(2) = 1$

70. $\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 5$, $y(-1) = 0$

71. $\frac{dy}{dx} = 3x^{-2/3}$, $y(-1) = -5$

72. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y(4) = 0$

73. $\frac{ds}{dt} = 1 + \cos t$, $s(0) = 4$

74. $\frac{ds}{dt} = \cos t + \sin t$, $s(\pi) = 1$

75. $\frac{dr}{d\theta} = -\pi \sin \pi\theta$, $r(0) = 0$

76. $\frac{dr}{d\theta} = \cos \pi\theta$, $r(0) = 1$

77. $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \sec t \tan t$, $v(0) = 1$

78. $\frac{dv}{dt} = 8t + \csc^2 t$, $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = -7$

79. $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 6x$; $y'(0) = 4$, $y(0) = 1$

80. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; $y'(0) = 2$, $y(0) = 0$

81. $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{2}{t^3}$; $\frac{dr}{dt}\bigg|_{t=1} = 1$, $r(1) = 1$

82. $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{3t}{8}$; $\frac{ds}{dt}\bigg|_{t=4} = 3$, $s(4) = 4$

83. $\frac{d^3y}{dx^3} = 6$; $y''(0) = -8$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 5$

84. $\frac{d^3\theta}{dt^3} = 0$; $\theta''(0) = -2$, $\theta'(0) = -\frac{1}{2}$, $\theta(0) = \sqrt{2}$

85. $y^{(4)} = -\sin t + \cos t$;
 $y'''(0) = 7$, $y''(0) = y'(0) = -1$, $y(0) = 0$

86. $y^{(4)} = -\cos x + 8 \sin 2x$;
 $y'''(0) = 0$, $y''(0) = y'(0) = 1$, $y(0) = 3$

Eğriler Bulmak

87. xy -düzleminde, $(9, 4)$ noktasından geçen ve her noktadaki eğimi $3\sqrt{x}$ olan $y = f(x)$ eğrisini bulun.

88. a. Aşağıdaki özelliklere sahip bir $y = f(x)$ eğrisi bulun.

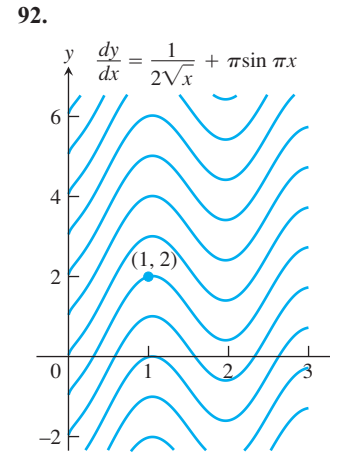
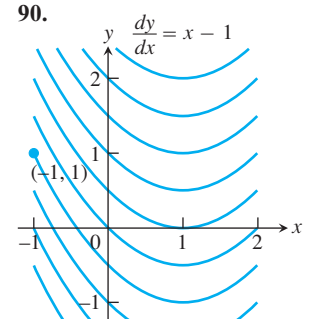
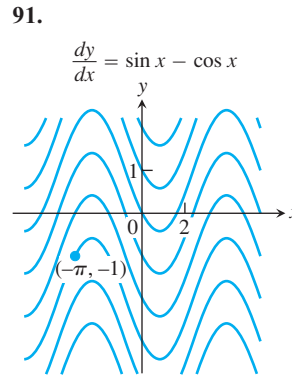
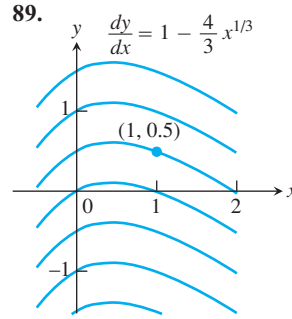
i) $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

ii) Grafiği $(0, 1)$ noktasından geçer ve o noktada yatay bir teğeti vardır.

b. Böyle kaç tane eğri vardır? Nereden biliyorsunuz?

Çözüm (İntegral) Eğrileri

89–92 alıştırmalarında diferansiyel denklemlerin çözüm eğrileri verilmektedir. Her durumda, belirtilen noktadan geçen eğrinin denklemini bulun.



Uygulamalar

93. Hızın bir ters türevinden yer değiştirmeyi bulmak.

a. s -ekseninde hareket eden bir cismin hızının

$$\frac{ds}{dt} = v = 9.8t - 3.$$

olduğunu varsayın.

- $t = 0$ iken $s = 5$ alarak, $t = 1$ 'den $t = 3$ 'e kadar olan zaman aralığında cismin yer değiştirmesini bulun.
- $t = 0$ iken $s = -2$ alarak, $t = 1$ 'den $t = 3$ 'e kadar cismin yer değiştirmesini bulun.
- $t = 0$ iken $s = s_0$ alarak, $t = 1$ 'den $t = 3$ 'e kadar cismin yer değiştirmesini bulun.

- b. Bir koordinat doğrusunda ilerleyen bir cismin konumu s 'nin, t 'nin türevlenebilir bir fonksiyonu olduğunu varsayın. ds/dt hız fonksiyonunun bir ters türevini biliyorsanız, cismin $t = a$ 'dan $t = b$ 'ye kadar yer değiştirmesini, bu anlardaki kesin konumlarını bilmiyorsanız bile, bulabileceğiniz doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.

94. Dünyadan ayrılmak Bir roket Dünya yüzeyinden 20 m/sn²'lik sabit bir ivmeyle ayrılır. 1 dakika sonra roketin hızı nedir?

95. Bir arabayı zamanında durdurmak Karşınızda bir kaza görüp frenlere bastığınızda, otoyolda 60 mil/sa (88 ft/sn) sabit hızıyla gidiyorsunuz. Arabanızı 242 ft sonra durdurmak için ne kadarlık bir sabit ivme gerekmektedir? Bunu bulmak için, aşağıdaki adımları izleyin.

1. Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözün:

$$\text{Diferansiyel denklem: } \frac{d^2s}{dt^2} = -k \quad (k \text{ bir sabit})$$

$$\text{Başlangıç koşulları: } t = 0 \text{ iken } \frac{ds}{dt} = 88 \text{ ve } s = 0$$

Zaman ve uzaklığı frene
basılmasından itibaren ölçerek

2. $ds/dt = 0$ yapan t değerini bulun (Yanıt k 'yı içerecektir).

3. Adım 2'de bulduğunuz t değerinde $s = 242$ olmasını sağlayan k değerini bulun.

96. Bir motosikleti durdurmak Illinois Eyaleti Bisiklet Sürücü Güvenliği Programı sürücülerin fren yaptıklarında 45 ft mesafede hızlarını 30 mil/saatten (44 ft/sn) 0 mil/saate düşürmelerini gerektirmektedir. Hangi sabit ivme bunu sağlar?

97. Bir koordinat doğrusunda hareket Bir parçacık bir koordinat doğrusunda $a = d^2s/dt^2 = 15\sqrt{t} - (3/\sqrt{t})$ ivmesiyle, $t = 1$ iken $ds/dt = 4$ ve $s = 0$ koşullarını sağlayacak şekilde hareket etmektedir.

a. $v = ds/dt$ hızını t cinsinden bulun.

b. s konumunu t cinsinden bulun.

T 98. Çekiç ve tüy. Apollo 15'in astronotu David Scott vakumda bütün cisimlerin aynı (sabit) ivmeyle düştüklerini göstermek için ayda yerden 4 ft yükseklikten bir çekiç ve bir tüy bırakmıştır. Olayın televizyon çekimi, çekiç ve tüyün dünya üzerinde, vakumda, 4 ft'i sadece yarım saniyede düşeceklerken, daha yavaş düşüklerini göstermektedir. Çekiç ve tüyün ayda 4 ft düşmeleri ne kadar sürmüştür? Bunu bulmak için, s 'yi t 'nin bir fonksiyonu olarak alıp, aşağıdaki başlangıç değer problemini çözün. Sonra s 'yi 0 yapan t değerini bulun.

$$\text{Diferansiyel denklem: } \frac{d^2s}{dt^2} = -5.2 \text{ ft/sn}^2$$

$$\text{Başlangıç koşulları: } t = 0 \text{ iken } \frac{ds}{dt} = 0 \text{ ve } s = 4$$

99. Sabit ivmeli hareket Bir koordinat doğrusu boyunca sabit bir a ivmesiyle hareket eden bir cismin s konumunun standart denklemi

$$s = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + s_0 \quad (1)$$

ile verilir. Burada v_0 ve s_0 cismin $t = 0$ anındaki hız ve konumudur. Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözerek, bu denklemi türetin.

$$\text{Diferansiyel denklem: } \frac{d^2s}{dt^2} = a$$

$$\text{Başlangıç koşulları: } t = 0 \text{ iken } \frac{ds}{dt} = v_0 \text{ ve } s = s_0 \quad (2)$$

100. Bir gezegenin yüzeyi yakınında serbest düşme Yer çekimi ivmesinin g uzunluk birimi/sn² olduğu bir gezegeninin yüzeyinin yakınındaki serbest düşme için Alistırma 99'daki (1) denklemi, s cismin yüzeyden yüksekliği olmak üzere,

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0 \quad (2)$$

halini alır. Denklemde eksi işareti vardır, çünkü yerçekimi ivmesi azalan s yönünde aşağı doğru etki eder. $t = 0$ anında cisim yükseliyorsa, v_0 pozitif, cisim düşüyorsa negatiftir.

Alistırma 99'un sonucunu kullanmak yerine, (2) denklemini uygun başlangıç değer problemini çözerek türetebilirsiniz. Bu hangi başlangıç değer problemidir? Doğru olduğundan emin olmak için, adımlarınızı açıklayarak denklemi çözün.

Teori ve Örnekler

101.

$$f(x) = \frac{d}{dx}(1 - \sqrt{x}) \quad \text{ve} \quad g(x) = \frac{d}{dx}(x + 2) \text{ olduğunu}$$

varsayın. Aşağıdakileri bulun

$$\text{a. } \int f(x) dx$$

$$\text{b. } \int g(x) dx$$

$$\text{c. } \int [-f(x)] dx$$

$$\text{d. } \int [-g(x)] dx$$

$$\text{e. } \int [f(x) + g(x)] dx$$

$$\text{f. } \int [f(x) - g(x)] dx$$

102. Çözümlerin teklifi Türevlenebilir $y = F(x)$ ve $y = G(x)$ fonksiyonlarının ikisi de bir I aralığında

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(x_0) = y_0$$

başlangıç değer problemini sağlıyorsa, I 'daki her x değerinde $F(x) = G(x)$ olmalı mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

103–106 alıştırılmalarındaki başlangıç değer problemlerini çözmek için bir BCS kullanın. Çözüm eğrilerini çizin.

103. $y' = \cos^2 x + \sin x$, $y(\pi) = 1$

104. $y' = \frac{1}{x} + x$, $y(1) = -1$

105. $y' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, $y(0) = 2$

106. $y'' = \frac{2}{x} + \sqrt{x}$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$

Bölüm 4**Tekrar Soruları**

1. Kapalı bir aralıkta sürekli olan bir fonksiyonun değerleri hakkında ne söylenebilir?
2. Bir fonksiyonun tanım kümesinde bir yerel ekstremum değeri ve bir mutlak ekstremum değeri olması ne demektir? Yerel ve mutlak ekstremum değerler arasındaki ilişki nedir? Örnek verin.
3. Sürekli bir fonksiyonun kapalı bir aralıktaki mutlak ekstremumlarını nasıl bulursunuz? Örnek verin.
4. Rolle Teoreminin hipotezleri ve sonuçları nedir? Bu hipotezler gerçekten gerekli midir? Örnek verin.
5. Ortalama Değer Teoreminin hipotezleri ve sonuçları nedir? Teoremin fiziksel yorumu ne olabilir?
6. Ortalama Değer Teoreminin üç sonucunu söyleyin.
7. f' 'nü ve f 'nin bir $x = x_0$ noktasındaki değerini bilerek bazen bir fonksiyonu nasıl tanımlarsınız? Örnek verin.
8. Yerel ekstremum değerler için Birinci Türev Testi nedir? Nasıl uygulandığına ilişkin örnekler verin.
9. İki kere türevlenebilir bir fonksiyonun grafiğinin nerede yukarıya konkav, nerede aşağıya konkav olduğunu belirlemek için nasıl test edersiniz? Örnekler verin.
10. Bir büküm noktası nedir? Bir örnek verin. Büküm noktalarının bazen ne gibi fiziksel önem vardır?
11. Yerel Ekstrem Değerler için İkinci Türev Testi nedir? Nasıl uygulandığına ilişkin örnek verin.
12. Bir fonksiyonun türevleri size grafiğinin şekli hakkında ne söyler?

13. Bir polinomun grafiğini çizmek için kullanacağınız adımları sıralayın. Bir örnekle gösterin.
14. Bir sivri uç nedir? Örnekler verin.
15. Bir rasyonel fonksiyonun grafiğini çizmek için kullanacağınız adımları sıralayın. Bir örnekle gösterin.
16. Maks-min problemlerini çözmek için genel bir strateji tanımlayın. Örnekler verin.
17. L'Hôpital Kuralını açıklayın. Kuralı ne zaman kullanıp ne zaman duracağınızı nereden biliyorsunuz? Bir örnek verin.
18. ∞/∞ , $\infty \cdot 0$ ve $\infty - \infty$ belirsiz şekillerine yol açan limitleri bazen nasıl ele alabilirsiniz? Örnekler verin.
19. Denklem çözümü için Newton yöntemini tanımlayın. Bir örnek verin. Yöntemin ardındaki teori nedir? Yöntemi kullanırken dikkat etmeniz gereken şeyler nedir?
20. Bir fonksiyonun birden fazla ters türevi olabilir mi? Varsa, ters türevler nasıl ilişkilidir? Açıklayın.
21. Bir belirsiz integral nedir? Nasıl hesaplarsınız? Belirsiz integraleri bulmak için ne gibi genel formüller biliyorsunuz.
22. $dy/dx = f(x)$ şeklindeki bir diferansiyel denklemi bazen nasıl çözebilirsiniz?
23. Bir başlangıç değer problemi nedir? Nasıl çözersiniz? Bir örnek verin.
24. Bir koordinat doğrusu boyunca hareket eden bir cismin ivmesini, zamanın bir fonksiyonu olarak biliyorsanız, cismin konum fonksiyonunu bulmak için daha ne bilmeniz gerekir? Bir örnek verin.

Bölüm 4**Problemler****Ekstremum Değerlerin Varlığı**

1. $f(x) = x^3 + 2x + \tan x$ fonksiyonunun yerel maksimum veya minimum değerleri var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.
2. $g(x) = \csc x + 2 \cot x$ fonksiyonunun yerel maksimum değerleri var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

3. $f(x) = (7 + x)(11 - 3x)^{1/3}$ fonksiyonunun mutlak bir minimum veya maksimumu var mıdır? Varsa, bunları bulun ya da neden bulunmadıklarını açıklayın. f' 'nin bütün kritik noktalarını listeleyin.

4. $f(x) = \frac{ax + b}{x^2 - 1}$ fonksiyonunun $x = 3$ 'te değeri 1 olan bir yerel ekstremum değerinin bulunmasını sağlayacak a ve b değerlerini bulun. Bu ekstremum değer bir minimum mu yoksa bir maksimum mudur? Yanıtınızı açıklayın.
5. Her x değerinde tanımlı $f(x) = \lfloor x \rfloor$ en büyük tamsayı fonksiyonunun $[0, 1)$ aralığının her noktasında 0 değerinde bir yerel maksimum değeri vardır. Bu yerel maksimumlardan bazıları aynı zamanda f 'nin yerel minimumları da olabilir mi? Yanıtınızı açıklayın.
6. a. Bir f fonksiyonunun bir $x = c$ noktasında bir yerel minimum veya maksimumu bulunmamasına rağmen birinci türevinin sıfır olmasına bir örnek verin.
b. Bu, Bölüm 3.1'deki Teorem 2 ile nasıl uyuyor? Yanıtınızı açıklayın.
7. $y = 1/x$ fonksiyonu $0 < x < 1$ aralığında sürekli olmasına rağmen, bu aralıkta bir maksimum veya minimum değer almaz. Bu sürekli fonksiyonlar için Ekstremler Değer Teoremiyle çelişir mi? Neden?
8. $y = |x|$ fonksiyonunun $-1 \leq x < 1$ aralığındaki maksimum ve minimum değerleri nedir? Aralığın kapalı olmadığına dikkat edin. Bu sürekli fonksiyonlar için Ekstremler Değer Teoremiyle uyumlu mudur? Neden?

- T** 9. Bir fonksiyonun global davranışını gösterecek kadar büyük bir grafik önemli yerel davranışları göstermeyebilir. $f(x) = (x^8/8) - (x^6/2) - x^5 + 5x^3$ fonksiyonunun grafiği buna bir örnektir.
- a. $-2.5 \leq x \leq 2.5$ aralığında f 'nin grafiğini çizin. Grafiğin nerelerde yerel ekstrem değerleri veya büküm noktaları var gibi görünmektedir?
- b. $f'(x)$ 'i çarpanlarına ayırın ve f 'nin $x = \sqrt[3]{5} \approx 1.70998$ de yerel bir maksimumu ve $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73205$ 'te yerel minimumları olduğunu gösterin.
- c. Grafiği büyütün ve $x = \sqrt[3]{5}$ ve $x = \sqrt{3}$ 'te ekstremum değerlerin varlığını gösteren bir çerçeve bulun.

Buradaki ana fikir analiz olmadan üç ekstrem değerden ikisinin varlığının büyük ihtimalle fark edilmeyeceğidir. Fonksiyonun herhangi bir normal grafiğinde, değerler ekrandaki tek bir noktaya karşılık gelecek kadar yakın olabilirler.

(Kaynak: *Uses of Technology in the Mathematics Curriculum*, Benny Evans ve Jerry Johnson, Oklahoma State University, National Science Foundation grant USE - 8950044 altında 1990'da basılmıştır.)

- T** 10. (Alıştırma 9'un devamı)
- a. $f(x) = (x^8/8) - (2/5)x^5 - 5x - (5/x^2) + 11$ fonksiyonunun grafiğini $-2 \leq x \leq 2$ aralığında çizin. Grafiğin nerelerde yerel ekstremum değerleri veya büküm noktaları var gibi görünmektedir?
- b. f' 'i çarpanlarına ayırın ve f 'nin $x = \sqrt[3]{5} \approx 1.2585$ 'de bir yerel maksimumu ve $x = \sqrt[3]{2} \approx 1.2599$ 'da bir yerel minimumu olduğunu gösterin.
- c. Grafiği büyütürük $x = \sqrt[3]{5}$ ve $x = \sqrt[3]{2}$ 'de ekstremum değerlerin varlığını gösteren bir çerçeve bulun.

Ortalama Değer Teoremi

11. a. $g(t) = \sin^2 t - 3t$ fonksiyonunun, tanım kümesi içindeki her aralıkta azaldığını gösterin.
b. $\sin^2 t - 3t = 5$ denkleminin kaç çözümü vardır? Yanıtınızı açıklayın.
12. a. $y = \tan \theta$ fonksiyonunun tanım kümesi içindeki her aralıkta arttığını gösterin.
b. (a) şıkkındaki yanıt gerçekten doğruysa, $\tan \pi = 0$ değerinin $\tan(\pi/4) = 1$ değerinden ufak olmasını nasıl açıklarsınız?
13. a. $x^4 + 2x^2 - 2 = 0$ denkleminin $[0, 1]$ aralığında kesin olarak tek bir çözümünün olduğunu gösterin.
T b. Çözümü hesaplayabildiğiniz ondalık basamağa kadar bulun.
14. a. $f(x) = x/(x + 1)$ fonksiyonunun, tanım kümesi içindeki her aralıkta arttığını gösterin.
b. $f(x) = x^3 + 2x$ fonksiyonunun bir minimum veya bir maksimum değerinin bulunmadığını gösterin.
15. **Bir depodaki su** Sağanak yağış yüzünden, bir depodaki su hacmi 24 saatte 1400 ar-ft artmıştır. Bu zaman aralığının bir anında depo hacminin 225.000 galon/dak'dan fazla artıyor olduğunu gösterin. (Bir ar-ft 43.560 ft³, yani bir ft derinliğinde bir ar alanı dolduracak hacimdir. Bir ft³ 7.48 galondur.)
16. $F(x) = 3x + C$ formülü her C değeri için farklı bir fonksiyon verir. Ancak, bütün bu fonksiyonların x 'e göre türevleri aynıdır. Türevleri 3 olan türevlenebilir fonksiyonlar yalnızca bunlar mıdır? Başkaları bulunabilir mi? Yanıtınızı açıklayın.
- 17.

$$\frac{x}{x+1} \neq -\frac{1}{x+1}$$

olduğu halde

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x+1} \right) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{x+1} \right)$$

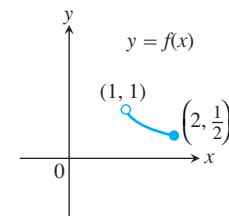
olduğunu gösterin. Bu Ortalama Değer Teoreminin ikinci sonucuyla çelişmez mi? Yanıtınızı açıklayın.

18. $f(x) = x^2/(x^2 + 1)$ ve $g(x) = -1/(x^2 + 1)$ fonksiyonlarının birinci türevlerini hesaplayın. Bu fonksiyonların grafikleri hakkında ne gibi sonuçlar çıkartabilirsiniz?

Grafiklerden Sonuç Çıkartmak

19–20 alıştırmalarında soruları cevaplamak için grafikleri kullanın

19. f 'nin bütün ekstremum değerlerini ve nerelerde bulunduklarını belirleyin.



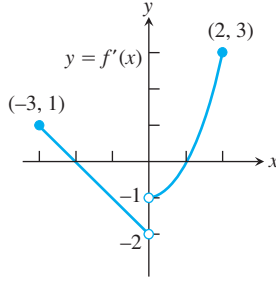
20. $y = f(x)$ fonksiyonunun

a. artan

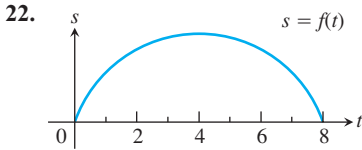
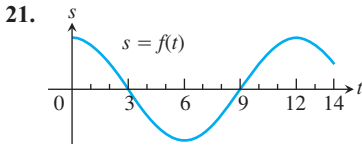
b. azalan

olduğu aralıkları belirleyin.

c. fonksiyonun yerel ekstremum değerlerinin nerelerde bulunduğunu ve her birinin bir yerel maksimum mu yoksa minimum mu olduğunu göstermek için f'' 'nün verilen grafiğini kullanın.



21 ve 22 problemlerindeki her grafik bir koordinat doğrusunda ilerleyen bir cismin $s = f(t)$ konum fonksiyonunu vermektedir (t zamanı belirtmektedir). Yaklaşık olarak hangi zamanlarda (varsa) her cismin (a) hızı sıfıra eşittir? (b) ivmesi sıfıra eşittir? Yaklaşık olarak hangi zaman aralıklarında cisim (c) ileri (d) geri doğru ilerler?



Grafikler ve Grafik Çizme

23–32 problemlerindeki eğrileri çizin.

23. $y = x^2 - (x^3/6)$ 24. $y = x^3 - 3x^2 + 3$

25. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$

26. $y = (1/8)(x^3 + 3x^2 - 9x - 27)$

27. $y = x^3(8 - x)$ 28. $y = x^2(2x^2 - 9)$

29. $y = x - 3x^{2/3}$ 30. $y = x^{1/3}(x - 4)$

31. $y = x\sqrt{3 - x}$ 32. $y = x\sqrt{4 - x^2}$

33–38 problemlerinin her biri bir $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevini vermektedir. (a) f' 'nin grafiğinin hangi noktalarda, varsa, bir minimumu, maksimumu veya büküm noktası bulunmaktadır? (b) Grafiğin genel şeklini çizin.

33. $y' = 16 - x^2$ 34. $y' = x^2 - x - 6$

35. $y' = 6x(x + 1)(x - 2)$ 36. $y' = x^2(6 - 4x)$

37. $y' = x^4 - 2x^2$

38. $y' = 4x^2 - x^4$

39–42 problemlerinde, her fonksiyonun grafiğini çizin. Fonksiyonun birinci türevini kullanarak gördüklerinizi açıklayın.

39. $y = x^{2/3} + (x - 1)^{1/3}$

40. $y = x^{2/3} + (x - 1)^{2/3}$

41. $y = x^{1/3} + (x - 1)^{1/3}$

42. $y = x^{2/3} - (x - 1)^{1/3}$

43–50 problemlerindeki fonksiyonların grafiklerini çizin.

43. $y = \frac{x + 1}{x - 3}$

44. $y = \frac{2x}{x + 5}$

45. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

46. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x}$

47. $y = \frac{x^3 + 2}{2x}$

48. $y = \frac{x^4 - 1}{x^2}$

49. $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3}$

50. $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

L'Hôpital Kuralını Uygulamak

51–62 alıştırmalarındaki limitleri l'Hôpital kuralıyla bulun.

51. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$

52. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - 1}{x^b - 1}$

53. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x}{x}$

54. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x + \sin x}$

55. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\tan(x^2)}$

56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$

57. $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \sec 7x \cos 3x$

58. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sec x$

59. $\lim_{x \rightarrow 0} (\csc x - \cot x)$

60. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} \right)$

61. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x})$

62. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right)$

Optimizasyon

63. Negatif olmayan iki sayının toplamı 36'dır.

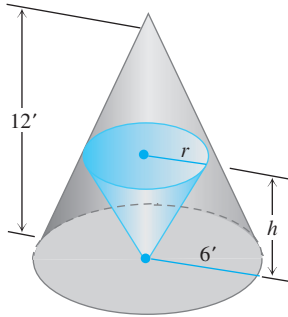
- a. kareköklerinin farkları en büyükse ve
 - b. kareköklerinin toplamı en büyükse
- bu sayıları bulun.

64. Negatif olmayan iki sayının toplamı 20'dir. Aşağıdaki durumlarda sayıları bulun.

- a. Bir sayı ile diğerinin karekökünün çarpımı olabildiğince büyükse.
- b. Bir sayı ile diğerinin karekökünün toplamı olabildiğince büyükse.

65. Bir ikizkenar üçgenin bir köşesi orijindedir ve tabanı, köşeleri $y = 27 - x^2$ eğrisinin üzerinde, eksenin üst tarafında olmak üzere x -eksenine paraleldir. Üçgenin alabileceği en büyük alanı bulun.

66. Bir müşteriniz sizden üstü açık dikdörtgen şeklinde paslanmaz çelik bir fiç tasarlamanızı istedi. Çeyrek inçlik tabakadan kesilecek, tabanı kare ve hacmi 32 ft^3 olacak ve gerektiğinden daha ağır olmayacaktır. Hangi boyutları tavsiye edersiniz?
67. Yarıçapı $\sqrt{3}$ olan bir kürenin içine sığdırılabilecek en büyük dik silindirin yarıçapını ve yüksekliğini bulun.
68. Aşağıdaki şekilde biri diğerinin içine ters olarak yerleştirilmiş iki koni gösterilmektedir. İki taban paraleldir ve küçük koninin tepesi büyük koninin tabanının merkezindedir. Hangi r ve h değerleri küçük koniye olası en büyük hacmi verecektir?



69. **Lastik üretimi** Firmanız günde x yüz tane A kalitesinde ve y yüz tane B kalitesinde lastik üretebilmektedir. Burada $0 \leq x \leq 4$ ve

$$y = \frac{40 - 10x}{5 - x}.$$

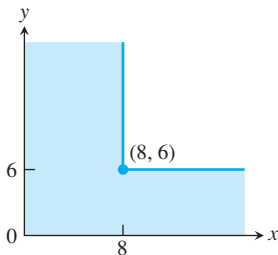
olarak verilmektedir. A kalitesindeki lastiklerdeki kârınız B kalitesindeki lastiklerin kârının iki katıdır. Her iki cins için üretilmesi gereken en kârlı sayı nedir?

70. **Parçacık hareketi** s -ekseni üzerindeki iki parçacığın konumları $s_1 = \cos t$ ve $s_2 = \cos(t + \pi/4)$ 'tür.

- a. Parçacıklar arasındaki uzaklık ne fazla ne olur?
- b. Parçacıklar ne zaman çarpışır?

- T 71. Üstü açık kutu** Kenarları 10 ve 16 inç olan bir kartonun köşelerinden eşit kenar uzunluklu kareler kesip, kenarları yukarıya katlayarak üstü açık bir dikdörtgen kutu yapmayı planlıyorsunuz. Bu şekilde yapabileceğiniz en büyük hacimli kutunun boyutları nedir?

72. **Merdiven problemi** Aşağıda gösterilen koridorun köşesinden yatay olarak döndürebileceğiniz en uzun merdivenin ortalama boyu (ft) nedir? Yanıtınızı virgülden sonra bir basamağa yuvarlayın.



Newton Yöntemi

73. $f(x) = 3x - x^3$ olsun. $f(x) = -4$ denkleminin $[2, 3]$ aralığında bir çözümünün bulunduğunu gösterin ve bunu bulmak için Newton yöntemini kullanın.
74. $f(x) = x^4 - x^3$ olsun. $f(x) = 75$ denkleminin $[3, 4]$ aralığında bir çözümünün bulunduğunu gösterin ve bunu bulmak için Newton yöntemini kullanın.

Belirsiz İntegralleri Hesaplama

75–90 Alıştırmalarındaki belirsiz integralleri (en genel ters türevleri) hesaplayın. Türev olarak cevaplarınızı kontrol edin.

75. $\int (x^3 + 5x - 7) dx$

76. $\int \left(8t^3 - \frac{t^2}{2} + t \right) dt$

77. $\int \left(3\sqrt{t} + \frac{4}{t^2} \right) dt$

78. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{3}{t^4} \right) dt$

79. $\int \frac{dr}{(r+5)^2}$

80. $\int \frac{6 dr}{(r - \sqrt{2})^3}$

81. $\int 3\theta\sqrt{\theta^2 + 1} d\theta$

82. $\int \frac{\theta}{\sqrt{7 + \theta^2}} d\theta$

83. $\int x^3(1 + x^4)^{-1/4} dx$

84. $\int (2 - x)^{3/5} dx$

85. $\int \sec^2 \frac{s}{10} ds$

86. $\int \csc^2 \pi s ds$

87. $\int \csc \sqrt{2\theta} \cot \sqrt{2\theta} d\theta$

88. $\int \sec \frac{\theta}{3} \tan \frac{\theta}{3} d\theta$

89. $\int \sin^2 \frac{x}{4} dx$

90. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$ (Yol gösterme: $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$)

Başlangıç Değer Problemleri

91–94 problemlerindeki başlangıç değer problemlerini çözün.

91. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$, $y(1) = -1$

92. $\frac{dy}{dx} = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2$, $y(1) = 1$

93. $\frac{d^2r}{dt^2} = 15\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}}$; $r'(1) = 8$, $r(1) = 0$

94. $\frac{d^3r}{dt^3} = -\cos t$; $r''(0) = r'(0) = 0$, $r(0) = -1$

Bölüm 4

Ek ve İleri Alıştırmalar

1. Bir aralıktaki minimum ve maksimum değerleri aynı olan bir fonksiyon için ne söyleyebilirsiniz? Yanıtınızı açıklayın.
2. Süreksiz bir fonksiyonun kapalı bir aralıkta ne bir mutlak minimumu ne de bir mutlak maksimumu bulunamayacağı doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.
3. Sürekli bir fonksiyonun bir açık aralıktaki ve bir yarı açık aralıktaki ekstremum değerleri hakkında bir sonuç çıkarabilir misiniz? Yanıtınızı açıklayın.
4. **Yerel ekstremumlar** f 'nin yerel maksimum ve minimum değerlerinin bulunduğu noktaları tanımlamak için

$$\frac{df}{dx} = 6(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$$

türevinin işaret tablosunu kullanın.

5. Yerel ekstremumlar

- a. $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevinin

$$y' = 6(x+1)(x-2)^2$$

olduğunu varsayın. Varsa, hangi noktalarda f 'nin grafiğinin bir maksimumu, minimumu veya büküm noktası bulunur?

- b. $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevinin

$$y' = 6x(x+1)(x-2)$$

olduğunu varsayın. Varsa, hangi noktalarda f 'nin grafiğinin bir maksimumu, minimumu veya büküm noktası bulunur?

6. Her x için $f'(x) \leq 2$ ise, f 'nin değerleri $[0, 6]$ aralığında en fazla ne kadar artabilir? Yanıtınızı açıklayın.
7. **Bir fonksiyonu sınırlamak** f 'nin $[a, b]$ aralığında sürekli ve c 'nin aralığın bir iç noktası olduğunu varsayın. $[a, c]$ 'de $f'(x) \leq 0$ ve $(c, b]$ 'de $f'(x) \geq 0$ ise, $f(x)$ 'in $[a, b]$ 'de $f(c)$ 'den daha küçük olamayacağını gösterin.
8. **Bir eşitsizlik**
 - a. Her x için $-1/2 \leq x/(1+x^2) \leq 1/2$ olduğunu gösterin.
 - b. f 'nin, türevi $f'(x) = x/(1+x^2)$ olan bir fonksiyon olduğunu varsayın. (a)'daki sonucu kullanarak her a ve b için

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |b - a|$$

olduğunu gösterin.

9. $f(x) = x^2$ fonksiyonunun türevi $x = 0$ 'da sıfırdır, fakat f sabit bir fonksiyon değildir. Bu, türevleri sıfır olan fonksiyonların sabit olduklarını söyleyen Ortalama Değer Teoremi sonucuyla çelişmez mi? Yanıtınızı açıklayın.
10. **Ekstremler ve büküm noktaları** $h = fg$ x 'in türevlenebilir iki fonksiyonunun çarpımı olsun.

- a. Yerel maksimumları $x = a$ 'da olmak üzere, f ve g pozitifse ve f' ve g' a 'da işaret değiştiriyorsa, h 'nin a 'da yerel bir maksimumu bulunur mu?
- b. f ve g grafiklerinin $x = a$ 'da büküm noktaları varsa, h 'nin grafiğinin a 'da bir büküm noktası var mıdır?

Her iki durumda da, yanıt evetse, ispatlayın. Yanıt hayırsa, bir örnek verin.

11. **Bir fonksiyon bulmak** $f(x) = (x+a)/(bx^2+cx+2)$ fonksiyonundaki a , b ve c değerlerini bulmak için aşağıdaki bilgileri kullanın.

i) a , b ve c 'nin değerleri ya 0 ya da 1'dir.

ii) f 'nin grafiği $(-1, 0)$ noktasından geçer.

iii) $y = 1$ doğrusu f 'nin grafiğinin bir asimptotudur.

12. **Yatay teğet** k sabitinin hangi değer veya değerlerinde $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ eğrisinin tek bir yatay teğeti bulunur?

13. **En büyük üçgen yerleştirmek** A ve B noktaları birim çemberin bir çapının uçlarında ve C noktası da çemberin üzerinde bulunur. ABC üçgeninin alanının, üçgen ikizkenarsa en büyük olacağı doğru mudur? Nereden biliyorsunuz?

14. **İkinci türev testini ispat etmek** Yerel maksimum ve minimumlar için İkinci Türev Testi (Bölüm 4.4) şunları söyler:

a. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) < 0$ ise, f 'nin $x = c$ 'de bir yerel maksimum değeri vardır.

b. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) > 0$ ise, f 'nin $x = c$ 'de bir yerel minimum değeri vardır.

ifadesini ispat etmek için, $\epsilon = (1/2)|f''(c)|$ alın. Daha sonra

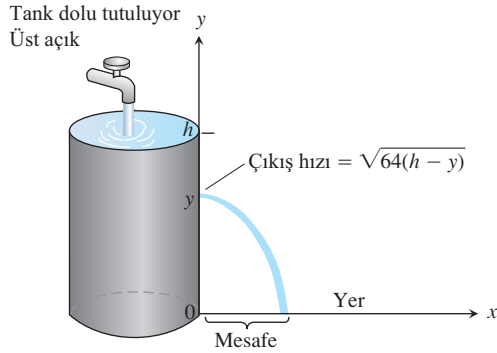
$$f''(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h)}{h}$$

olduğunu kullanarak, herhangi bir $\delta > 0$ için,

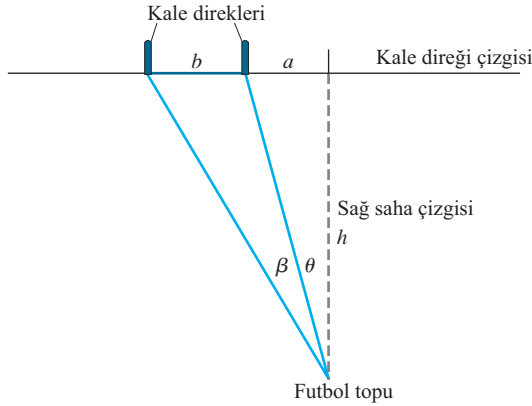
$$0 < |h| < \delta \implies \frac{f'(c+h)}{h} < f''(c) + \epsilon < 0$$

olduğu sonucunu çıkarın. Yani, $-\delta < h < 0$ için $f'(c+h)$ pozitif ve $0 < h < \delta$ için $f'(c+h)$ negatiftir. (b) ifadesini de benzer şekilde ispatlayın.

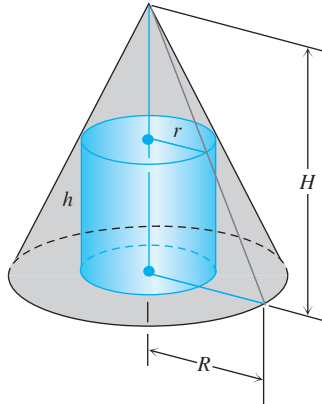
15. **Bir su deposundaki delik** Aşağıda gösterilen tanka akan suyun tanktan olası en uzak yere düşmesini sağlayacak bir yükseklikte bir delik delmek istiyorsunuz. Deliği basıncın düşük olduğu üst tarafa doğru delerseniz, su yavaş çıkacak, ancak buna nazaran daha fazla havada kalacaktır. Deliği alt tarafa yakın bir yerden delerseniz, su daha yüksek bir hızla fışkıracak, fakat yere düşmesi daha kısa sürecektir. Varsa, delik için en iyi yer neresidir? (İpucu: Çıkan bir su parçasının y yüksekliğinden yere düşmesi ne kadar sürecektir?)



- 16. Bir saha golü atmak** Bir Amerikan futbolu oyuncusu top sağ saha çizgisi üzerindeyken bir saha golü atmak istiyor. Kale direklerinin b ft aralıklı ve saha çizgisinin sağ kale direğinden $a > 0$ ft uzakta olduğunu varsayın (Aşağıdaki şekle bakın.) Kale direği çizgisinden vurucuya en büyük β açısını sağlayacak h uzaklığını bulun. Futbol sahasının düz olduğunu varsayın.



- 17. Değişken yanıtı bir maks-min problemi** Bazen bir maks-min probleminin çözümü, söz konusu şekillerin orantılarına bağlıdır. Buna örnek olarak, r yarıçaplı ve h yükseklikli bir dik silindirin aşağıda gösterildiği gibi R yarıçaplı ve H yükseklikli bir dik koninin içine yerleştirildiğini varsayın. Silindirin toplam yüzey alanını (alt ve üst taban dahil olmak üzere) maksimize eden r yarıçapını (R ve H cinsinden) bulun. Göreceğiniz gibi, çözüm $H \leq 2R$ veya $H > 2R$ olmasına bağlıdır.



- 18. Bir parametreyi minimize etmek** $mx - 1 + (1/x)$ 'i bütün pozitif x değerlerinde sıfıra eşit veya sıfırdan büyük yapacak en küçük pozitif m sabitini bulun.

- 19. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.**

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 5x}{3x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \cot 3x$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} x \csc^2 \sqrt{2x}$

d. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sec x - \tan x)$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x \sin x}$

g. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{x^2}$

h. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

- 20. Aşağıdaki limitlerde l'Hôpital kuralı yararsızdır. Limitleri başka yollardan bulun.**

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+5}}$

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x + 7\sqrt{x}}$

- 21. Hafta başına x birim üretmenin, bir firmaya maliyetinin $y = a + bx$ dolar olduğunu varsayın. Hafta başına x birimi, $P = c - ex$ dolar birim fiyatından satabilmektedir. a, b, c ve e den her biri pozitif bir sabiti göstermektedir. (a) Hangi üretim seviyesi kârı maksimize eder? (b) Karşı gelen fiyat nedir? (c) Bu üretim seviyesindeki haftalık kâr nedir? (d) Hükümet satılan her bir adet için t dolar vergi koyarsa kârı maksimize etmek için her birimin satış fiyatı ne olmalıdır? Bu satış fiyatı ile vergiden önceki satış fiyatı arasındaki farkı yorumlayın.**

- 22. Bölme yapmadan çarpmaya göre tersleri bulmak** Bir a sayısının çarpmaya göre tersinin değerini, $f(x) = (1/x) - a$ fonksiyonuna Newton yöntemini uygularsanız, bölmeye gerek kalmadan bulabilirsiniz. Örneğin, $a = 3$ ise, gereken fonksiyon $f(x) = (1/x) - 3$ 'tür.

- a. $y = (1/x) - 3$ 'ün grafiğini çizin. Grafik x eksenini nerede keser?

- b. Bu durumdaki rekürasyon bağıntısının

$$x_{n+1} = x_n(2 - 3x_n),$$

olduğunu gösterin. Bu durumda bölmeye gerek yoktur.

- 23. $x = \sqrt[q]{a}$ 'yı bulmak için $f(x) = x^q - a$ 'ya Newton yöntemini uygulayınız. Burada, a 'nın bir pozitif reel sayı olduğunu ve q 'nın bir pozitif tamsayı olduğunu varsayıyoruz. x_1 'in x_0 ve a/x_0^{q-1} 'in "ağırlıklı ortalaması" olduğunu gösterin ve**

$$x_1 = m_0 x_0 + m_1 \left(\frac{a}{x_0^{q-1}} \right), \quad m_0 > 0, m_1 > 0, \\ m_0 + m_1 = 1$$

olacak şekilde m_0, m_1 katsayılarını bulun. x_0 ve a/x_0^{q-1} eşit ise hangi sonuca ulaşırsınız? Bu durumda x_1 değeri ne olmalıdır?

- 24. $y = ax + b$ (a ve b keyfi sabitler) doğru ailesi $y'' = 0$ ile karakterize edilebilir. h ve r keyfi sabitler olmak üzere bütün**

$$(x - h)^2 + (y - h)^2 = r^2$$

çemberleri tarafından sağlanan benzer bir bağıntı bulun (İpucu: verilen denklem ve türev alarak elde edeceğiniz başka iki denklemden h ve r yi eleyin).

25. Bir otomobilin frenlerinin sabit bir k ft/sn²'lik ivme ürettiğini varsayın. (a) Frene basıldığında, otoyolda 60 mil/sa (88 ft/sn) sabit hızla giden bir otomobili 100 ft sonra durdurmak için k 'nın ne olması gerektiğini belirleyiniz? (b) Aynı k ile, 30 mil/sa hızla giden bir otomobil durmadan önce ne kadar yol alır?
26. $f(x)$ ve $g(x)$, $f'(x) = g(x)$ ve $f''(x) = -f(x)$ bağıntılarını sağlayan iki sürekli ve türevlenebilir fonksiyon ve $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$ olsun. $h(0) = 5$ ise $h(10)$ 'u bulunuz.
27. d^2y/dx^2 'nin her yerde sıfır olduğu ve $x = 0, y = 0$ iken $dy/dx = 1$ olan bir eğri var mıdır? Cevabınıza bir neden söyleyin.
28. xy -düzleminde $(1, -1)$ noktasından geçen ve x 'teki eğimi daima $3x^2 + 2$ olan eğrinin denklemini bulunuz.
29. Bir parçacık x -ekseninde hareket etmektedir. İvmesi $a = -t^2$ dir. $t = 0$ da parçacık orijindedir. Hareketi sırasında $b > 0$ olmak üzere $x = b$ noktasına ulaşmakta fakat b 'den öteye gitmemektedir. $t = 0$ anındaki hızını belirleyin.
30. Bir parçacık $a = \sqrt{t} - (1/\sqrt{t})$ ivmesi ile hareket etmektedir. $t = 0$ iken hızının $v = 4/3$ ve konumunun $s = -4/15$ olduğunu varsayarak aşağıdakileri bulunuz.
- a. v hızını t 'ye bağlı olarak.
- b. s konumunu t 'ye bağlı olarak.

31. $a > 0$ ile $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ veriliyor. Minimumu göz önüne alarak, ancak ve yalnız $b^2 - ac \leq 0$ ise her x için $f(x) \geq 0$ olduğunu gösterin.

32. Schwarz eşitsizliği

- a. Alıştırma 31 de

$$f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \cdots + (a_nx + b_n)^2$$

olsun.

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$

$$\leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

Schwartz eşitsizliğini ispatlayın.

- b. Schwarz eşitsizliğindeki eşitliğin ancak ve ancak 1'den n 'ye kadar her i için a_ix 'i $-b_i$ 'ye eşit yapacak bir x değeri varsa sağlanacağını gösterin.

Bölüm 4

Teknoloji Uygulama Projeleri

Mathematica/Maple Module

Bir Doğru Boyunca Hareket : Konum $\rightarrow$ Hız $\rightarrow$ İvme

Konum, hız ve ivme arasındaki türev ilişkilerinin canlandırılmış görüntüleri ile bir grafiğin şeklini gözleyeceksiniz. Konu içindeki şekiller canlandırılabilir.

Mathematica/Maple Module

Newton Yöntemi : π yi Tahmin Edin. Kaç Ondalık Basamağa Kadar ?

Bir fonksiyon çizin, bir kök gözleyin, kök yakınında bir başlangıç noktası alın ve köke istenilen doğruluk derecesine kadar yaklaşmak için Newton Tekrarlama İşlemini kullanın. π , e , ve $\sqrt{2}$ sayılarına yaklaşımda bulunmaktadır.