

50. Aşağıdaki beş ifadenin neden aynı bilgiyi gerektirdiklerini açıklayın.
- $f(x) = x^3 - 3x - 1$ 'in köklerini bulun.
 - $y = x^3$ eğrisinin $y = 3x + 1$ doğrusunu kestiği noktaların x koordinatlarını bulun.
 - $x^3 - 3x = 1$ olan bütün x değerlerini bulun.
 - $y = x^3 - 3x$ eğrisinin $y = 1$ doğrusunu kestiği noktaların x koordinatlarını bulun.
 - $x^3 - 3x - 1 = 0$ denklemini çözün.
51. **Kaldırılabilir süreksizlik** $x = 2$ noktasında kaldırılabilir bir süreksizliği bulunan ve bunun dışında her yerde sürekli olan bir $f(x)$ fonksiyonu bulun. f 'nin $x = 2$ 'de süreksiz olduğunu nasıl anladığınızı ve süreksizliğin neden kaldırılabilirliğini açıklayın.
52. **Kaldırılmaz süreksizlik** $x = -1$ noktasında kaldırılmaz bir süreksizliği olan ve bunun dışında her yerde sürekli olan bir $f(x)$ fonksiyonu bulun. f 'nin $x = -1$ 'de süreksiz olduğunu nasıl anladığınızı ve süreksizliğin neden kaldırılmayacağını açıklayın.
53. **Her noktada süreksiz olan bir fonksiyon**
- Boş olmayan her reel sayı aralığının hem rasyonel hem de irrasyonel sayılar içerdiği bilgisini kullanarak,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise} \\ 0, & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$
fonksiyonunun her noktada süreksiz olduğunu gösterin.
 - f herhangi bir noktada sağdan veya soldan sürekli midir?
54. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $0 \leq x \leq 1$ aralığında sürekliyse, $f(x)/g(x)$ $[0, 1]$ 'in herhangi bir noktasında süreksiz olabilir mi? Yanıtınızın nedenini açıklayın.
55. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ çarpım fonksiyonu $x = 0$ 'da sürekliyse, $f(x)$ ve $g(x)$ de $x = 0$ 'da sürekli olmak zorunda mıdır? Yanıtınızın nedenini açıklayın.
56. **Sürekli fonksiyonların süreksiz bileşkesi** $x = 0$ 'da bileşkeleri $f \circ g$ süreksiz, fakat kendileri sürekli olan f ve g fonksiyonlarına bir örnek verin. Bu Teorem 10'la çelişir mi? Yanıtınızı açıklayın.
57. **Daima sıfırdan farklı sürekli fonksiyonlar** Bir aralıkta sıfır değeri almayan sürekli bir fonksiyonun bu aralık üzerinde işaret değiştirmeyeceği doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.

58. **Bir lastik bandı germek** Bir lastik bandı bir taraftan sağa, diğer taraftan sola doğru gererken, banttaki bir noktanın yeniden eski konumuna geleceği doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.
59. **Sabit nokta teoremi** Bir f fonksiyonunun $[0, 1]$ kapalı aralığında sürekli olduğunu ve $[0, 1]$ 'deki her x için $0 \leq f(x) \leq 1$ olduğunu varsayın. $[0, 1]$ aralığında, $f(c) = c$ olacak şekilde bir c sayısı bulunması gerektiğini gösterin (c 'ye f 'nin **sabit noktası** denir).
60. **Sürekli fonksiyonların işaret koruma özelliği** f fonksiyonu (a, b) aralığında tanımlanmış olsun ve f 'nin sürekli olduğu bir c değeri için $f(c) \neq 0$ olsun. c civarında f 'nin $f(c)$ ile aynı işaretli olduğu bir $(c - \delta, c + \delta)$ aralığı bulunduğunu gösterin. Bu sonucun ne kadar önemli olduğuna dikkat edin. f fonksiyonu (a, b) 'de tanımlı olduğu halde, c dışındaki bir noktada sürekli olması gerekmemektedir. Bu ve $f(c) \neq 0$ olması f 'yi bütün aralık içinde (pozitif veya negatif) sıfırdan farklı yapmaya yeterlidir.
61. Ancak ve yalnız

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(c + h) = f(c).$$

ise f 'nin c 'de sürekli olduğunu gösterin.

62. $f(x) = \sin x$ ve $g(x) = \cos x$ 'in her $x = c$ noktasında sürekli olduklarını ispatlamak için Alıştırma 61'i ve

$$\sin(h + c) = \sin h \cos c + \cos h \sin c,$$

$$\cos(h + c) = \cos h \cos c - \sin h \sin c$$

özdeşliklerini kullanın

T Denklemleri Grafik Yöntemlerle Çözme

63-70 alıştırmalarındaki denklemleri çözmek için grafik çizen hesap makinesi veya bir grafik programı kullanın.

63. $x^3 - 3x - 1 = 0$

64. $2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

65. $x(x - 1)^2 = 1$ (tek kök)

66. $x^x = 2$

67. $\sqrt{x} + \sqrt{1 + x} = 4$

68. $x^3 - 15x + 1 = 0$ (üç kök)

69. $\cos x = x$ (tek kök) Radyan mod kullanmaya dikkat edin.

70. $2 \sin x = x$ (üç kök) Radyan mod kullanmaya dikkat edin.

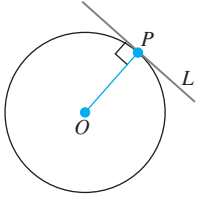
2.7

Teğetler ve Türevler

Bu bölümde, Bölüm 2.1'de başlanan giriş ve teğet tartışmasına devam edilmektedir. Eğrilerin teğetlerini bulmak için girişlerin eğimlerinin limitlerini hesaplıyoruz.

Bir Eğrinin Teğeti Nedir?

Çemberler için teğet kavramı açıktır. Bir L doğrusu çemberin bir P noktasından P 'deki yarıçapa dik olarak geçiyorsa, L çembere P 'de teğettir (Şekil 2.63). Böyle bir doğru çembere sadece dokunur. Fakat bir L doğrusunun başka bir C eğrisine bir P noktasında teğet

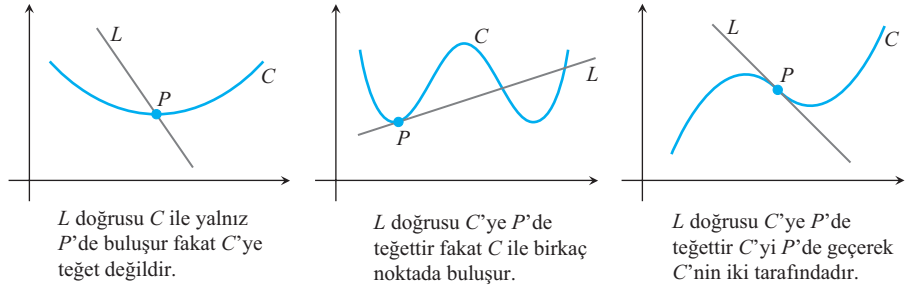


ŞEKİL 2.63 L doğrusu, P 'den OP yarıçapına dik olarak geçerse çembere teğettir.

çembere sadece *dokunur*. Fakat bir L doğrusunun başka bir C eğrisine bir P noktasında teğet olması ne demektir? Çemberin geometrisinden genelleştirerek, bunun aşağıdakilerden biri anlamına geldiğini söyleyebiliriz.

1. L doğrusu P 'den, P ile C 'nin merkezini birleştiren doğruya dik olarak geçer.
2. L doğrusu C 'nin tek bir noktasından, yani P 'den geçer.
3. L doğrusu P 'den geçer ve C 'nin sadece bir tarafında bulunur.

Bu ifadeler, C bir çemberse geçerliken, daha genel eğriler için hiçbiri tutarlı olarak çalışmaz. Çoğu eğrinin bir merkezi yoktur ve teğet olarak adlandırmak istediğimiz bir doğru C 'yi başka noktalarda kesebilir veya teğet noktasında C 'yi kesebilir (Şekil 2.64).



ŞEKİL 2.64 Teğet doğrular hakkında söylenenlerin doğrulanmaması

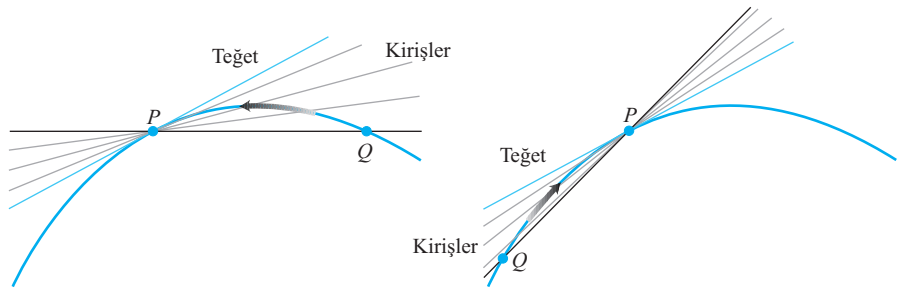
TARİHSEL BİYOGRAFI

Pierre de Fermat
(1601–1665)

Genel eğrilerde teğet kavramını tanımlamak için, P 'den ve eğri üzerinde giderek P 'ye yaklaşan Q noktalarından geçen kırışları da göz önüne alan dinamik bir yaklaşıma gerek vardır (Şekil 2.65). Bu yaklaşım şöyledir:

1. *Hesaplayabildiklerimizle*, yani PQ kırışının eğimiyle işe başlarız.
2. Q eğri üzerinde P 'ye yaklaşırken kırış eğiminin limitine bakarız.
3. Limit varsa, bunu eğrinin P noktasındaki eğimi olarak alır ve eğrinin P noktasındaki teğetini P 'den bu eğimle geçen doğru olarak tanımlarız.

Bu yaklaşım Bölüm 2.1'deki serbest düşen taş ve meyve sineği örneklerinde yapmış olduğumuz şeydir.



ŞEKİL 2.65 Teğet kavramına dinamik yaklaşım. Eğrinin P noktasındaki teğeti, eğimi $Q \rightarrow P$ ikenki kırış eğimlerinin limiti olan, P 'den geçen doğrudur.

ÖRNEK 1 Bir Parabole Teğet Doğru

$y = x^2$ parabolünün $P(2, 4)$ noktasındaki eğimini bulun. Parabolün bu noktadaki teğetinin denklemini yazın.

Çözüm $P(2, 4)$ ve yakınındaki $Q(2 + h, (2 + h)^2)$ noktalarından geçen bir kirişle işe başlarız. PQ kirişinin eğimi için bir ifade bulur ve Q eğri üzerinde P 'ye yaklaşırken ne olduğuna bakarız.

$$\begin{aligned} \text{Kiriş eğimi} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2 + h)^2 - 2^2}{h} = \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h} \\ &= \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4. \end{aligned}$$

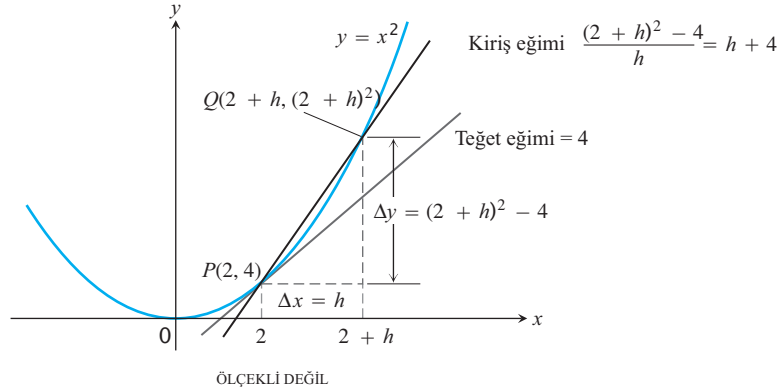
$h > 0$ ise, Q P 'nin üst sağ tarafında bulunur (Şekil 2.66). $h < 0$ ise, Q P 'nin sol tarafında bulunur (gösterilmemiştir). Her iki durumda da, Q eğri üzerinde P 'ye yaklaşırken, h sıfıra ve kiriş eğimi 4'e yaklaşır:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h + 4) = 4.$$

Parabolün P noktasındaki eğimini 4 olarak alırsak.

Parabolün P 'deki teğeti, P 'den 4 eğimiyle geçen doğrudur:

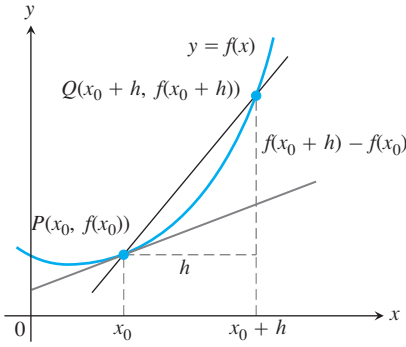
$$\begin{aligned} y &= 4 + 4(x - 2) && \text{Nokta-eğim denklemi} \\ y &= 4x - 4. \end{aligned}$$



ŞEKİL 2.66 $y = x^2$ parabolünün $P(2, 4)$ noktasındaki eğimini bulunması (Örnek 1).

Bir Fonksiyonun Grafiğinin Teğetini Bulma

Bir eğriye teğet bulma problemi, onyedinci yüzyıl başlarının başlıca matematik problemi idi. Optikte, bir ışık ışınının eğrisel bir merceğe girdiği açıyı teğet belirliyordu. Mekanikte, hareket eden bir cismin, yolu boyunca her noktadaki yönünü teğet belirliyordu. Geometride, iki eğrinin kesim noktasındaki teğetleri eğrilerin hangi açı ile kesiştiklerini belirliyordu. Herhangi bir $y = f(x)$ eğrisinin $P(x_0, f(x_0))$ noktasındaki teğetini bulmak için, aynı dinamik yöntemi kullanırız. P 'den ve bir $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ noktasından geçen kirişin eğimini hesaplarız ve $h \rightarrow 0$ iken eğimin limitini buluruz (Şekil 2.67). Limit varsa, buna eğrinin P 'deki eğimi deriz ve P 'deki teğeti P 'den bu eğimle geçen doğru olarak tanımlarız.



ŞEKİL 2.67 P deki teğet doğrunun eğimi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ 'dir.}$$

TANIMLAR Eğim, Teğet Doğru

$y = f(x)$ eğrisinin $P(x_0, f(x_0))$ noktasındaki eğimi

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{limitin olması koşuluyla})$$

sayısıdır. Eğrinin P 'deki **teğeti** ise, P 'den bu eğimle geçen doğrudur.

Her yeni tanım yaptığımızda, istediğimiz sonucu verip vermediğini görmek için bunu bildiğimiz şeyler üzerinde denemek yararlıdır. Örnek 2, eğimin bu yeni tanımının, dikey olmayan doğrulara uygulandığında Bölüm 1.2'deki eski tanımla uyduğunu göstermektedir.

ÖRNEK 2 Tanımı Test Etmek

$y = mx + b$ doğrusunun herhangi bir $(x_0, mx_0 + b)$ noktasındaki teğetinin kendisi olduğunu gösterin.

Çözüm $f(x) = mx + b$ yazar ve yapacaklarımızı üç adıma böleriz.

1. $f(x_0)$ ve $f(x_0 + h)$ 'i bulun.

$$f(x_0) = mx_0 + b$$

$$f(x_0 + h) = m(x_0 + h) + b = mx_0 + mh + b$$

2. $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0))/h$ eğimini bulun.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(mx_0 + mh + b) - (mx_0 + b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = m \end{aligned}$$

3. *Nokta-eğim denklemini kullanarak teğeti bulun.* $(x, mx_0 + b)$ noktasındaki teğet şu şekildedir:

$$y = (mx_0 + b) + m(x - x_0)$$

$$y = mx_0 + b + mx - mx_0$$

$$y = mx + b.$$

Örnek 2 deki adımları özetleyelim.

$y = f(x)$ eğrisinin (x_0, y_0) noktasındaki teğetinin bulunması

1. $f(x_0)$ ve $f(x_0 + h)$ 'i hesaplayın.

2. Eğimi hesaplayın

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

3. Limit varsa, teğeti

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

olarak bulun.

ÖRNEK 3 $y = 1/x$, $x \neq 0$ 'in eğimi ve teğeti

- (a) $y = 1/x$ eğrisinin $x = a \neq 0$ 'daki eğimini bulun.
 (b) Eğim nerede $-1/4$ olur?
 (c) a değiştikçe, $(a, 1/a)$ noktasında eğrinin teğetine ne olur?

Çözüm

- (a) Burada, $f(x) = 1/x$ 'tir. $(a, 1/a)$ 'daki eğim ise

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{ha(a+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

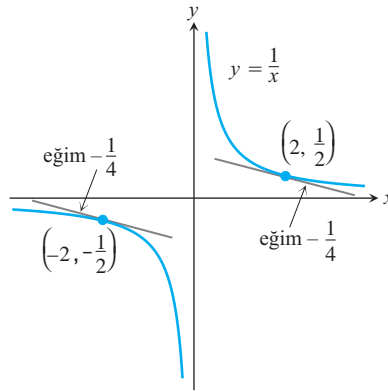
olarak bulunur. $h = 0$ yazıp limiti hesaplayabileceğimiz son adıma gelene kadar her satırın başında “ $\lim_{h \rightarrow 0}$ ” yazmak zorunda olduğumuza dikkat edin. a sayısı pozitif veya negatif olabilir fakat sıfır olamaz.

- (b) $x = a$ olduğu noktada $y = 1/x$ 'in eğimi $-1/a^2$ 'dir.

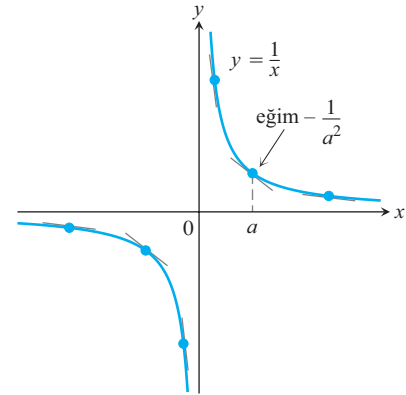
$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}$$

ise, eğim $-1/4$ olacaktır. Bu denklem $a^2 = 4$, yani $a = 2$ veya $a = -2$ 'ye denktir. $(2, 1/2)$ ve $(-2, -1/2)$ noktalarında eğrinin eğimi $-1/4$ 'tür (Şekil 2.68).

- (c) $a \neq 0$ ise $-1/a^2$ eğimi her zaman negatiftir. $a \rightarrow 0^+$ iken, eğim $-\infty$ 'a yaklaşır ve teğet giderek dikleşir (Şekil 2.69). $a \rightarrow 0^-$ iken de bunu görürüz. a orijinden uzaklaştıkça, eğim 0^- 'ye yaklaşır ve teğet yatay hale gelir. ■



ŞEKİL 2.68 $y = 1/x$ 'in eğimi $-1/4$ olan iki teğeti (Örnek 3)



ŞEKİL 2.69 Orijine doğru dikleşen teğetler, teğet noktası uzaklaştıkça daha düz hale gelir.

Değişim Oranları: Bir Noktada Türev

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ifadesine **f 'nin x_0 'da h artımıyla fark bölümü** adı verilir. Fark bölümünün h sıfıra yaklaşırken bir limiti varsa, bu limite **f 'nin x_0 'daki türevi** denir. Fark bölümünü bir kirişin eğimi olarak yorumlarsak, türev $x = x_0$ noktasında eğrinin ve teğetinin eğimini verir. Fark bölümünü, Bölüm 2.1'de yaptığımız gibi, ortalama bir değişim oranı olarak yorumlarsak, türev $x = x_0$ noktasında fonksiyonun x 'e göre değişim oranını verir. Türev, analizde kullanılan en önemli iki matematiksel araçtan biridir. Türevi Bölüm 3'de daha yakından inceleyeceğiz. Diğer önemli araç integraldir ve onun incelemesini Bölüm 5 te başlatıyoruz

ÖRNEK 4 Anlık hız (Bölüm 2.1'deki Örnek 1 ve 2'nin devamı)

Bölüm 2.1'deki Örnek 1 ve 2'de, dünya yüzeyi yakınında, durgun halden başlayıp serbest düşen bir taşın hızını inceledik. İlk t saniye içinde taşın $y = 16t^2$ ft düştüğünü bulduk ve taşın $t = 1$ anındaki hızını tahmin etmek için giderek azalan aralıklarda bir dizi ortalama hız dizisi kullandık. Bu anda taşın hızı tam olarak neydi?

Çözüm $f(t) = 16t^2$ olsun. Taşın $t = 1$ ve $t = 1 + h$ saniye aralığındaki ortalama hızı

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{16(1 + h)^2 - 16(1)^2}{h} = \frac{16(h^2 + 2h)}{h} = 16(h + 2)$$

idi. Taşın $t = 1$ anındaki hızı ise

$$\lim_{h \rightarrow 0} 16(h + 2) = 16(0 + 2) = 32 \text{ ft/sn}$$

olur. Bu da başlangıçtaki 32 ft/sn'lik tahminimizi doğrular. ■

Özet

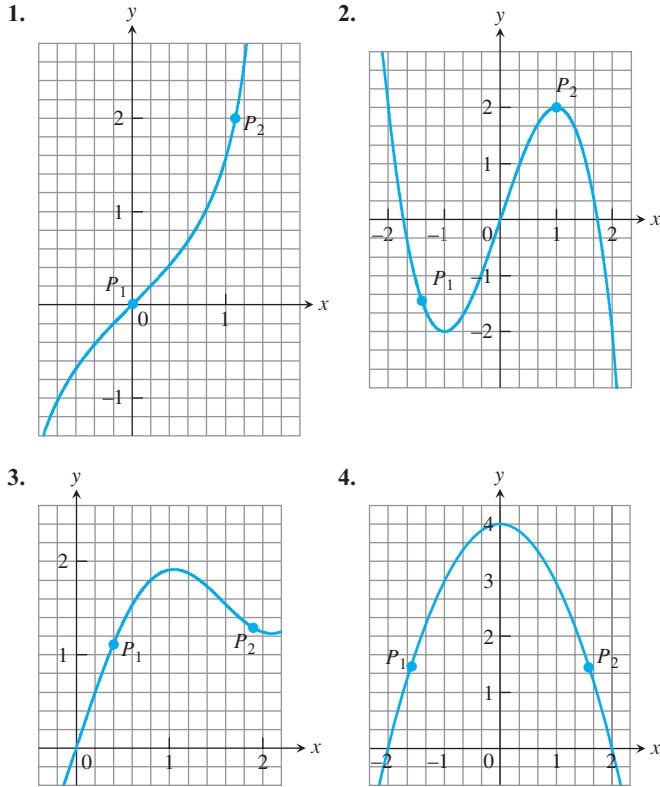
Eğrilerin eğimlerini, bir eğriye teğet olan doğruları, bir fonksiyonun değişim oranını, fark bölümünün limitini ve bir fonksiyonun bir noktadaki türevini tartıştık. Bu fikirlerin hepsi aşağıda özetlenen aynı şeye götürür:

1. $y = f(x)$ 'in $x = x_0$ 'daki eğimi
2. $y = f(x)$ eğrisinin $x = x_0$ 'daki teğetinin eğimi
3. $f(x)$ 'in $x = x_0$ 'daki x 'e göre değişim oranı
4. f 'in $x = x_0$ 'daki türevi
5. Fark bölümünün limiti, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

ALİŞTIRMALAR 2.7

Eğimler ve Teğetler

1–4 alıştırmalarında, bölmeleri ve köşeleri kullanarak P_1 ve P_2 noktalarında (y -birim başına x -birim olarak) eğrinin eğimini kabaca bulun. Grafikler basımda kaymış olabileceklerinden, sonuçlarınız kitabın arkasındakilerden farklı olabilir.



5–10 alıştırmalarında, verilen noktada eğrinin teğet denklemini bulun. Eğriyi ve teğetini birlikte çizin.

5. $y = 4 - x^2$, $(-1, 3)$
6. $y = (x - 1)^2 + 1$, $(1, 1)$
7. $y = 2\sqrt{x}$, $(1, 2)$
8. $y = \frac{1}{x^2}$, $(-1, 1)$
9. $y = x^3$, $(-2, -8)$
10. $y = \frac{1}{x^3}$, $(-2, -\frac{1}{8})$

11–18 alıştırmalarında, verilen noktada fonksiyonun grafiğinin eğimini bulun. O noktadaki teğetin denklemini yazın.

11. $f(x) = x^2 + 1$, $(2, 5)$
12. $f(x) = x - 2x^2$, $(1, -1)$
13. $g(x) = \frac{x}{x-2}$, $(3, 3)$
14. $g(x) = \frac{8}{x^2}$, $(2, 2)$
15. $h(t) = t^3$, $(2, 8)$
16. $h(t) = t^3 + 3t$, $(1, 4)$
17. $f(x) = \sqrt{x}$, $(4, 2)$
18. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $(8, 3)$

19–22 alıştırmalarında, eğrinin verilen noktadaki eğimini bulun.

19. $y = 5x^2$, $x = -1$
20. $y = 1 - x^2$, $x = 2$
21. $y = \frac{1}{x-1}$, $x = 3$
22. $y = \frac{x-1}{x+1}$, $x = 0$

Belirtilen Eğimde Teğetler

23 ve 24 alıştırmalarındaki fonksiyonların grafiklerinin hangi noktalarında yatay teğet bulunur?

23. $f(x) = x^2 + 4x - 1$
24. $g(x) = x^3 - 3x$

25. Eğimleri -1 olan ve $y = 1/(x-1)$ eğrisine teğet olan bütün doğruların denklemlerini bulun.

26. Eğimi $1/4$ olan ve $y = \sqrt{x}$ eğrisine teğet olan doğrunun denklemini yazın.

Değişim Oranları

27. **Bir kuleden düşen cisim** 100m yüksekliğinde bir kulenin tepesinden bir cisim bırakılıyor. Cismin t saniye sonra yerden yüksekliği $100 - 4.9t^2$ metredir. Bırakıldıktan 2 sn. sonra düşüş hızı nedir?

28. **Bir roketin hızı** Fırlatıldıktan t saniye sonra, bir roketin yüksekliği $3t^2$ ft'dir. 10 sn. sonra roketin yükselme hızı nedir?

29. **Bir roketin hızı** Yarıçapı $r = 3$ olduğunda bir çemberin alanının ($A = \pi r^2$) yarıçapına göre değişim oranı nedir?

30. **Topun değişen hacmi** Yarıçapı $r = 2$ olduğunda bir topun hacminin ($V = (4/3)\pi r^3$) yarıçapına göre değişim oranı nedir?

Teğetleri Bulma

31.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğinin orijinde bir teğeti var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

32.

$$g(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

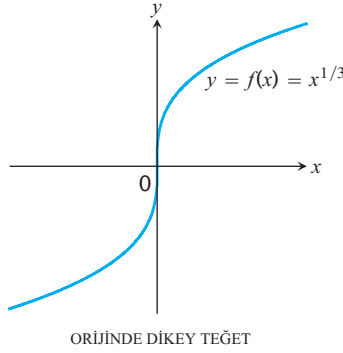
fonksiyonunun grafiğinin orijinde bir teğeti var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

Dikey Teğetler

$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0))/h = \infty$ veya $-\infty$ ise, $y = f(x)$ eğrisinin $x = x_0$ noktasında dikey bir teğeti vardır deriz.

$x = 0$ 'da dikey teğet: (Şekle bakınız)

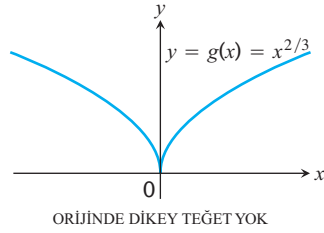
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{1/3} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty \end{aligned}$$



$x = 0$ 'da dikey teğet yok: (aşağıdaki şekle bakınız)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{2/3} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{1/3}} \end{aligned}$$

çünkü limit sağdan ∞ , soldan ise $-\infty$ 'dur.



33.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğinin orijinde dikey bir teğeti var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

34.

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğinin $(0, 1)$ noktasında dikey bir teğeti var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

T a. 35–44 alıştırmalarındaki eğrileri çizin. Grafiklerin nerelerde dikey teğetleri vardır?

b. (a)'daki sonuçlarınızı limit hesaplamalarıyla doğrulayın. Ama önce alıştırma 33 ve 34'deki açıklamaları okuyun.

35. $y = x^{2/5}$

36. $y = x^{4/5}$

37. $y = x^{1/5}$

38. $y = x^{3/5}$

39. $y = 4x^{2/5} - 2x$

40. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

41. $y = x^{2/3} - (x-1)^{1/3}$

42. $y = x^{1/3} + (x-1)^{1/3}$

43. $y = \begin{cases} -\sqrt{|x|}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

44. $y = \sqrt{|4-x|}$

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Kirişleri ve Teğetleri Çizmek

45–48 alıştırmalarındaki fonksiyonlar için aşağıda verilen adımları gerçekleştirmek için bir BCS kullanın.

a. $(x_0 - 1/2) \leq x \leq (x_0 + 3)$ aralığında $y = f(x)$ fonksiyonunu çizin.

b. x_0 'sabit tutularak, x_0 daki

$$q(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

farklar oranı h adım büyüklüğünün bir fonksiyonu haline gelir. Bu fonksiyonu BCS'nizin çalışma alanına girin.

c. $h \rightarrow 0$ iken q limitini bulun.

d. $h = 3, 2$ ve 1 için $y = f(x_0) + q \cdot (x - x_0)$ girişlerini tanımlayın. (a)'da verilen aralıkta f 'yi ve teğeti ile birlikte çizin.

45. $f(x) = x^3 + 2x, \quad x_0 = 0$ 46. $f(x) = x + \frac{5}{x}, \quad x_0 = 1$

47. $f(x) = x + \sin(2x), \quad x_0 = \pi/2$

48. $f(x) = \cos x + 4 \sin(2x), \quad x_0 = \pi$

Bölüm 2

Tekrar Soruları

1. $g(t)$ fonksiyonunun $t = a$ 'dan $t = b$ 'ye kadar olan aralıktaki ortalama değişim oranı nedir?
2. $g(t)$ fonksiyonunun $t = t_0$ 'daki değişim oranını bulmak için hangi limit hesaplanmalıdır?
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ limitinin gayri resmi veya sezgisel tanımı nedir? Tanım neden “gayri resmi” dir? Örnekler veriniz.
4. x x_0 'a yaklaşırken bir $f(x)$ fonksiyonunun limitinin varlığı ve değeri $x = c$ 'de ne olduğuna bağlı mıdır? Açıklayın ve örnek verin.

5. Limit bulunmadığında ne gibi fonksiyon davranışları görülebilir? Örnekler veriniz.
6. Limit hesaplamak için hangi teoremler vardır? Teoremlerin nasıl kullanıldığına örnek verin.
7. Tek taraflı limitlerle limitlerin ilişkisi nedir? Bu ilişki bazen bir limiti hesaplamada veya bir limitin var olmadığını ispatlamada nasıl kullanılır? Örnek verin.

8. $\lim_{\theta \rightarrow 0} ((\sin \theta)/\theta)$ değeri nedir? θ 'nın radyan veya derece olarak ölçülmesine bağlı mıdır? Açıklayınız.
9. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ tam olarak ne demektir? Limitin esas tanımında verilen bir f , L , x_0 ve $\epsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ değeri bulduğunuz bir örnek verin.
10. Aşağıdaki ifadelerin esas tanımlarını verin.
 - a. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$
 - b. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$
 - c. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$
 - d. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ ve $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ tam olarak ne demektir? Örnekler veriniz.
12. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} k$ (k bir sabit) ve $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1/x)$ nedir? Bu sonuçları diğer fonksiyonlara nasıl genişletirsiniz? Örnekler veriniz.
13. $x \rightarrow \pm\infty$ iken bir rasyonel fonksiyonun limitini nasıl bulursunuz? Örnekler veriniz.
14. Yatay, dikey ve eğik asimptotlar nelerdir? Örnekler veriniz.
15. Bir fonksiyonun, tanım aralığının bir iç noktasında sürekli olabilmesi için hangi koşullar sağlanmalıdır? Bir uç noktasında?
16. Bir fonksiyonun grafiğine bakmak fonksiyonun nerede sürekli olduğunu anlamanızda size nasıl yardımcı olur?
17. Bir fonksiyonun bir noktada sağdan veya soldan sürekli olması ne anlama gelir? Süreklilik ve tek taraflı süreklilik arasındaki ilişki nedir?
18. Polinomlar, rasyonel fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar, fonksiyonların rasyonel kuvvetleri ve cebirsel kombinasyonları, bileşke fonksiyonlar ve fonksiyonların mutlak değerlerinin sürekliliği hakkında ne söylenebilir?

19. Hangi koşullar altında bir fonksiyonu $x = c$ noktasında sürekli olacak şekilde genişletebilirsiniz? Örnek verin.
20. Bir fonksiyonun bir aralıkta sürekli olması ne demektir?
21. Bir fonksiyonun sürekli olması ne anlama gelir? Tanım kümesinin tamamında sürekli olmayan bir fonksiyonun, tanım kümesi içindeki belirli aralıklarda sürekli olabileceğini gösteren örnekler verin.
22. Süreksizliğin başlıca tipleri nelerdir? Her birine bir örnek veriniz. Kaldırılabilir süreksizlik nedir? Bir örnek veriniz.
23. Bir fonksiyonun Ara Değer Özelliğini sağlaması ne anlama gelir? Bir fonksiyonun, bir aralık üzerinde bu özelliği sağlanmasını, hangi koşullar garanti eder?
24. Genellikle kaleminizi kağıttan kaldırmadan grafiğini çizdiğiniz bir fonksiyonun sürekli olduğu söylenir. Bu neden doğrudur?
25. Bir doğrunun bir C eğrisine P noktasında teğet olması ne demektir?
26. Aşağıdaki formülün önemi nedir?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

27. $y = f(x)$ eğrisinin, üzerindeki bir (x_0, y_0) noktasındaki teğetini nasıl bulursunuz?
28. $y = f(x)$ eğrisinin $x = x_0$ 'daki eğimi, fonksiyonun $x = x_0$ 'daki x 'e göre değişim oranına nasıl bağlıdır? f 'nin x_0 'daki türevine?

Bölüm 2

Problemler

Limitler ve Süreklilik

1.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -1 \\ -x, & -1 < x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğini çizin. $x = -1, 0, 1$ noktalarının her birindeki limitleri, tek taraflı limitleri, sürekliliği ve tek taraflı sürekliliği detaylı olarak tartışın. Süreksizliklerden herhangi biri kaldırılabilir mi? Açıklayın.

2. Alıştırma 1'dekileri aşağıdaki fonksiyon için tekrarlayın.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 1/x, & 0 < |x| < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

3. $f(t)$ ve $g(t)$ 'nin her t için tanımlı olduklarını $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = -7$ ve $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = 0$ olduğunu varsayın. Aşağıdaki fonksiyonların $t \rightarrow t_0$ için limitlerini bulun.

- | | |
|----------------------|----------------------------|
| a. $3f(t)$ | b. $(f(t))^2$ |
| c. $f(t) \cdot g(t)$ | d. $\frac{f(t)}{g(t) - 7}$ |
| e. $\cos(g(t))$ | f. $ f(t) $ |
| g. $f(t) + g(t)$ | h. $1/f(t)$ |

4. $f(x)$ ve $g(x)$ 'in tüm x değerleri için tanımlandığını $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1/2$ ve $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \sqrt{2}$ olduğunu varsayın. Aşağıdaki fonksiyonların $x \rightarrow 0$ için limitlerini bulun.

- a. $-g(x)$ b. $g(x) \cdot f(x)$
c. $f(x) + g(x)$ d. $1/f(x)$
e. $x + f(x)$ f. $\frac{f(x) \cdot \cos x}{x - 1}$

Problem 5 ve 6'da, verilen ifadeler doğruysa $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 'in alması gereken değerleri bulun.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 - g(x)}{x} \right) = 1$ 6. $\lim_{x \rightarrow -4} \left(x \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \right) = 2$

7. Aşağıdaki fonksiyonlar hangi aralıklarda süreklidir?

- a. $f(x) = x^{1/3}$ b. $g(x) = x^{3/4}$
c. $h(x) = x^{-2/3}$ d. $k(x) = x^{-1/6}$

8. Aşağıdaki fonksiyonlar hangi aralıklarda süreklidir?

- a. $f(x) = \tan x$ b. $g(x) = \csc x$
c. $h(x) = \frac{\cos x}{x - \pi}$ d. $k(x) = \frac{\sin x}{x}$

Limit Bulmak

9–16 alıştırmalarında limitleri bulun veya niye olmadığını açıklayın.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 + 5x^2 - 14x}$
a. $x \rightarrow 0$ iken b. $x \rightarrow 2$ iken
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^5 + 2x^4 + x^3}$
a. $x \rightarrow 0$ iken b. $x \rightarrow -1$ iken
11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$ 12. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^4 - a^4}$
13. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$ 14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x}$ 16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x}$

17–20 alıştırmalarında x belirtilen değere yaklaşırken $g(x)$ 'in limitini bulun.

17. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (4g(x))^{1/3} = 2$ 18. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{1}{x + g(x)} = 2$
19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{g(x)} = \infty$ 20. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5 - x^2}{\sqrt{g(x)}} = 0$

Sonsuzda Limitler

21–30 alıştırmalarında limitleri bulun.

21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{5x + 7}$ 22. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3}{5x^2 + 7}$

23. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 8}{3x^3}$ 24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 7x + 1}$

25. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 7x}{x + 1}$ 26. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^3}{12x^3 + 128}$

27. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{[x]}$ (Bir grafik çiziciniz varsa, grafiği $-5 \leq x \leq 5$ fonksiyonu için çizmeyi deneyin)
28. $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\cos \theta - 1}{\theta}$ (Bir grafik çiziciniz varsa, sonsuzdaki limiti “görmek” için $f(x) = x(\cos 1/x) - 1$ 'i orijin yakınında çizmeyi deneyin)

29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x + 2\sqrt{x}}{x + \sin x}$ 30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2/3} + x^{-1}}{x^{2/3} + \cos^2 x}$

Süreklilik Genişlemeler

31. $f(x) = x(x^2 - 1)/|x^2 - 1|$ $x = 1$ veya -1 'de sürekli olacak şekilde genişletilebilir mi? Yanıtınızı açıklayın. (Fonksiyonu çizin - grafiğini ilginç bulacaksınız.)
32. $f(x) = \sin 1/x$ fonksiyonunun $x = 0$ 'a sürekli genişlemesinin neden bulunmadığını açıklayın.

T 33–36 problemlerinde, verilen a noktasına bir sürekli genişlemesi olup olmadığını görmek amacıyla fonksiyonu çizin. Varsa, genişletilmiş fonksiyonun a 'daki değerini grafikten bulun. Fonksiyonun sürekli bir genişlemesi yok gibiyse, sağdan veya soldan sürekli olacak şekilde genişletilebilir mi? Genişletilebilirse, genişletilmiş fonksiyonun değeri ne olmalıdır?

33. $f(x) = \frac{x - 1}{x - \sqrt[4]{x}}$, $a = 1$ 34. $g(\theta) = \frac{5 \cos \theta}{4\theta - 2\pi}$, $a = \pi/2$

35. $h(t) = (1 + |t|)^{1/t}$, $a = 0$ 36. $k(x) = \frac{x}{1 - 2^{|x|}}$, $a = 0$

Kökler

- T** 37. $f(x) = x^3 - x - 1$ olsun.
a. f 'nin -1 ile 2 arasında bir sıfırı olduğunu gösterin.
b. $f(x) = 0$ denklemini grafik olarak en fazla 10^{-8} hatayla çözün.
c. (b)'deki çözümün tam değerinin

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18} \right)^{1/3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} \right)^{1/3}$$

olduğu gösterilebilir. Bu tam sonucu çıkarın ve (b)'deki değerle karşılaştırın.

- T** 38. $f(\theta) = \theta^3 - 2\theta + 2$
a. f 'nin -2 ile 0 arasında bir sıfırı olduğunu gösterin.
b. $f(\theta) = 0$ denklemini grafik olarak en fazla 10^{-4} hatayla çözün.
c. (b)'deki çözümün tam değerinin

$$\left(\sqrt{\frac{19}{27}} - 1 \right)^{1/3} - \left(\sqrt{\frac{19}{27}} + 1 \right)^{1/3}$$

olduğu gösterilebilir. Bu tam sonucu çıkarın ve (b)'deki değerle karşılaştırın.

Bölüm 2

Ek - İleri Alıştırmalar

- T 1. 0^0 'a değer vermek** Üs kuralları, a sıfırdan farklı bir sayıysa, $a^0 = 1$ olacağını söyler. Ayrıca, n pozitif bir sayıysa, $0^n = 0$ olacağını da belirtirler.

Bu kuralları 0^0 'ı da kapsayacak şekilde genişletirsek, akıllı karıştırıcı bir sonuçla karşılaşırız. İlk kural $0^0 = 1$ verirken, ikincisi $0^0 = 0$ verecektir.

Burada doğru veya yanlış bir soruyla uğraşmıyoruz. Gördüğümüz gibi iki kural da geçersizdir, dolayısıyla bir çelişki yoktur. Aslında, başkalarını ikna edebilirsek, 0^0 'ı istediğimiz değere sahip olacak şekilde tanımlayabiliriz.

0^0 'ın değerinin ne olmasını isterdiniz? Aşağıda karar vermenize yardımcı olabilecek iki örnek vardır. (Başka bir örnek için Alıştırma 4'e bakın.)

- $x = 0.1, 0.01, 0.001$ ve hesap makinenize sığacak kadar değer için x^x 'i hesaplayın. Her seferinde elde ettiğiniz değeri yazın. Ne gibi bir kalıp görüyorsunuz?
- $0 \leq x \leq 1$ için, $y = x^x$ fonksiyonunu çizin. $x \leq 0$ için fonksiyon tanımlı olmadığı halde, grafik sağdan y -eksenine yaklaşacaktır. Hangi y -değerine yaklaşmaktadır? Daha iyi görebilmek için yakından bakın. Ne düşünüyorsunuz?

- T 2. 0^0 'ın 0 veya 1'den farklı bir şey olmasını istemeniz için bir neden** x pozitif değerlere doğru artarken, $1/x$ ve $1/(\ln x)$ sayılarının ikisi de sıfıra yaklaşır. x artarken

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{1/(\ln x)}$$

sayısına ne olur? Bunu bulmanın iki yolu aşağıda gösterilmektedir.

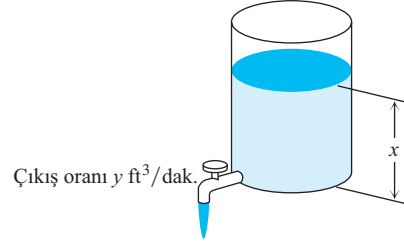
- $x = 10, 100, 1000$ ve hesap makinenizin izin vereceği değerlerde f' 'yi hesaplayın. Ne gibi bir kalıp görüyorsunuz?
- Orijini içeren çerçevelerde dahil olmak üzere, f' 'yi değişik çerçevelerde çizin. Ne görüyorsunuz? Grafik boyunca y değerlerini okuyun. Ne buluyorsunuz? Bölüm 6'da neler olup bittiği anlatılacaktır.

- 3. Lorentz kısaltması** Görelilik teorisinde bir cismin, mesela bir roketin, boyu bir gözlemciye, roketin gözlemciye göre hızına bağlıymış gibi görünür. Gözlemci roketin boyunu hareketsizken L_0 olarak ölçmüşse, v hızında iken roketin boyu

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

gibi görünecektir. Bu denklem Lorentz kısaltma formülüdür. Burada, 3×10^8 m/sn ışığın vakumdaki hızıdır. v artarken L 'ye ne olur? Neden soldan limite ihtiyaç vardır?

- 4. Bir su tankının akışını kontrol etme** Toricelli kanunu aşağıdaki gibi bir tanktan su akıtırırsanız, suyun y akış hızının bir sabit kere suyun x derinliğinin karekökü olduğunu söyler. Buradaki sabit çıkış musluğunun büyüklüğüne ve şekline bağlıdır.



Belirli bir tank için $y = \sqrt{x}/2$ olduğunu varsayın. Neredeyse sabit bir akış hızı elde etmek için arada bir tanka bir hortumla su ekliyorsunuz. Akış hızını

- $y_0 = 1$ ft³/dak hızının 0.2 ft³/dak civarında,
- $y_0 = 1$ ft³/dak hızının 0.1 ft³/dak civarında tutmak için, su yüksekliğini nasıl ayarlamalısınız?

- 5. Hassas bir alette ısı genleşme** Bildiğiniz gibi, çoğu metaller ısıtıldıklarında genişler, soğutulduklarında ise büzülürler. Bir laboratuvar aletinin boyutları bazen o kadar önemlidir ki, yapıldığı yer ve kullanıldığı laboratuvardaki sıcaklığın değişmemesi gerekir. 70°F 'ta 10 cm genişliğindeki bir alüminyum çubuk yakın bir t sıcaklığında

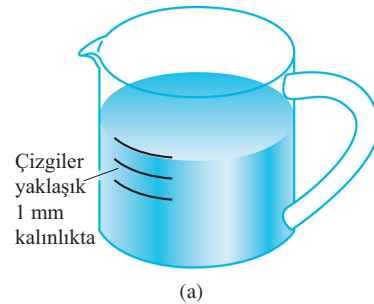
$$y = 10 + (t - 70) \times 10^{-4}$$

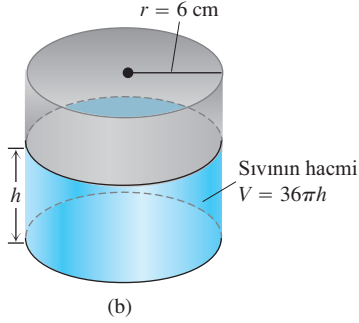
santimetre genişliğinde olacaktır. Genişliği 10 cm'den en fazla 0.0005 cm farklı olabilecek bir yerçekimi dalgası dedektörüyle çalıştığınızı varsayın. Bu hata payının aşılmaması için, sıcaklığı $t_0 = 70^\circ\text{F}$ 'tan en fazla ne kadar farklı olabilir?

- 6. Bir ölçü kabındaki çizgiler** Tipik bir 1 litrelik ölçüm kabının içi 6 cm yarıçaplı bir dik silindirdir (Şekle bakınız). Bu nedenle kaba konan suyun hacmi, dolu kısmın h yüksekliğinin bir fonksiyonu olacaktır:

$$V = \pi 6^2 h = 36\pi h$$

1 litre suyun (1000 cm^3) hacmini en fazla $\%1$ 'lik bir hata yaparak (10 cm^3) ölçmek için h 'yi ne kadar hassas ölçmeliyiz?





(a) 1 litrelik bir ölçü kabı, (b) 6 cm yarıçaplı bir dik silindir şeklinde modellenmesi

Limitin Kesin Tanımı

7–10 alıştırmalarında, fonksiyonun x_0 noktasında sürekli olduğunu göstermek için limitin esas tanımını kullanın.

7. $f(x) = x^2 - 7$, $x_0 = 1$ 8. $g(x) = 1/(2x)$, $x_0 = 1/4$

9. $h(x) = \sqrt{2x - 3}$, $x_0 = 2$ 10. $F(x) = \sqrt{9 - x}$, $x_0 = 5$

11. **Limitlerin teklifi** Bir fonksiyonun bir noktada farklı limitleri olamayacağını gösterin. Yani, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ ve $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$ ise, $L_1 = L_2$ olmalıdır.

12. Limitin Sabitle Çarpım Kuralını ispat edin:
 $\lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ herhangi bir k için.

13. **Tek taraflı limitler** $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = A$ ve $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = B$

ise, aşağıdakileri bulun.

- a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^3 - x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$
c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2 - x^4)$ d. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 - x^4)$

14. **Limitler ve süreklilik** Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğru, hangileri yanlıştır? Doğruysa, nedenini söyleyin; yanlışsa karşıt bir örnek (yani yanlışlığını ispatlayan bir örnek) verin.

- a. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ var, fakat $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ yoksa, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ yoktur.
b. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ limitlerinin ikisi de yoksa, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ yoktur.
c. f x 'te sürekliyse, $|f|$ 'de süreklidir.
d. $|f|$ a 'da sürekliyse, f 'de süreklidir.

15 ve 16 alıştırmalarında, limitin esas tanımını kullanarak fonksiyonun verilen x noktasına sürekli bir genişlemesi olduğunu ispatlayın.

15. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$, $x = -1$ 16. $g(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x - 6}$, $x = 3$

17. **Sadece tek noktada sürekli bir fonksiyon**

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ rasyonel} \\ 0, & x \text{ irrasyonel} \end{cases} \text{ olsun.}$$

- a. $x = 0$ 'da f 'nin sürekli olduğunu gösterin.
b. Boş olmayan her reel sayı açık aralığının hem rasyonel hem de irrasyonel sayılar içerdiğini kullanarak x 'in sıfırdan farklı bir değerinde f 'nin sürekli olmadığını gösterin.

18. **Dirichlet cetvel fonksiyonu** x rasyonel bir sayıysa, x iki tam sayının bölümü, m/n , olarak tek bir şekilde yazılabilir. Burada $n > 0$ ve m ile n 'nin tek ortak çarpanları birdir (Böyle bir kesire sadeleştirilemez deriz. Örneğin, $6/4$ 'ün sadeleştirilemez hali $3/2$ 'dir). $f(x)$ $[0, 1]$ aralığında

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & x = m/n \text{ sadeleştirilemez bir kesir} \\ 0, & x \text{ irrasyonel} \end{cases}$$

ile tanımlansın. Örneğin $f(0) = f(1) = 1$, $f(1/2) = 1/2$, $f(1/3) = f(2/3) = 1/3$, $f(1/4) = f(3/4) = 1/4$,

- a. f 'nin $[0, 1]$ aralığındaki her rasyonel sayıda süreksiz olduğunu gösterin..
b. f 'nin $[0, 1]$ aralığındaki her irrasyonel sayıda sürekli olduğunu gösterin. (İpucu: ϵ verilmiş pozitif bir sayıysa, $[0, 1]$ 'de $f(r) \geq \epsilon$ olacak şekilde sonlu sayıda r rasyonel sayısı bulunacağını gösterin.)
c. f 'nin grafiğini çizin. Sizce f 'ye neden "cetvel fonksiyonu" denilmektedir?

19. **Zıt noktalar** Dünyanın ekvatorunda her zaman sıcaklıkları aynı olan bir çift zıt (bir çapın iki ucunda olan) nokta bulunduğuna inanmak için bir neden var mı? Açıklayın.

20. $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = 3$ ve $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = -1$ ise, $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x)$ limitini bulun.

21. **Neredeyse lineer olan ikinci derece bir denklemin kökleri** a bir sabit olmak üzere, $ax^2 + 2x - 1 = 0$ denkleminin, $a > -1$ ve $a \neq 0$ ise, biri pozitif, diğeri negatif iki kökü vardır:

$$r_+(a) = \frac{-1 + \sqrt{1+a}}{a}, \quad r_-(a) = \frac{-1 - \sqrt{1+a}}{a}.$$

- a. $a \rightarrow 0$ ve $a \rightarrow -1^+$ iken $r_+(a)$ 'ya ne olur?
b. $a \rightarrow 0$ ve $a \rightarrow -1^+$ iken $r_-(a)$ 'ya ne olur?
c. $r_+(a)$ ve $r_-(a)$ 'yı a 'nın bir fonksiyonu olarak çizip sonuçlarınızı doğrulayın. Gördüklerinizi açıklayın.
d. Daha fazla bilgi için, $f(x) = ax^2 + 2x - 1$ 'i $a = 1, 0.5, 0.2, 0.1$ ve 0.05 değerlerinde üst üste çizin.

22. **Bir denklemin kökleri** $x + 2 \cos x = 0$ denkleminin en az bir çözümünün olduğunu gösterin.

23. **Sınırlı fonksiyonlar** Bir D kümesindeki bütün x değerleri için $f(x) \leq N$ olacak şekilde bir N sayısı varsa, reel değerli f fonksiyonu D 'de üstten sınırlıdır. Varsa, N sayısı f 'nin D 'deki üst sınırı adını alır ve f üstten N ile sınırlanmıştır denir. Benzer şekilde, D kümesindeki bütün x değerleri için $f(x) \geq M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa, f fonksiyonu D 'de alttan sınırlıdır deriz. Varsa, M sayısı f 'nin D 'deki alt sınırı adını alır ve alttan M ile sınırlanmıştır denir. Hem alttan hem de üstten sınırlıysa, f fonksiyonu sınırlıdır.

- a. Ancak ve yalnız D 'deki bütün x değerleri için $|f(x)| \leq B$ olacak şekilde bir B sayısı varsa, f fonksiyonunun D 'de sınırlı olduğunu gösterin.
b. f 'nin üstten N ile sınırlı olduğunu varsayın. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ ise $L \leq N$ olduğunu gösterin.
c. f 'nin alttan M ile sınırlı olduğunu varsayın. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ ise, $L \geq M$ olduğunu gösterin.

24. $\max \{a, b\}$ ve $\min \{a, b\}$

$$\text{a. } \max \{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$$

ifadesinin $a \geq b$ ise a 'ya, $b \geq a$ ise b 'ye eşit olacağını gösterin. Yani, başka bir deyişle, $\max\{a, b\}$ a ve b sayılarının büyük olanını verir.

b. İki sayının küçük olanını veren $\min\{a, b\}$ için de benzer bir ifade verin.

$\frac{\sin \theta}{\theta}$ İçeren Genelleştirilmiş Limitler

$\lim_{\theta \rightarrow 0} (\sin \theta)/\theta = 1$ formülü genelleştirilebilir. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ ve $f(x)$ noktasını içeren bir açık aralıkta (c 'nin kendisi hariç olabilir) $x = c$ daima sıfırdan farklı ise

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$$

dir.

Aşağıda bazı örnekler verilmiştir.

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1.$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x^2 - x - 2)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x^2 - x - 2)}{(x^2 - x - 2)} \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - x - 2)}{x + 1} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 2)}{x + 1} = -3$$

$$\text{d. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1 - \sqrt{x})}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1 - \sqrt{x})}{1 - \sqrt{x}} \frac{1 - \sqrt{x}}{x - 1} = \\ 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(x - 1)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{(x - 1)(1 + \sqrt{x})} = -\frac{1}{2}$$

25–30 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{x}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sin \sqrt{x}}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + x)}{x}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x - 2}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sin(\sqrt{x} - 3)}{x - 9}$$

Bölüm 2

Teknoloji Uygulama Projeleri

Mathematica-Maple Modülü

Limite gelin

Bölüm I

Bölüm II (Sıfırın sıfırını kuvveti: Ne Anlama Gelir?)

Bölüm III (Tek Taraflı Limitler)

Grafik ve sayısal araştırmalarla limit kavramını gözünüzde canlandırın ve yorumlayın.

Bölüm IV (Bir Kuvvet Bir Farkı Ne Yapar)

x 'in çeşitli kuvvetlerinde limitlerin ne kadar hassas olabileceklerini görün.

Mathematica-Maple Modülü

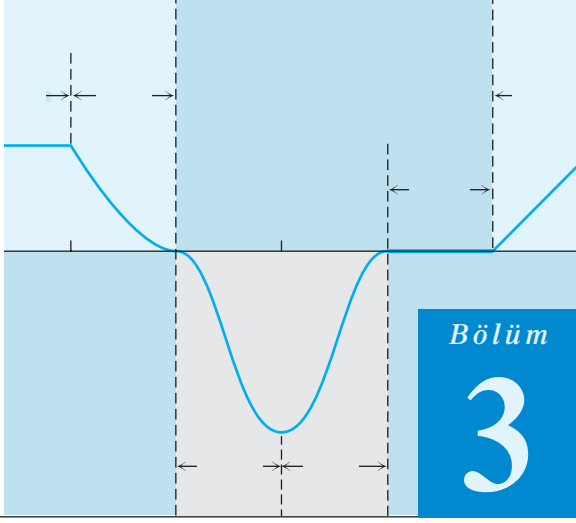
Sonsuza Gitmek

Bölüm I $x \rightarrow \infty$ veya $x \rightarrow -\infty$ iken fonksiyonların davranışlarını keşfetmek)

Bu modül, $x \rightarrow \infty$ veya $x \rightarrow -\infty$ iken bir fonksiyonun davranışını keşfetmek için dört örnek sunar.

Bölüm II (Büyüme Oranları)

Sürekli olmadığı halde sürekliymiş gibi *gözük*en grafikleri gözleyin. Sürpriz olarak görebileceğiniz bazı sonuçlar elde etmek için sürekliliğin birkaç çıkarımı keşfedilmiştir.



Bölüm

3

TÜREV

GİRİŞ Bölüm 2’de, bir eğrinin bir noktadaki eğimini kiriş eğimlerinin limiti olarak tanımladık. Türev adını alan bu limit bir fonksiyonun değişme hızını ölçer ve analizdeki en önemli fikirlerden biridir. Türevler hız ve ivme hesaplamada, bir hastalığın yayılma oranını tahmin etmede, verimliliği maksimize edecek şekilde üretim seviyesini belirlemede, silindirik bir kutunun ideal boyutlarını bulmada, tarih öncesi bir sanat eserinin yaşını belirlemede ve bir çok başka uygulamalar için kullanılır. Bu bölümde, türevleri hesaplamayı kolaylaştıracak yöntemler geliştireceğiz ve türevlerin karmaşık fonksiyonlara yaklaşımda nasıl kullanılacağını öğreneceğiz.

3.1

Fonksiyon Olarak Türev

TARİHSEL DENEME

Türev

Bölüm 2’in sonunda, bir $y = f(x)$ eğrisinin $x = x_0$ noktasındaki eğimini

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

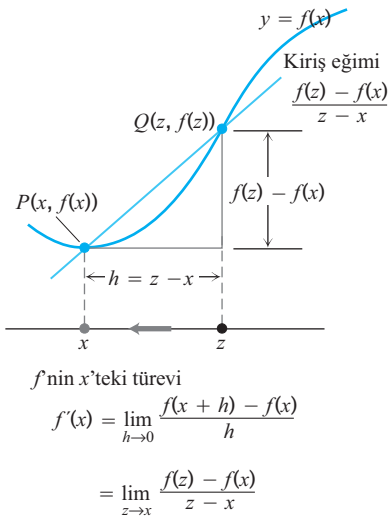
olarak tanımlamıştık. Eğer varsa, bu limite f ’nin x_0 ’daki türevi demiştik. Bu bölümde türevi f ’nin tanım aralığındaki her nokta göze alınarak f ’den türetilmiş bir fonksiyon olarak inceleyeceğiz.

TANIM Türev Fonksiyonu

Bir $f(x)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevi, x ’teki değeri

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

olan (limitin bulunması koşuluyla) f' fonksiyonudur .



ŞEKİL 3.1 Bir f fonksiyonunun türevi için fark oranını yazma şekli ilgilendiğimiz noktaları nasıl işaretlediğimize bağlıdır.

Bağımsız değişken x 'e göre türev aldığımızı belirtmek için, tanımda basitçe f yerine $f(x)$ notasyonunu kullanırız. f' 'nin tanım kümesi, f 'nin tanım kümesinde limitin var olduğu noktaların kümesi, f 'nin tanım kümesiyle aynı veya daha küçük olabilir. Belirli bir x için f 'nin x 'te bir türevi vardır (türevlenebilir) deriz. f 'nin tanım kümesinin her noktası için f' varsa f 'ye türevlenebilir deriz.

Eğer $z = x + h$ yazarsak $h = z - x$ olur ve ancak ve yalnız $z \rightarrow x$ ise $h \rightarrow 0$ dır. Bu nedenle, türevin bir eşdeğer tanımı aşağıdaki gibidir (bkz. Şekil 3.1).

Türev İçin Alternatif Bir Formül

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$

Tanımı Kullanarak Türev Hesaplama

Bir türevi hesaplama işlemine **türev alma** denir. Türev almanın $y = f(x)$ fonksiyonuna uygulanan bir işlem olduğunu vurgulamak için $f'(x)$ türevini göstermenin bir başka yolu olan

$$\frac{d}{dx} f(x)$$

notasyonunu kullanırız. Bölüm 2.7 Örnek 2 ve 3 işlemin $y = mx + b$ ve $y = 1/x$ 'e uygulanmasını gösterir. Örnek 2

$$\frac{d}{dx} (mx + b) = m$$

olduğunu gösterir. Örneğin,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{3}{2}x - 4 \right) = \frac{3}{2}$$

Örnek 3'de ise,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

olduğunu gördük. Aşağıda iki örnek daha bulunmaktadır.

ÖRNEK 1 Tanımı Uygulamak

$f(x) = \frac{x}{x-1}$ fonksiyonun türevini alın.

Çözüm Elimizde $f(x) = \frac{x}{x-1}$

ve

$$f(x+h) = \frac{(x+h)}{(x+h)-1}$$

bulunmaktadır, dolayısıyla

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{\frac{x+h}{x+h-1} - \frac{x}{x-1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x+h-1)(x-1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

ÖRNEK 2 Karekök Fonksiyonunun Türevi

(a) $x > 0$ için $y = \sqrt{x}$ 'in türevini bulunuz.

(b) $y = \sqrt{x}$ eğrisinin $x = 4$ 'teki teğetini bulunuz.

Çözüm

(a) f' 'yi hesaplamak için eşdeğer formu kullanırız:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \\ &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{z - x} \\ &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{(\sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(b) $x = 4$ 'te eğrinin eğimi

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

tür. Teğet, $(4, 2)$ noktasından $1/4$ eğimiyle geçen doğrudur (Şekil 3.2):

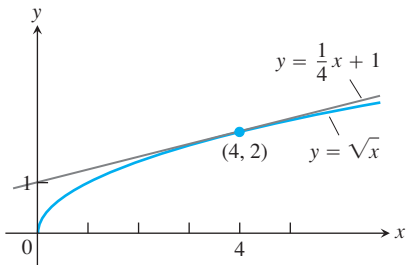
$$y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$

$y = \sqrt{x}$ 'in $x = 0$ 'daki türevini örnek 6 da ele alacağız.

$\sqrt{x}$ 'in $x > 0$ için türevine çok ihtiyaç duyacaksınız.

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$



ŞEKİL 3.2 $y = \sqrt{x}$ eğrisi ve $(4, 2)$ 'deki teğeti. Teğetin eğimi, $x = 4$ 'teki türev hesaplanarak bulunur (Örnek 2).

Gösterim

Bağımsız değişkenin x ve bağlı değişkenin y olduğu bir $y = f(x)$ fonksiyonunun türevini göstermenin bir çok yolu vardır. Bazı yaygın alternatif gösterimler şunlardır:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = D(f)(x) = D_x f(x)$$

d/dx ve D sembolleri türev almanın bir işlem olduğunu belirtirler ve **türev alma operatörleri** olarak adlandırılırlar. dy/dx 'i “ y 'nin x 'e göre türevi” olarak, df/dx ve $(d/dx)f(x)$ 'i de “ f 'nin x 'e göre türevi olarak okuruz. “Üs” gösterimleri y' ve f' Newton'un türev için kullandığı gösterimlerden gelir. d/dx gösterimleri Leibniz'in kullandıklarıyla aynıdır. dy/dx sembolü bir oran olarak görülmemelidir (Bölüm 3.8 de “diferansiyel” kavramı tanıtilana kadar).

$D(f)$ notasyonunu, türev fonksiyonu f' yerine f fonksiyonunun tanım kümesi (domain) ile karıştırmama konusunda dikkatli olun. Farklılık içerikten anlaşılmalıdır.

Bir türevin belirli bir $x = a$ sayısındaki değerini belirtmek için şu notasyonları kullanırız:

$$f'(a) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=a}$$

Örneğin. Örnek 2b de şunları yazabilirdik

$$f'(4) = \left. \frac{d}{dx} \sqrt{x} \right|_{x=4} = \left. \frac{1}{2\sqrt{x}} \right|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Bazen bir ifadeyi hesaplamak için $\left| \right|$ di çizgi yerine köşeli parantez $\left[\right]$ kullanırız.

Türevin Grafiğini Çizmek

Eğimleri f' 'nin grafiğinden tahmin ederek, çoğunlukla $y = f(x)$ 'in türevinin makul bir çizimini yapabiliriz. Yani, xy -düzleminde $(x, f'(x))$ noktalarını işaretler ve düzgün bir eğri ile onları birleştiririz. Bu eğri $y = f'(x)$ 'i temsil eder.

ÖRNEK 3 Bir Türevin Grafiğini Çizmek

Şekil 3.3a'daki $y = f(x)$ fonksiyonunun türevini çizin.

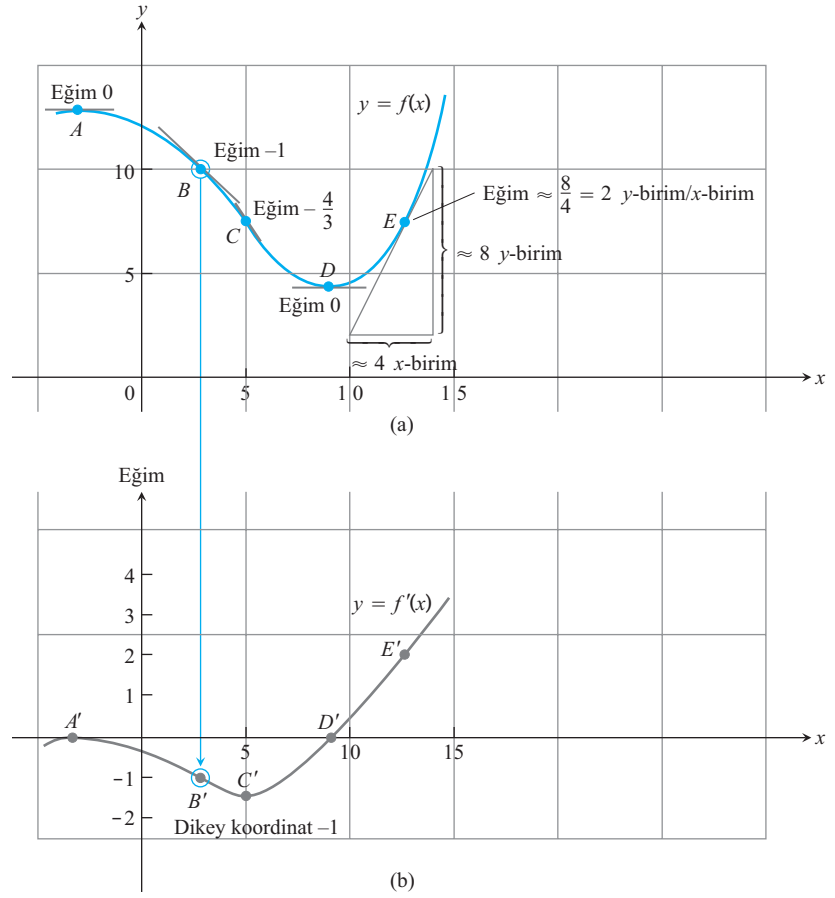
Çözüm Sık aralıklarla f grafiğine teğetler çizer ve teğetlerin eğimlerinden $f'(x)$ 'in bu noktalardaki değerlerini buluruz. Bunlara karşılık gelen $(x, f'(x))$ çiftlerini işaretler ve bunları Şekil 3.3b'de yapıldığı gibi düzgün bir eğriyle birleştiririz. ■

$y = f'(x)$ grafiğinden neler öğrenebiliriz? İlk bakışta şunlar görülebilir:

1. f' 'nin değişim oranının pozitif, negatif veya sıfır olduğu yerler;
2. Herhangi bir x değerindeki büyüme oranının kabaca büyüklüğü ve bu büyüklüğün $f(x)$ 'in büyüklüğüyle ilişkisi;
3. Değişim oranının kendisinin artıp artmadığı.

ÖRNEK 4 Kan Şekeri Konsantrasyonu

23 Nisan 1988'de, insan gücüyle çalışan *Daedalus* uçağı Yunanistan'ın güney doğusunda, Ege Denizi'ndeki Girit adasından Santorini adasına 119 km'lik rekor bir uçuş yaptı.



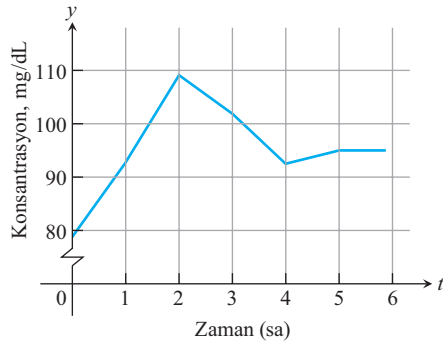
ŞEKİL 3.3 (a)'daki $y = f(x)$ grafiğinin eğimlerini işaretleyerek (b)'deki $y = f'(x)$ 'in grafiğini çizdik. Mesela, B' 'nin dikey koordinatı B 'deki eğimdir. f' 'in grafiği f 'nin eğiminin x ile nasıl değiştiğinin görsel bir kayıdır.

Uçuştan önceki 6 saatlik dayanıklılık testlerinde, araştırmacılar pilot adaylarının kan şekeri konsantrasyonlarını ölçtü. Atlet pilotlardan birinin konsantrasyon grafiği, konsantrasyon miligram/desilitre ve zaman saat olmak üzere, Şekil 3.4a'da görülmektedir.

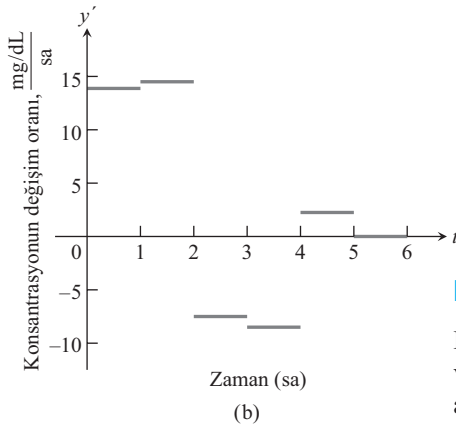
Grafik veri noktalarını birleştiren doğru parçalarından yapılmıştır. Her parçanın sabit eğimi ölçümler arasındaki konsantrasyonun türevini verir. Her parçanın eğimini hesapladık ve türevi Şekil 3.4b'de bir basamak fonksiyonu olarak çizdik. Örneğin, ilk saat için çizimi yaparken, konsantrasyonun 79 mg/dL'den 93 mg/dL'ye arttığını gözlemledik. Net artma $\Delta y = 93 - 79 = 14$ mg/dL'dir. Bunu $\Delta t = 1$ saat ile bölerek, ortalama değişim oranını buluruz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{14}{1} = 14 \text{ mg/dL/saatte}$$

Konsantrasyonun bir köşesinin bulunduğu ve eğiminin olmadığı $t = 1, 2, \dots, 5$ zamanlarında konsantrasyonun değişim oranı hakkında bir tahminde bulunamadığımıza dikkat edin. Türev basamak fonksiyonu bu zamanlarda tanımlı değildir. ■



(a)



(b)

23 Nisan 1988'de *Daedalus*'un uçuş rotası

ŞEKİL 3.4 (a) 6 saatlik uçuş öncesi dayanıklılık testi sırasında bir *Daedalus* pilotunun kanındaki şeker konsantrasyonu. (b) Pilotun kan şekeri konsantrasyonunun türevinin grafiği testin farklı aralıklarında konsantrasyonun ne kadar hızlı artıp düştüğünü göstermektedir.

Bir Aralıkta Türevlenebilirlik; Tek Taraflı Türevler

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun (sonlu veya sonsuz) bir açık aralığın her noktasında bir türevi varsa, $f(x)$ 'e bu aralıkta **türevlenebilir** denir. Bir $[a, b]$ kapalı aralığının içi (a, b) açık aralığında türevlenebilirse ve uç noktalarında

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{a'da sağdan türev}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \quad \text{b'de soldan türev}$$

limitleri varsa, $[a, b]$ kapalı aralığında türevlenebilirdir (Şekil 3.5).

Bir fonksiyonun tanım aralığının herhangi bir noktasında sağdan ve soldan türevler tanımlanabilir. Tek taraflı ve iki taraflı limitler arasındaki ilişki bu türevler için de geçerlidir. Bölüm 2.4'teki Teorem 6 dolayısıyla, bir fonksiyonun, ancak ve yalnız bir noktada sağdan ve soldan türevleri varsa ve bu tek taraflı türevlerler eşitse o noktada türevi olabilir.

ÖRNEK 5 $y = |x|$ Fonksiyonu Orijinde Türevlenebilir Değildir

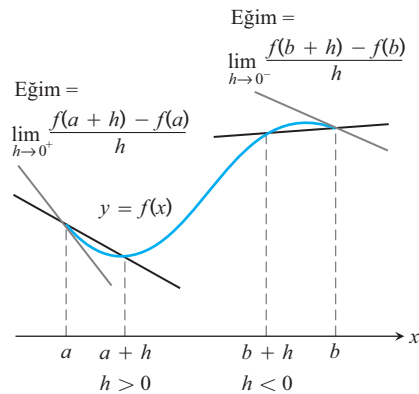
$y = |x|$ fonksiyonunun $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralıklarında türevlenebilir olduğunu, fakat $x = 0$ 'da türevinin bulunmadığını gösterin.

Çözüm Orijinin sağında,

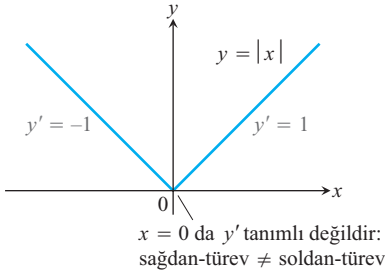
$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(1 \cdot x) = 1 \quad \frac{d}{dx}(mx + b) = m, |x| = x$$

ve solunda

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot x) = -1 \quad |x| = -x$$



ŞEKİL 3.5 Uç noktadaki türevler tek taraflı limitlerdir.



ŞEKİL 3.6 $y = |x|$ fonksiyonu, grafiğinde bir “köşenin” bulunduğu orijinde türevlenemez.

bulunur (Şekil 3.6). Orijinde türev olamaz, çünkü tek taraflı türevler bu noktada farklıdır:

$$\begin{aligned} 0\text{'da } |x| \text{'in sağdan türevi} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} \quad h > 0 \text{ ise, } |h| = h \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0\text{'da } |x| \text{'in soldan türevi} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} \quad h < 0 \text{ ise, } |h| = -h \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} -1 = -1. \end{aligned}$$

ÖRNEK 6 $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ 'da Türevlenebilir Değildir

Örnek 2'de $x > 0$ için,

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

bulduk. $x = 0$ 'da türevin varlığını incelemek için tanımı uyguluyoruz:

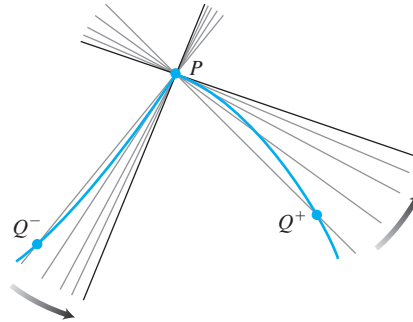
$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{0 + h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$$

Sağdan limit sonlu olmadığından, $x = 0$ 'da türev yoktur. Orijini $y = \sqrt{x}$ 'in grafiği üzerindeki $(h, \sqrt{h})$ noktasına birleştiren kırımların eğimleri ∞ 'a yaklaşır. Grafiğin orijinde bir *dikey teğeti* vardır.

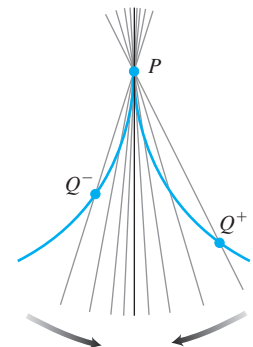
Ne Zaman Bir Fonksiyonun Bir Noktada Türevi Yoktur?

Bir fonksiyonun grafiğindeki $P(x_0, f(x_0))$ 'dan ve yakınındaki bir Q noktasından geçen kırımların eğimleri, Q P 'ye yaklaşırken bir limite gidiyorsa, fonksiyonun x_0 noktasında türevi vardır. Q P 'ye giderken, kırımlar bir limit konuma ulaşmadıklarında veya dikey olduklarında, türev bulunmaz. Böylece, türevlenebilirlik bir f fonksiyonunun grafiği üzerinde “düzgünlük” koşulu dur. Grafiği düzgün olan bir fonksiyonun ise birkaç sebepten dolayı bir noktada türevi bulunmayabilir, grafiğinde aşağıdaki durumlar bulunuyorsa türevi yoktur:

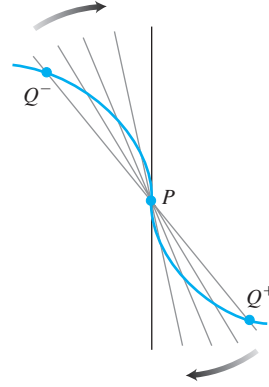
1. Bir *köşe*, tek taraflı türevler farklıdır.



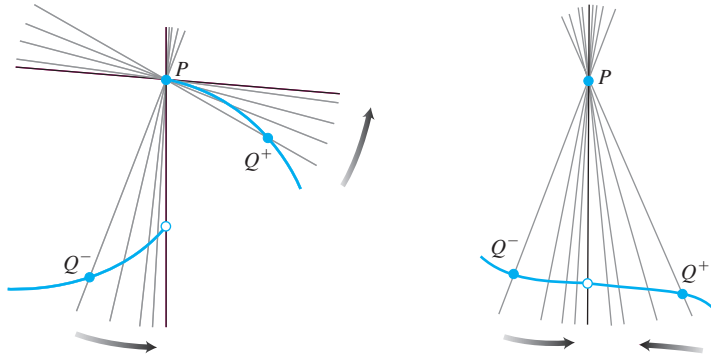
2. Bir *sivri uç*, PQ kırımlarının eğimi bir taraftan ∞ 'a, diğer taraftan $-\infty$ 'a yaklaşır.



3. bir *dikey teğet*, PQ kirisinin eğimi iki taraftan da ∞ 'a veya iki taraftan da $-\infty$ 'a yaklaşır (Burada $-\infty$ 'a yaklaşmaktadır).



4. Bir *süreksizlik*.



Türevlenebilir Fonksiyonlar Süreklidir

Bir fonksiyon, türevinin bulunduğu her noktada süreklidir.

TEOREM 1 Türevlenebilirlik Sürekliliği Gerektirir

f' 'nin $x = c$ 'de bir türevi varsa, f fonksiyonu $x = c$ 'de süreklidir.

İspat $f'(c)$ 'nin var olduğu verilmiştir, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ veya buna eşdeğer olarak $\lim_{h \rightarrow 0} f(c + h) = f(c)$ olduğunu göstermemiz gerekir. $h \neq 0$ ise,

$$\begin{aligned} f(c + h) &= f(c) + (f(c + h) - f(c)) \\ &= f(c) + \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \cdot h \end{aligned}$$

yazılabilir.

Şimdi, $h \rightarrow 0$ iken limit alalım. Bölüm 2.2'deki Teorem 1'den,

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} f(c + h) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(c) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\ &= f(c) + 0 \\ &= f(c).\end{aligned}$$

bulunur.

Tek taraflı limitlerdeki ifadelerin benzerleri, f' 'nin $x = c$ 'de bir taraftan (sağdan veya soldan) türevi varsa, f' 'nin $x = c$ 'de o taraftan sürekli olduğunu gösterir.

Sayfa 154'teki Teorem 1 şunu söyler: bir fonksiyonun bir noktada süreksizliği varsa (örneğin sıçramalı bir süreksizlik) fonksiyon o noktada türevlenebilir olamaz. En büyük tam sayı fonksiyonu $y = \lfloor x \rfloor$ her tamsayısında $x = n$ türevsizdir (Bölüm 2.6, Örnek 4).

DİKKAT Teorem 1'in tersi yanlıştır. Örnek 5'te gördüğümüz gibi, bir fonksiyonun sürekli olduğu bir noktada türevinin olması gerekmez.

Türevlerin Ara Değer Özelliği

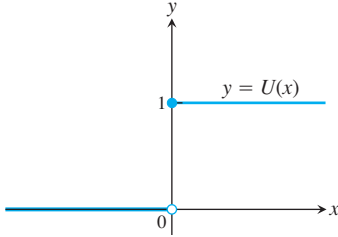
İlk olarak, Fransız matematikçi Jean Gaston Darboux (1842-1917) tarafından, 1875 yılında ispat edilen aşağıdaki teoremden görülebileceği gibi, her fonksiyon bir başka fonksiyonun türevi olamaz.

TEOREM 2

a ve b , f' 'nin türevli olduğu bir aralıkta iki noktaysa, f' , $f'(a)$ ile $f'(b)$ arasındaki her değeri alır.

(İspatlamayacağımız) Teorem 2, bir aralıkta ara değer özelliğine sahip olmayan bir fonksiyonun, o aralıkta başka bir fonksiyonun türevi *olamayacağını* söyler. Örneğin Şekil 3.7'deki birim adım fonksiyonu, reel doğru üzerindeki hiçbir reel-değerli fonksiyonun türevi olamaz. Bölüm 5'te her sürekli fonksiyonun, başka bir fonksiyonun türevi olduğunu göreceğiz.

Bölüm 4.4'te, iki defa türevlenebilir bir fonksiyonun grafiğinde, “eğrilme” davranışının değiştiği bir noktada, neler olduğunu incelemek için Teorem 2'ye başvuracağız.



ŞEKİL 3.7 Birim basamak fonksiyonunun ara değer özelliği yoktur ve reel doğru da bir fonksiyonun türevi olamaz.

ALİŞTIRMALAR 3.1

Türev Fonksiyonlarını ve Değerlerini Bulma

Tanımı kullanarak, 1–6 alıştırmalarındaki fonksiyonların türevlerini bulun. Sonra istenilen türev değerlerini bulun.

1. $f(x) = 4 - x^2$; $f'(-3)$, $f'(0)$, $f'(1)$

2. $F(x) = (x - 1)^2 + 1$; $F'(-1)$, $F'(0)$, $F'(2)$

3. $g(t) = \frac{1}{t^2}$; $g'(-1)$, $g'(2)$, $g'(\sqrt{3})$

4. $k(z) = \frac{1-z}{2z}$; $k'(-1)$, $k'(1)$, $k'(\sqrt{2})$

5. $p(\theta) = \sqrt{3\theta}$; $p'(1)$, $p'(3)$, $p'(2/3)$

6. $r(s) = \sqrt{2s + 1}$; $r'(0)$, $r'(1)$, $r'(1/2)$

7–12 alıştırmalarında istenilen türevleri bulun.

7. $y = 2x^3$ ise $\frac{dy}{dx}$ 8. $\frac{s^3}{2} + 1$ ise $\frac{dr}{ds}$

$$9. s = \frac{t}{2t+1} \quad \text{ise} \quad \frac{ds}{dt}$$

$$10. v = t - \frac{1}{t} \quad \text{ise} \quad \frac{dv}{dt}$$

$$11. p = \frac{1}{\sqrt{q+1}} \quad \text{ise} \quad \frac{dp}{dq}$$

$$12. z = \frac{1}{\sqrt{3w-2}} \quad \text{ise} \quad \frac{dz}{dw}$$

Eğimler ve Teğetler

13–16 alıştırmalarında, fonksiyonların türevini alın ve bağımsız değişkenin verilen değerinde teğetin eğimini bulun.

$$13. f(x) = x + \frac{9}{x}, \quad x = -3$$

$$14. k(x) = \frac{1}{2+x}, \quad x = 2$$

$$15. s = t^3 - t^2, \quad t = -1$$

$$16. y = (x+1)^3, \quad x = -2$$

17–18 alıştırmalarında, fonksiyonların türevlerini alın. Sonra fonksiyonun grafiği üzerinde belirtilen noktadaki teğetin denklemini bulun.

$$17. y = f(x) = \frac{8}{\sqrt{x-2}}, \quad (x, y) = (6, 4)$$

$$18. w = g(z) = 1 + \sqrt{4-z}, \quad (z, w) = (3, 2)$$

19–22 alıştırmalarında, türevlerin değerini bulun.

$$19. s = 1 - 3t^2 \quad \text{ise} \quad \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=-1}$$

$$20. y = 1 - \frac{1}{x} \quad \text{ise} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\sqrt{3}}$$

$$21. r = \frac{2}{\sqrt{4-\theta}} \quad \text{ise} \quad \left. \frac{dr}{d\theta} \right|_{\theta=0}$$

$$22. w = z + \sqrt{z} \quad \text{ise} \quad \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=4}$$

Türevler İçin Alternatif Formülü Kullanmak

23–26 alıştırmalarındaki fonksiyonların türevlerini bulmak için

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

formülünü kullanın.

$$23. f(x) = \frac{1}{x+2}$$

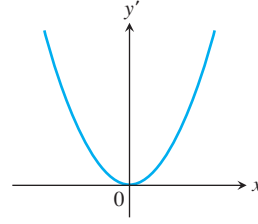
$$24. f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$25. g(x) = \frac{x}{x-1}$$

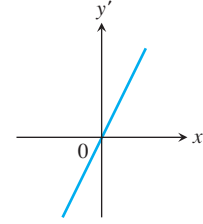
$$26. g(x) = 1 + \sqrt{x}$$

Grafikler

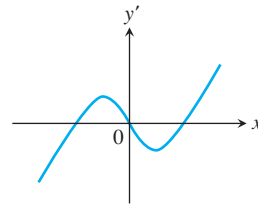
27–30 alıştırmalarında verilen grafikleri (a)–(d) şekillerinde çizilmiş olan türev grafikleriyle eşleştirin.



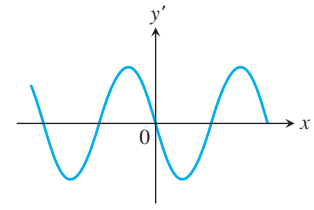
(a)



(b)

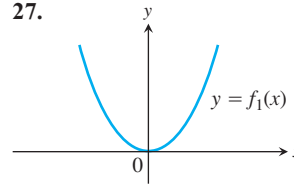


(c)

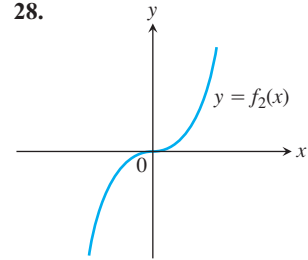


(d)

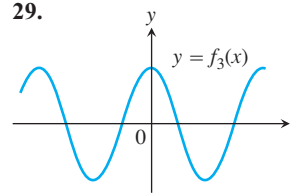
27.



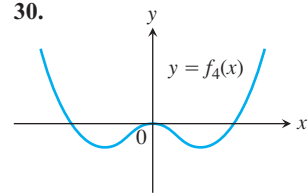
28.



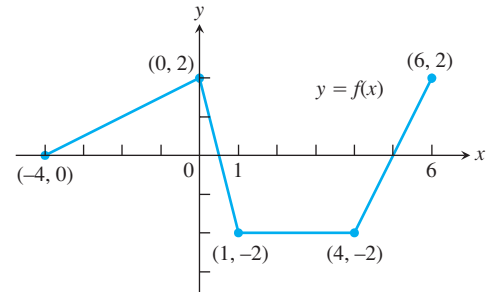
29.



30.



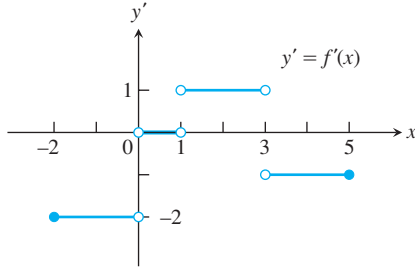
31. a. Şekildeki grafik uç uca eklenmiş doğru parçalarından oluşmaktadır. $[-4, 6]$ aralığının hangi noktalarında f' tanımlı değildir? Yanıtınızı açıklayın.



b. f 'nin türevini çizin. Grafiğin bir basamak fonksiyonu göstermesi gerekir.

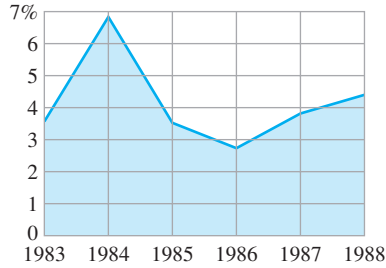
32. Bir fonksiyonu türevinden bulmak

- a. $[-2, 5]$ kapalı aralığında f fonksiyonunu çizmek için aşağıdaki bilgileri kullanın.
- i) f 'nin grafiği uç uca eklenmiş doğru parçalarından oluşmaktadır.
 - ii) Grafik $(-2, 3)$ noktasından başlamaktadır.
 - iii) f 'nin türevi şekilde verilen basamak fonksiyonudur.



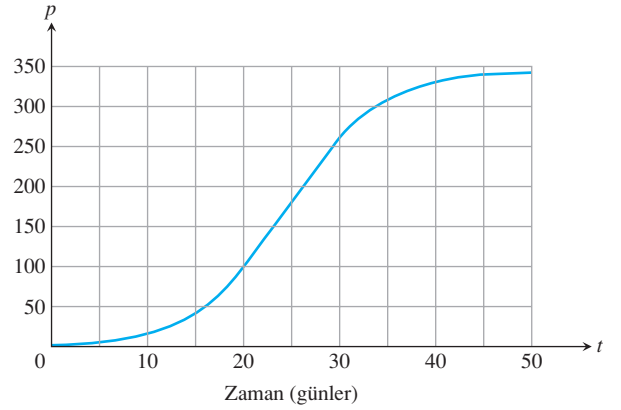
b. (a) şikkını grafiğin $(-2, 3)$ yerine $(-2, 0)$ 'da başladığını varsayarak tekrarlayın.

33. **Ekonomide büyüme** Şekildeki grafikte 1983-1988 yılları arasındaki U.S. büyük ulusal üretimin (GNP) ortalama yıllık yüzde değişimi $y = f(t)$ verilmektedir. dy/dt 'yi çizin (tanımlı olduğu yerlerde). (Kaynak: *Statistical Abstracts of the United States*, 110. baskı, U.S. Ticaret Odası, s.427)



34. **Meyve Sinekleri** (Bölüm 2.1, Örnek 3'ün Devamı) Kapalı ortamlarda üretilen topluluklar, başlangıçta az üyeleri varken yavaş bir şekilde, üyen bireyler arttıkça ve kaynaklar yeterli olduğu sürece daha hızlı, en son olarak da çevrenin kaldırma kapasitesine ulaşınca yeniden yavaş bir şekilde büyürler.

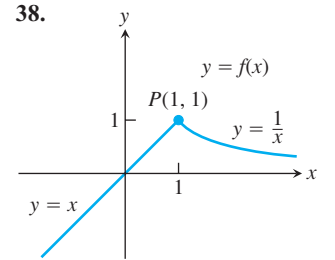
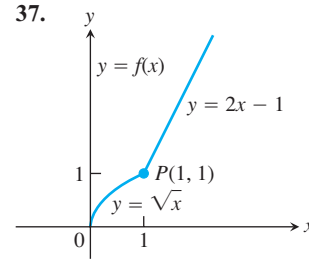
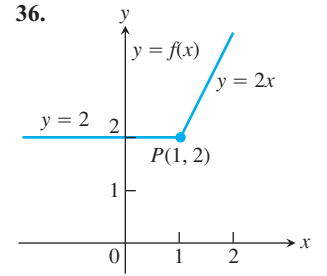
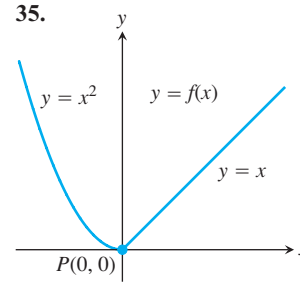
- a. Örnek 3'teki grafik yöntemi kullanarak, Bölüm 2.1'de verilen meyve sineği topluluğunun türevinin grafiğini çizin. Topluluğun grafiği burada yeniden verilmiştir.



- b. Topluluk hangi günlerde en hızlı, hangilerinde en yavaş artmaktadır?

Tek Taraflı Türevler

35–38 alıştırmalarındaki fonksiyonların P noktasında türevi olmadığını göstermek için sağdan ve soldan türevleri karşılaştırın.



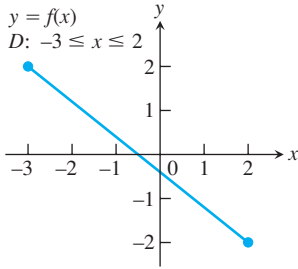
Bir Aralık Üzerinde Türevlenebilirlik ve Süreklilik

39–44 alıştırmalarındaki her şekil, bir fonksiyonun bir D kapalı aralığındaki grafiğini göstermektedir. Tanım aralığının hangi noktalarında fonksiyon

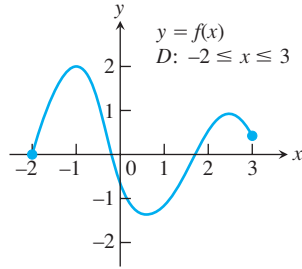
- a. türevlenebilir?
- b. süreklidir, fakat türevlenemez?
- c. ne süreklidir, ne de türevlenebilir?

Yanıtlarınızı açıklayın.

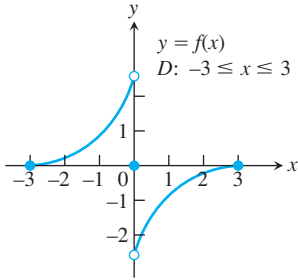
39.



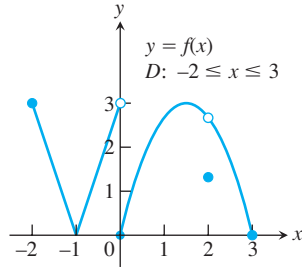
40.



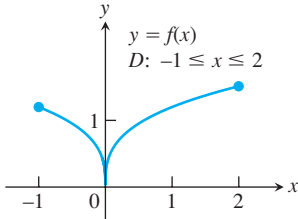
41.



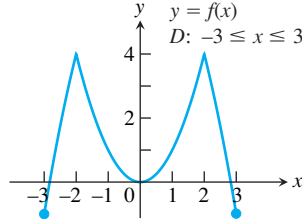
42.



43.



44.



Theori ve Örnekler

45–48 alıştırma soruları,

- a. Verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $f'(x)$ türevini bulun.
 - b. $y = f(x)$ ile $y = f'(x)$ 'i farklı koordinat eksenleri kullanarak yanyana çiz ve aşağıdaki soruları yanıtlayın.
 - c. Hangi x değerlerinde, varsa, f' pozitif? Sıfır? Negatif?
 - d. Hangi x değer aralıklarında, varsa, x -artıkça $y = f(x)$ fonksiyonu da artar, veya x -azaldıkça azalır? Bunun (c) şıkta bulduklarınızla ilişkisi nedir? (Bu ilişkiyi Bölüm 4'te daha yakından inceleyeceğiz.)
45. $y = -x^2$ 46. $y = -1/x$
47. $y = x^3/3$ 48. $y = x^4/4$
49. $y = x^3$ eğrisinin negatif bir eğimi var mıdır? Varsa, nerede bulunur? Yanıtınızı açıklayın.
50. $y = 2\sqrt{x}$ eğrisinin yatay bir teğeti var mıdır? Varsa, nerede bulunur? Yanıtınızı açıklayın.

51. **Bir Parabol Teğet** $y = 2x^2 - 13x + 5$ parabolünün eğimi -1 olan bir teğeti var mıdır? Varsa, teğet için bir denklem ve değme noktasını bulun. Yoksa, neden yoktur?
52. **$y = \sqrt{x}$ 'e Teğet** $y = \sqrt{x}$ eğrisinin herhangi bir teğeti x eksenini $x = -1$ noktasında keser mi? Kesiyorsa, teğet için bir denklem ve değme noktasını bulun. Kesmiyorsa, neden kesmez?
53. **En büyük tam sayı** $(-\infty, \infty)$ aralığında türevlenebilir herhangi bir fonksiyonun türevi $y = |x|$ (bkz. Şekil 2.55) olabilir mi? Yanıtınızı açıklayın.
54. **$y = |x|$ 'in Türevi** $f(x) = |x|$ fonksiyonunun türevinin grafiğini çizin. Sonra $y = (|x| - 0)/(x - 0) = |x|/x$ 'i çizin. Ne görüyorsunuz?
55. **$-f'$ 'nin Türevi** Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasında türevlenebilir olduğunu bilmek $-f$ fonksiyonunun $x = x_0$ 'da türevlenebilirliği hakkında bir şey söyler mi? Açıklayın.
56. **Katların Türevi** Bir $g(t)$ fonksiyonunun $t = 7$ noktasında türevlenebilir olduğunu bilmek $3g$ fonksiyonunun $t = 7$ 'de türevlenebilirliği hakkında bir şey söyler mi? Açıklayın.
57. **Bir bölümün limiti** $g(t)$ ve $h(t)$ fonksiyonlarının t 'nin bütün değerlerinde tanımlı olduklarını ve $g(0) = h(0) = 0$ olduğunu varsayın. $\lim_{t \rightarrow 0} (g(t)/h(t))$ var olabilir mi? Varsa, sıfıra eşit olmak zorunda mıdır? Açıklayın.
58. a. $f(x)$, $-1 \leq x \leq 1$ aralığında $|f(x)| \leq x^2$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. f' 'nin $x = 0$ 'da türevlenebilir olduğunu gösterin ve $f'(0)$ 'ı bulun.

b. $x = 0$ 'da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun türevlenebileceğini gösterin ve $f'(0)$ 'ı bulun.

- T** 59. $0 \leq x \leq 2$ olan bir çerçevede $y = 1/(2\sqrt{x})$ fonksiyonunu çizin. Yine aynı ekranda, $h = 1, 0.5, 0.1$ için

$$y = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

fonksiyonunu çizin. Sonra $h = -1, -0.5, -0.1$ 'i deneyin. Neler olduğunu açıklayın.

- T** 60. $-2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$ olan bir çerçevede $y = 3x^2$ fonksiyonunu çizin. Yine aynı ekranda, $h = 2, 1, 0.2$ için

$$y = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

fonksiyonunu çizin. Sonra $h = -2, -1, -0.2$ 'yi deneyin. Neler olduğunu açıklayın.

- T** 61. **Weierstrass'ın hiçbir yerde türevlenemeyen sürekli fonksiyonu** $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2/3)^n \cos(9^n \pi x)$ Weierstrass fonksiyonunun ilk sekiz teriminin toplamı şöyledir:

$$g(x) = \cos(\pi x) + (2/3)^1 \cos(9\pi x) + (2/3)^2 \cos(9^2 \pi x) + (2/3)^3 \cos(9^3 \pi x) + \cdots + (2/3)^7 \cos(9^7 \pi x).$$

Bu toplamı çizin. İyice yakınlştırın. Bu grafik ne kadar girintili çıkıntılıdır? Grafiğin baktığımız kısmının düzgün görüneceği bir çerçeve belirleyin.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

62–67 alıştırmalarındaki fonksiyonlara aşağıdaki adımları uygulamak için bir BCS kullanın.

- Fonksiyonun genel davranışını görmek için $y = f(x)$ 'i çizin.
- Herhangi bir h adım büyüklüğü için herhangi bir x noktasında q farklar oranını tanımlayın.
- $h \rightarrow 0$ için limitini alın. Bu hangi formülü verir?
- $x = x_0$ alın ve $y = f(x)$ fonksiyonu ile bu noktadaki teğetini birlikte çizin.
- (c)'de elde edilen formüle x_0 'dan büyük ve küçük değişik değerler verin. Ortaya çıkan sayılar grafiğinize bir anlam katıyor mu?

f. (c)'de bulduğunuz formülü çizin. Değerlerinin pozitif, negatif veya sıfır olmasının anlamı nedir? Bunlar (a) şıkındaki grafiğinizle uyuyor mu? Yanıtınızı açıklayın.

62. $f(x) = x^3 + x^2 - x$, $x_0 = 1$

63. $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}$, $x_0 = 1$

64. $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$, $x_0 = 2$ 65. $f(x) = \frac{x - 1}{3x^2 + 1}$, $x_0 = -1$

66. $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \pi/2$ 67. $f(x) = x^2 \cos x$, $x_0 = \pi/4$

3.2**Türev Kuralları**

Bu bölüm, fonksiyon çeşitlerinden çok büyük bir bölümünün türevlerini almamızı sağlayan birkaç kural tanıtmaktadır. Bu kuralları burada ispat etmekle, her seferinde tanımlı uygulamadan fonksiyonların türevlerini alabileceğiz.

Kuvvetler, Katlar, Toplamlar ve Farklar

Türev almanın birinci kuralı sabit her fonksiyonun türevinin sıfır olduğudur.

KURAL 1 Bir Sabit Fonksiyonun Türevi

f sabit fonksiyon $f(x) = c$ ise,

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

olur.

ÖRNEK 1

f 'nin değeri sabit ve $f(x) = 8$ ise,

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(8) = 0$$

dır. Benzer şekilde,

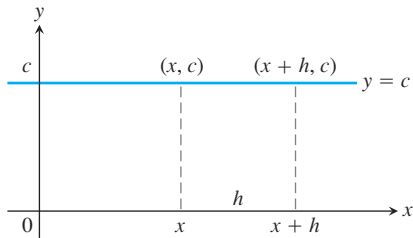
$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dx}(\sqrt{3}) = 0$$

dır.

Kural 1'in İspatı Türev tanımını, sonuçları sabit c değeri olan $f(x) = c$ fonksiyonuna uygulayalım (Şekil 3.8). Her x değerinde

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

olduğunu buluruz.



ŞEKİL 3.8 $(d/dx)(c) = 0$ kuralı sabit fonksiyonların değerlerinin asla değişmediğini ve yatay bir doğrunun eğiminin her noktada sıfır olduğunu söylemenin başka bir yoludur.

İkinci kural n pozitif bir tamsayı ise, x^n 'nin türevinin nasıl alacağını söyler.

KURAL 2 Pozitif Tamsayılar İçin Kuvvet Kuralı

n pozitif bir tamsayı ise,

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

olur.

Kuvvet kuralını uygulamak için, orijinal üs (n)'den 1 çıkarır ve sonucu n ile çarpırız.

ÖRNEK 2 Kural 2'yi Yorumlama

f	x	x^2	x^3	x^4	$\dots$
f'	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$\dots$

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Richard Courant
(1888–1972)

Kural 2'nin Birinci İspatı

$$z^n - x^n = (z - x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + zx^{n-2} + x^{n-1})$$

formülü, sağ taraf çarpılarak sağlanabilir. Böylece, türev tanımının alternatif formundan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{z^n - x^n}{z - x} \\ &= \lim_{z \rightarrow x} (z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + zx^{n-2} + x^{n-1}) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

bulunur.

Kural 2'nin İkinci İspatı $f(x) = x^n$ ise, $f(x + h) = (x + h)^n$ olur. n pozitif bir tamsayı olduğundan, Binom Teoremine göre $(x + h)^n$ yi açarak

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n \right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right] \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

buluruz.

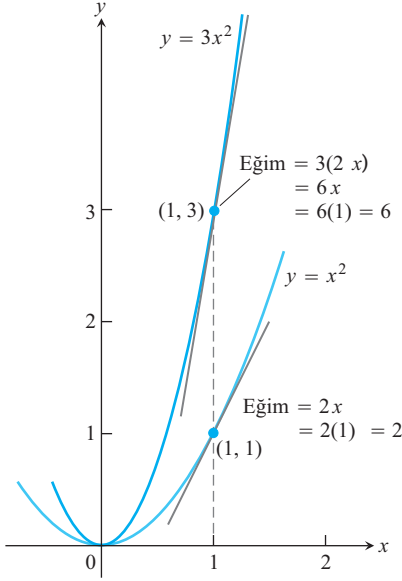
Üçüncü kural, türevlenebilir bir fonksiyon bir sabitle çarpıldığında türevinin de aynı sabitle çarpılacağını söyler.

KURAL 3 Sabitle Çarpım Kuralı

$u \cdot x$ 'in türevlenebilir bir fonksiyonu ve c bir sabit ise,

$$\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$$

olur.



ŞEKİL 3.9 $y = x^2$ ve $y = 3x^2$ grafikleri. y -koordinatlarını üçle çarparak eğimi üç katına çıkarır (Örnek 3).

Özel olarak, n pozitif bir tamsayı ise,

$$\frac{d}{dx}(cx^n) = cnx^{n-1}$$

olur.

ÖRNEK 3

(a)

$$\frac{d}{dx}(3x^2) = 3 \cdot 2x = 6x$$

türev formülü $y = x^2$ grafiğini her y koordinatını 3 ile çarparak yeniden ölçeklersek, her noktada eğimi 3 ile çarpacağımızı söyler (Şekil 3.9).

(b) **Yararlı bir özel durum**

Türevlenebilir bir fonksiyonun negatifinin türevi fonksiyonun türevinin negatiftir. Kural 3'te $c = -1$ alırsak

$$\frac{d}{dx}(-u) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot u) = -1 \cdot \frac{d}{dx}(u) = -\frac{du}{dx}$$

elde ederiz.

Kural 3'ün İspatı

$$\frac{d}{dx}cu = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cu(x+h) - cu(x)}{h}$$

$f(x) = cu(x)$ ile türev tanımı

$$= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

Limit özelliği

$$= c \frac{du}{dx}$$

u türevlenebilir

Fonksiyonları u ve v ile gösterme

Bir türev alma formülüne ihtiyaç duyduğumuzda çalıştığımız fonksiyonlar büyük olasılıkla f ve g gibi harflerle temsil edileceklerdir. Formülü uygulamak istediğimizde, aynı harfleri farklı şekilde kullanmayı istemeyiz. Bundan kaçınmak için, türev alma kurallarındaki fonksiyonları muhtemelen kullanılmayan u ve v gibi harflerle gösteririz.

Bir sonraki kural, iki türevlenebilir fonksiyonun toplamının türevinin, türevlerinin toplamı olduğunu söyler.

KURAL 4 Türev Toplama Kuralı

u ve v x 'in türevlenebilir fonksiyonları ise, toplamaları $u + v$ her ikisinin de türevlenebildiği her noktada türevlenebilirdir. Bu şekildeki noktalarda

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

olur.

ÖRNEK 4 Bir Toplamın Türevi

$$\begin{aligned}
 y &= x^4 + 12x \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(12x) \\
 &= 4x^3 + 12
 \end{aligned}$$

Kural 4'ün İspatı Türev tanımını $f(x) = u(x) + v(x)$ 'e uygularız.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}[u(x) + v(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.
 \end{aligned}$$

Toplam kuralını sabitle çarpım kuralıyla birleştirebilirsek, türevlenebilen fonksiyonların *farkının* türevinin, türevlerinin farkı olduğunu söyleyen **fark kuralını** elde ederiz:

$$\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{d}{dx}[u + (-1)v] = \frac{du}{dx} + (-1)\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

Toplam kuralı ayrıca, toplamda sonlu sayıda fonksiyon bulunması şartıyla, iki fonksiyondan fazla fonksiyonun toplamı için de geçerlidir. $u_1, u_2, \dots, u_n$ x 'te türevlenebiliyorsa, $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ de türevlenebilirdir ve şu sonucu buluruz:

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{du_n}{dx}.$$

ÖRNEK 5 Bir Polinomun Türevi

$$\begin{aligned}
 y &= x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1 \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(1) \\
 &= 3x^2 + \frac{4}{3} \cdot 2x - 5 + 0 \\
 &= 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5
 \end{aligned}$$

Örnek 5'deki polinomun türevini aldığımız gibi, herhangi bir polinomun türevini terim terim alabileceğimize dikkat edin.

İkiden Fazla Fonksiyonun Toplamı İçin Toplam Kuralının İspatı

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{du_n}{dx}$$

ifadesini matematiksel induksiyonla ispatlayacağız (Bkz. Ek 1). İfade, demin ispatlandığı gibi, $n = 2$ için doğrudur. Bu induksiyonla ispatın ilk adımıdır.

Adım 2, ifadenin herhangi bir pozitif $n = k$, $k \geq n_0 = 2$ sayısı için doğruysa, $n = k + 1$ için de doğru olacağını göstermektir. Bu yüzden,

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_k}{dx} \quad (1)$$

olduğunu varsayın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k + u_{k+1}) \\ & \quad \text{Bu toplamla tanımlanan fonksiyona } u \text{ deyin.} \quad \text{Bu fonksiyona } v \text{ deyin.} \\ &= \frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) + \frac{du_{k+1}}{dx} \quad \frac{d}{dx}(u + v) \text{ için Kural 4} \\ &= \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_k}{dx} + \frac{du_{k+1}}{dx} \quad (1) \text{ denklemi} \end{aligned}$$

olur.

Bu adımların tamamlanmasıyla, matematiksel induksiyon prensibi toplam kuralını her $n \geq 2$ tamsayısı için doğrulamıştır. ■

ÖRNEK 6 Yatay Teğetleri Bulma

$y = x^4 - 2x^2 + 2$ eğrisinin yatay teğeti var mıdır? Varsa, nerededir?

Çözüm Varsa, yatay teğetler dy/dx eğiminin sıfır olduğu noktalarda bulunur. Şu halde,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x$$

dir.

Şimdi, x 'i için $\frac{dy}{dx} = 0$ denklemini çözün.

$$4x^3 - 4x = 0$$

$$4x(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0, 1, -1$$

$y = x^4 - 2x^2 + 2$ eğrisinin $x = 0, 1$ ve -1 'de yatay teğetleri vardır. Eğri üzerinde bunlara karşılık gelen noktalar $(0, 2)$, $(1, 1)$ ve $(-1, 1)$ noktalarıdır. Şekil 3.10'a bakın. ■

Çarpma ve Bölmeler

İki fonksiyonun toplamının türevi türevlerinin toplamına eşitken, iki fonksiyonun çarpımının türevi türevlerinin çarpımına eşit değildir. Örneğin,

$$\frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(x) = 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{iken} \quad \frac{d}{dx}(x \cdot x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

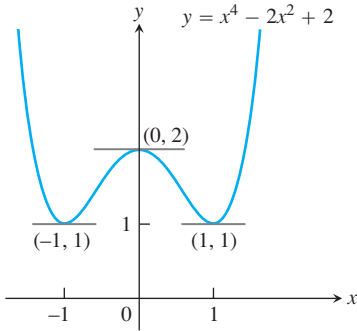
bulunur. İki fonksiyonun çarpımının türevi şimdi açıklayacağımız gibi iki çarpımın toplamına eşittir.

KURAL 5 ÇARPIM KURALI

u ve v x 'te türevlenebilirlerse, çarpımları uv de türevlenebilir ve

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

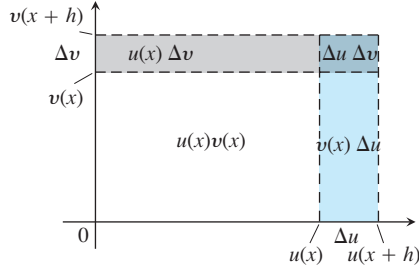
olur.



ŞEKİL 3.10 $y = x^4 - 2x^2 + 2$ eğrisi ve yatay teğetleri (Örnek 6).

Çarpım Kuralının Gösterimi

$u(x)$ ve $v(x)$ pozitif ve x artarken artıyorlarsa ve $h > 0$ ise,



resimdeki toplam renkli alan

$$\begin{aligned} u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) \\ = u(x+h)\Delta v + v(x+h)\Delta u - \Delta u\Delta v \end{aligned}$$

dir. Bu denklemin iki tarafını da h ile bölersek,

$$\begin{aligned} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\ = u(x+h)\frac{\Delta v}{h} + v(x+h)\frac{\Delta u}{h} - \Delta u\frac{\Delta v}{h} \end{aligned}$$

buluruz.

$h \rightarrow 0^+$, iken

$$\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{h} \rightarrow 0 \cdot \frac{dv}{dx} = 0$$

elde ederiz ve böylece geriye

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

kalır.

uv çarpımının türevi u kere v 'nin türevi artı v kere u 'nun türevidir. Üslü gösterimle, $(uv)' = uv' + vu'$ yazılır. Fonksiyon notasyonu ile

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

yazılabilir.

ÖRNEK 7 Çarpım Kuralını Kullanma

$$y = \frac{1}{x} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right)$$

fonksiyonunun türevini bulun.

Çözüm $u = 1/x$ ve $v = x^2 + (1/x)$ ile çarpım kuralını uygulayalım:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \right] &= \frac{1}{x} \left(2x - \frac{1}{x^2} \right) + \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{x^3} - 1 - \frac{1}{x^3} \\ &= 1 - \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(uv) &= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \text{ ve} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) &= -\frac{1}{x^2} \text{ by} \\ &\text{Bölüm 2.7, Örnek 3} \end{aligned}$$

Kural 5'in İspatı

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

Bu kesri u ve v 'nin türevlerinin farklar oranını içeren bir hale dönüştürmek için kesrin üst tarafına $u(x+h)v(x)$ ekler ve çıkarırız:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[u(x+h) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} u(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \end{aligned}$$

h sıfıra yaklaşırken, $u(x+h)$ $u(x)$ 'e yaklaşır, çünkü u , x 'te türevlenebildiği için, x 'te sürekli. İki kesir de dv/dx ve du/dx 'in x 'teki değerlerine yaklaşır. Kısacası,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

bulunur.

Aşağıdaki örnekte, elimizde sadece sayısal değerler vardır.

ÖRNEK 8 Sayısal Değerlerden Türev

$y = uv$, u ve v fonksiyonlarının çarpımı olsun.

$$u(2) = 3, \quad u'(2) = -4, \quad v(2) = 1 \quad \text{ve} \quad v'(2) = 2$$

ise, $y'(2)$ 'yi bulun.

Çözüm

$$y' = (uv)' = uv' + vu'$$

şeklinde yazılmış olan çarpım kuralından

$$\begin{aligned} y'(2) &= u(2)v'(2) + v(2)u'(2) \\ &= (3)(2) + (1)(-4) = 6 - 4 = 2 \end{aligned}$$

buluruz. ■

ÖRNEK 9 Bir Çarpımın Türevini İki Yolla Bulma

$y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$ fonksiyonunun türevini bulun.

Çözüm

(a) Çarpım kuralında, $u = x^2 + 1$ ve $v = x^3 + 3$, alırsak,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [(x^2 + 1)(x^3 + 3)] &= (x^2 + 1)(3x^2) + (x^3 + 3)(2x) \\ &= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 6x \\ &= 5x^4 + 3x^2 + 6x. \end{aligned}$$

(b) Bu özel çarpımın türevi ayrıca, y 'nin orijinal ifadesindeki çarpımları yapıp ortaya çıkan polinomun türevini almakla da bulunabilir (belki daha da iyi olur):

$$\begin{aligned} y &= (x^2 + 1)(x^3 + 3) = x^5 + x^3 + 3x^2 + 3 \\ \frac{dy}{dx} &= 5x^4 + 3x^2 + 6x. \end{aligned}$$

Bu ilk sonucumuzla uyumludur. ■

İki türevlenebilir fonksiyonun çarpımının türevi türevlerinin çarpımları olmadığı gibi, iki fonksiyonun bölümünün türevi de türevlerinin bölümü değildir. Bunun yerine olan şey şudur:

KURAL 6 Bölüm Kuralı

u ve v x 'te türevlenebilir ve $v(x) \neq 0$ ise, u/v bölümü x 'te türevlenebilir ve sonuç

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

olur.

Fonksiyon notasyonu ile:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

ÖRNEK 10 Fark Kuralını Kullanma

$$y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

fonksiyonunun türevini bulun.

Çözüm

$u = t^2 - 1$ ve $v = t^2 + 1$ alarak bölüm kuralını uyguluyoruz:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{(t^2 + 1) \cdot 2t - (t^2 - 1) \cdot 2t}{(t^2 + 1)^2} & \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{v} \right) &= \frac{v(du/dt) - u(dv/dt)}{v^2} \\ &= \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Kural 6'nın İspatı

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)} \end{aligned}$$

Son kesri u ve v 'nin türevlerinin farkları oranını içeren bir kesre çevirmek için, kesrin üst tarafına $v(x)u(x)$ ekler ve çıkartırız. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x)u(x+h) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)} \end{aligned}$$

buluruz. Bölünen ve bölenin limitini alarak, bölüm kuralını elde ederiz. ■

 x 'in Negatif Tamsayılar Kuvvetleri

Negatif tamsayılar için kuvvet kuralı pozitif tamsayılarınkıyla aynıdır.

KURAL 7 Negatif Tamsayılar İçin Kuvvet Kuralı

n negatif tam bir tamsayı ise ve $x \neq 0$ ise

$$\frac{d}{dx} (x^n) = nx^{n-1}$$

olur.

ÖRNEK 11

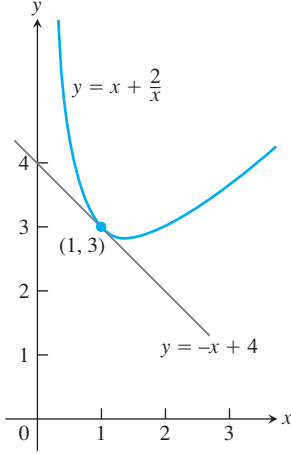
$$(a) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{d}{dx} (x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Bölüm 2.7, Örnek 3 ile uyuyor

$$(b) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{4}{x^3} \right) = 4 \frac{d}{dx} (x^{-3}) = 4(-3)x^{-4} = -\frac{12}{x^4}$$

Kural 7'nin İspatı İspat bölüm kuralını kullanır. n negatif bir tamsayı ise, m pozitif bir tamsayı olmak üzere $n = -m$ olur. Yani, $x^n = x^{-m} = 1/x^m$ olur ve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^n) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) \\ &= \frac{x^m \cdot \frac{d}{dx}(1) - 1 \cdot \frac{d}{dx}(x^m)}{(x^m)^2} && u = 1 \text{ ve } v = x^m \text{ ile bölüm kuralı} \\ &= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} && m > 0 \text{ olduğundan,} \\ &= -mx^{-m-1} && \frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1} \\ &= nx^{n-1}. && -m = n \text{ olduğu için}\end{aligned}$$



ŞEKİL 3.11 Örnek 12'deki $y = x + (2/x)$ eğrisinin $(1,3)$ 'teki teğeti. Eğrinin üçüncü dörtte bir bölgede burada görülmeyen bir parçası vardır. Bunun gibi fonksiyonların grafiklerini çizmeyi Bölüm 4'te göreceğiz.

ÖRNEK 12 Bir Eğriye Teğet

$$y = x + \frac{2}{x}$$

eğrisinin $(1, 3)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulun (Şekil 3.11).

Çözüm Eğrinin eğimi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) + 2 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{2}{x^2}.$$

olur. $x = 1$ 'deki eğim ise

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left[1 - \frac{2}{x^2}\right]_{x=1} = 1 - 2 = -1.$$

olarak bulunur. $(1, 3)$ noktasından -1 eğimi ile geçen doğru

$$\begin{aligned}y - 3 &= (-1)(x - 1) && \text{Nokta-eğim denklemi} \\ y &= -x + 1 + 3 \\ y &= -x + 4.\end{aligned}$$

doğrusudur.

Bir türev alma problemini çözerken hangi kuralların seçileceği ne kadar iş yapmanız gerektiğine bağlıdır. Aşağıda bir örnek verilmektedir.

ÖRNEK 13 Hangi Kuralın Kullanılacağını Seçme

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4},$$

fonksiyonunun türevini almak için bölüm kuralını kullanmak yerine kesrin üst tarafını açın ve x^4 ile bölün:

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^4} = x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}.$$

Şimdi de toplam ve kuvvet kurallarını kullanın:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}.\end{aligned}$$

İkinci ve Daha Yüksek Mertebe Türevler

$y = f(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon ise $f'(x)$ türevi de bir fonksiyondur. f' 'de türevlenebilirse, x 'in yeni bir fonksiyonunu, f'' 'yi elde etmek için f' 'nin türevini alabiliriz. Böylece $f'' = (f')'$ olur. f'' fonksiyonuna f 'nin **ikinci türevi** denir. Notasyonla

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy'}{dx} = y'' = D^2(f)(x) = D_x^2 f(x).$$

D^2 sembolü, türev alma işleminin iki defa uygulandığı anlamındadır.

$y = x^6$ ise, $y' = 6x^5$ 'dir ve

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx} (6x^5) = 30x^4$$

olur. Böylece, $D^2(x^6) = 30x^4$ dir.

y'' türevlenebilirse, türevi $y''' = dy''/dx = d^3y/dx^3$, y' 'nin x 'e göre **üçüncü türevi**dir. Verilen isimler, tahmin edebileceğiniz gibi, herhangi bir pozitif n sayısı için,

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx} y^{(n-1)} = \frac{d^n y}{dx^n} = D^n y$$

y 'nin x 'e göre **n .inci türevi** olacak şekilde devam eder.

İkinci Türevi, $y = f(x)$ 'in grafiğinin her noktasındaki teğetin eğiminin değişim oranı olarak yorumlayabiliriz. Bir sonraki bölümde ikinci türev bize şunu gösterecektir: değme noktası hareket ettirilirken, eğri teğetten yukarıya doğru mu yoksa aşağıya doğru mu eğilmektedir. Bir sonraki alt bölümde ikinci ve üçüncü türevleri, bir doğru üzerinde hareket bakımından yorumlayacağız

Türev Sembolleri Nasıl Okunur

y'	“ y üssü”
y''	“ y iki üssü”
$\frac{d^2y}{dx^2}$	“ d kare y bölü dx kare”
y'''	“ y üç üssü”
$y^{(n)}$	“ y üssü n ”
$\frac{d^n y}{dx^n}$	“ d üssü n y bölü dx üssü n ”
D^n	“ D üssü n ”

ÖRNEK 14 Yüksek Mertebe Türevleri Bulma

$y = x^3 - 3x^2 + 2$ 'nin ilk dört türevi:

$$\text{Birinci türev: } y' = 3x^2 - 6x$$

$$\text{İkinci türev: } y'' = 6x - 6$$

$$\text{Üçüncü türev: } y''' = 6$$

$$\text{Dördüncü türev: } y^{(4)} = 0$$

Fonksiyonun, beşinci ve daha yüksek türevleri sıfır olmak üzere, her mertebeden türevi vardır.

ALİŞTIRMALAR 3.2

Türev Hesaplamaları

1–12 alıştırmalarında, birinci ve ikinci türevleri bulun.

1. $y = -x^2 + 3$
2. $y = x^2 + x + 8$
3. $s = 5t^3 - 3t^5$
4. $w = 3z^7 - 7z^3 + 21z^2$
5. $y = \frac{4x^3}{3} - x$
6. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}$
7. $w = 3z^{-2} - \frac{1}{z}$
8. $s = -2t^{-1} + \frac{4}{t^2}$
9. $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$
10. $y = 4 - 2x - x^{-3}$
11. $r = \frac{1}{3s^2} - \frac{5}{2s}$
12. $r = \frac{12}{\theta} - \frac{4}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^4}$

13–16 alıştırmalarında, y' türevini (a) çarpım kuralını uygulayarak, (b) türevinin alınması daha kolay terimler elde etmek için çarpanları açarak bulun.

13. $y = (3 - x^2)(x^3 - x + 1)$
14. $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$
15. $y = (x^2 + 1)\left(x + 5 + \frac{1}{x}\right)$
16. $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x} + 1\right)$

17–28 alıştırmalarındaki fonksiyonların türevlerini bulun.

17. $y = \frac{2x + 5}{3x - 2}$
18. $z = \frac{2x + 1}{x^2 - 1}$
19. $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 0.5}$
20. $f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + t - 2}$
21. $v = (1 - t)(1 + t^2)^{-1}$
22. $w = (2x - 7)^{-1}(x + 5)$
23. $f(s) = \frac{\sqrt{s} - 1}{\sqrt{s} + 1}$
24. $u = \frac{5x + 1}{2\sqrt{x}}$
25. $v = \frac{1 + x - 4\sqrt{x}}{x}$
26. $r = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$
27. $y = \frac{1}{(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)}$
28. $y = \frac{(x + 1)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)}$

29 ve 30 alıştırmalarındaki fonksiyonların her mertebelerden türevlerini bulun.

29. $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$
30. $y = \frac{x^5}{120}$

31–38 alıştırmalarındaki fonksiyonların birinci ve ikinci türevlerini bulun.

31. $y = \frac{x^3 + 7}{x}$
32. $s = \frac{t^2 + 5t - 1}{t^2}$
33. $r = \frac{(\theta - 1)(\theta^2 + \theta + 1)}{\theta^3}$
34. $u = \frac{(x^2 + x)(x^2 - x + 1)}{x^4}$
35. $w = \left(\frac{1 + 3z}{3z}\right)(3 - z)$
36. $w = (z + 1)(z - 1)(z^2 + 1)$

$$37. p = \left(\frac{q^2 + 3}{12q}\right)\left(\frac{q^4 - 1}{q^3}\right) \quad 38. p = \frac{q^2 + 3}{(q - 1)^3 + (q + 1)^3}$$

Sayısal Değerleri Kullanma

39. u ve v 'nin x 'in $x = 0$ 'da türevlenebilir fonksiyonları olduğunu ve

$$u(0) = 5, \quad u'(0) = -3, \quad v(0) = -1, \quad v'(0) = 2$$

olduğunu varsayın. Aşağıdaki türevlerin $x = 0$ 'daki değerlerini bulun.

$$\text{a. } \frac{d}{dx}(uv) \quad \text{b. } \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) \quad \text{c. } \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right) \quad \text{d. } \frac{d}{dx}(7v - 2u)$$

40. u ve v 'nin x 'in türevlenebilir fonksiyonları olduğunu ve

$$u(1) = 2, \quad u'(1) = 0, \quad v(1) = 5, \quad v'(1) = -1$$

olduğunu varsayın. Aşağıdaki türevlerin $x = 1$ 'deki değerlerini bulun.

$$\text{a. } \frac{d}{dx}(uv) \quad \text{b. } \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) \quad \text{c. } \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right) \quad \text{d. } \frac{d}{dx}(7v - 2u)$$

Eğimler ve Teğetler

41. a. **Bir eğriye normal** $y = x^3 - 4x + 1$ eğrisinin $(2, 1)$ noktasındaki teğetine dik doğrunun denklemini bulun.

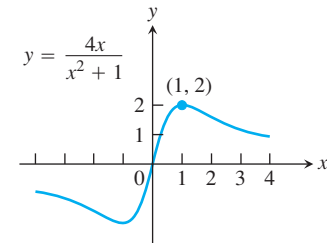
b. **En küçük eğim** Bu eğrinin en düşük eğimi nedir? Bu eğim hangi noktadadır?

c. **İstenilen eğimde teğet** Eğrinin eğiminin 8 olduğu noktalarda bulunan teğetlerin denklemlerini bulun.

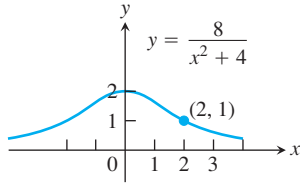
42. a. **Yatay teğetler** $y = x^3 - 3x - 2$ eğrisinin yatay teğetlerinin denklemini bulun. Bu teğetlere teğet noktasında dik olan doğruların denklemlerini de yazın.

b. **En küçük eğim** Bu eğri üzerindeki en düşük eğim nedir? Eğri üzerindeki hangi noktada bu eğim vardır? Bu noktadaki teğete dik olan doğrunun denklemini yazın.

43. (Aşağıda çizilmiş olan) *Newton'un Yılanı*'nın orijindeki ve $(1, 2)$ noktasındaki teğetlerini bulun.



44. (Aşağıda çizilmiş olan) *Agnesi'nin Cadısı*'nın (2, 1) noktasındaki teğetini bulun.



45. **Birim fonksiyona kuadratik bir teğet** $y = ax^2 + bx + c$ eğrisi (1, 2) noktasından geçer ve $y = x$ doğrusuna orijinde teğettir. a , b ve c 'yi bulun.
46. **Ortak teğeti bulunan kuadratikler** $y = x^2 + ax + b$ ve $y = cx - x^2$ eğrilerinin (1, 0) noktasında ortak bir teğetleri vardır. a , b ve c 'yi bulun.
47. a. $y = x^3 - x$ eğrisine $(-1, 0)$ noktasında teğet olan eğrinin denklemini bulun.
- T** b. Eğriyi ve teğetini birlikte çizin. Teğet eğriyi başka bir noktada da kesmektedir. Bu noktanın koordinatlarını bulun
- T** c. İkinci kesişim noktası için bulduğunuz koordinatları eğri ve teğet denklemlerini birlikte çözerek kontrol edin (SOLVER tuşu).
48. a. $y = x^3 - 6x^2 + 5x$ eğrisine orijinde teğet olan eğrinin denklemini bulun.
- T** b. Eğriyi ve teğetini birlikte çizin. Teğet eğriyi başka bir noktada da kesmektedir. Bu noktanın koordinatlarını bulun.
- T** c. İkinci kesişim noktası için bulduğunuz koordinatları eğri ve teğet denklemlerini birlikte çözerek kontrol edin (SOLVER tuşu).

Teori ve Örnekler

49. n . dereceden genel bir polinom $a_n \neq 0$ olmak üzere

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

şeklindedir. $P'(x)$ 'i bulun.

50. **Vücudun ilaca tepkisi** Vücudun bir ilaç dozuna tepkisi bazen

$$R = M^2 \left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3} \right)$$

şeklinde bir denklemle tanımlanabilir. Burada C pozitif bir sabit ve M de kanda bulunan ilaç miktarıdır. Tepki kan basıncında bir değişimse, R milimetre civa olarak ölçülür. Tepki ateşte bir değişiklikse, R derece olarak ölçülür, ...

dR/dM 'yi bulun. M 'nin bir fonksiyonu olan bu türeve vücudun ilaca duyarlılığı denilir. Bölüm 4.5'te vücudun en duyarlı olduğu ilaç miktarının nasıl bulunduğunu göreceğiz.

51. Çarpım kuralındaki v fonksiyonunun sabit bir c değeri olduğunu varsayalım. Bu durumda çarpım kuralı ne verir? Bunun sabitle çarpım kuralıyla ilişkisi nedir?

52. Çarpmaya göre ters kuralı

- a. Çarpmaya göre *ters kuralı* $v(x)$ fonksiyonunun türevlenebildiği ve sıfırdan farklı olduğu bir noktada

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{v} \right) = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dx}$$

olduğunu söyler. Çarpmaya göre ters kuralının bölme kuralının özel bir hali olduğunu gösterin.

- b. Çarpmaya göre ters kuralı ile çarpma kuralının birlikte bölme kuralını verdiğini gösterin.

53. **Çarpım kuralının genelleştirilmesi** Çarpım kuralı x 'in iki türevlenebilir fonksiyonunun uv çarpımının türevinin

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

olduğunu söyler.

- a. x 'in türevlenebilir üç fonksiyonunun uvw çarpımının türevinin formülü nedir?
- b. x 'in türevlenebilir dört fonksiyonunun $u_1 u_2 u_3 u_4$ çarpımının formülü nedir?
- c. x 'in türevlenebilir sonlu n tane fonksiyonunun $u_1 u_2 u_3 \dots u_n$ çarpımının formülü nedir?

54. Rasyonel kuvvetler

- a. $x^{3/2}$ 'yi $x \cdot x^{1/2}$ şeklinde yazarak ve çarpım kuralını kullanarak

$$\frac{d}{dx} (x^{3/2})$$
 'yi hesaplayın.

Kural. Cevabınızı x 'in bir rasyonel kuvvetinin bir rasyonel katı olarak ifade ediniz. (b) ve (c)'yi de benzer yöntemle çözün.

- b. $\frac{d}{dx} (x^{5/2})$ 'yi bulun.

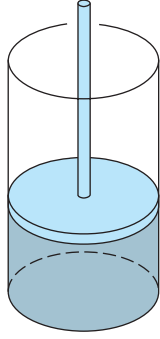
- c. $\frac{d}{dx} (x^{7/2})$ 'yi bulun.

- d. (a), (b) ve (c)'deki cevaplarınızda ne gibi bir yapı görüyorsunuz? Rasyonel kuvvetler Bölüm 3.6'nın konularından biridir.

55. **Silindir Basıncı** Bir silindir içindeki gaz sabit bir T sıcaklığında tutuluyorsa, P basıncı V hacmine

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

şeklinde bir formülle bağlıdır. Burada, a , b , n ve R birer sabittir. dP/dV 'yi bulun. (Şekle bakınız)



56. Sipariş için en iyi miktar Envanter yönetiminin formüllerinden biri malların ortalama haftalık siparişinin, ödemesinin ve depolanmasının maliyetinin

$$A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$$

olduğunu söyler. Burada q elinizdekiler azaldığında ısmarladığınız şeylerin (ayakkabılar, radyolar, süpürgeler, veya her ne olursa) miktarı, k bir sipariş vermenin maliyeti (aynısı, her ne kadar sıklıkta sipariş verirsiniz verin), c bir malın maliyeti (bir sabit), m her hafta satılan mal sayısı (bir sabit) ve h de mal başına haftalık depolama maliyetidir (yer, sigorta, imkanlar ve güvenlik gibi şeyleri de içeren bir sabit). dA/dq ve d^2A/dq^2 'yi bulun.

3.3

Bir Değişim Oranı Olarak Türev

Bölüm 2.1 de ortalama ve anlık değişim oranlarının incelemesine başladık. Bu bölümde, türevlerin, çevremizdeki dünyada değişen bazı şeylerin oranlarını modellemede kullanıldığı uygulamaları araştırmaya devam ediyoruz. Bir doğru boyunca hareketin incelenmesini tekrar hatırlayıp başka uygulamalar inceleyeceğiz.

Değişimi, zamana göre değişim olarak düşünmek doğaldır, ancak başka değişkenler de aynı şekilde incelenebilir. Örneğin, bir doktor bir ilacın miktarındaki değişikliklerin vücudun ilaca tepkisini nasıl etkilediğini bilmek isteyebilir. Bir ekonomist, çelik üretim maliyetinin, üretilen miktar ton sayısına bağlı olarak nasıl değiştiğini araştırmak isteyebilir.

Anlık Değişim Oranları

$(f(x+h) - f(x))/h$ fark bölümünü, f 'nin x 'ten $x+h$ 'ye kadar olan aralık üzerindeki ortalama değişim oranı olarak yorumlarsak, bu bölümün $h \rightarrow 0$ iken limitini, f 'nin x 'teki değişim oranı olarak yorumlayabiliriz.

TANIM Anlık Değişim Oranı

f 'nin x_0 'da x 'e göre anlık değişim oranı

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

türevidir (limitin var olması koşuluyla).

Böylece, anlık oranlar ortalama oranların limitleridir.

x zamanı temsil etmese bile anlık kelimesini kullanmak alışkanlık halini almıştır. Ancak bu kelime genellikle ihmal edilir. *Değişim oranı* derken, *anlık değişim oranını* kastedeceğiz.

ÖRNEK 1 Bir Çemberin Alanı Çapa Bağlı Olarak Nasıl Değişir

Bir çemberin alanı A , çapa şu formülle bağlıdır:

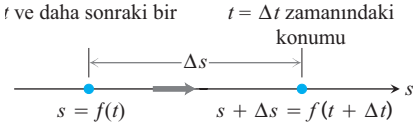
$$A = \frac{\pi}{4} D^2.$$

Çap 10 m olduğunda, alan çapa göre ne hızla değişir?

Çözüm Çapa bağlı olarak alanın (anlık) değişim oranı

$$\frac{dA}{dD} = \frac{\pi}{4} \cdot 2D = \frac{\pi D}{2}$$

dir. $D = 10$ m olduğunda, alan $(\pi/2)10 = 5\pi$ m²/m hızıyla değişmektedir. ■



ŞEKİL 3.12 Bir koordinat doğrusunda hareket eden bir cismin bir t ve daha sonraki bir $t + \Delta t$ zamanındaki konumu.

Bir Doğru Üzerinde Hareket - Yer Değiştirme, Hız, Sürat, İvme ve Çekme

Bir cismin bir koordinat doğrusu (mesela bir s -ekseni) boyunca hareket ettiğini ve bu doğru üzerindeki konumunu, s , zamanın, t , bir fonksiyonu olarak bildiğimizi varsayalım:

$$s = f(t)$$

Cismin t ile $t + \Delta t$ arasındaki zaman aralığında **yer değiştirmesi** (Şekil 3.12)

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

ve cismin bu zaman aralığındaki **ortalama hızı**

$$v_{av} = \frac{\text{yer değiştirme}}{\text{gidiş zamanı}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

dir.

Cismin tam t anındaki hızını bulmak için, t 'den $t + \Delta t$ 'ye olan aralık üzerindeki ortalama hızın, Δt sıfıra giderken limitini alırlar. Bu limit f 'nin t 'ye göre türevidir.

TANIM Hız

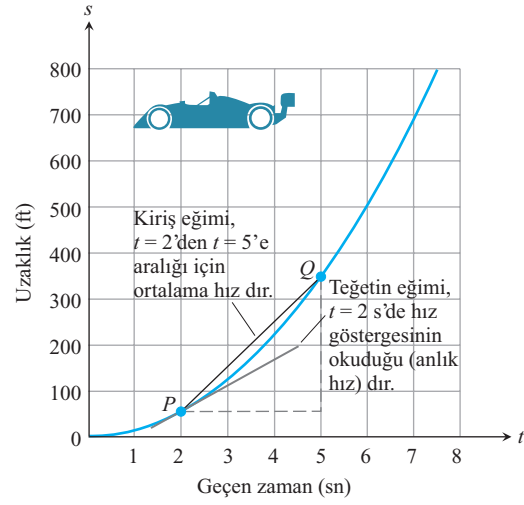
Hız (Anlık hız) konumun zamana göre türevidir. Bir cismin t anındaki konumu $s = f(t)$ ise, cismin t anındaki hızı

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

ÖRNEK 2 Bir Yarış Otomobilinin Hızını Bulmak

Şekil 3.13'te bir 1996 model Riley&Scott Mk III – Olds WSC yarış otomobilinin konum-zaman grafiği görülmektedir. PQ kirişinin eğimi $t = 2$ ile $t = 5$ sn arasındaki 3 sn'lik aralıktaki ortalama hızıdır, yani burada 100 ft/sn veya 68 mil/sa.

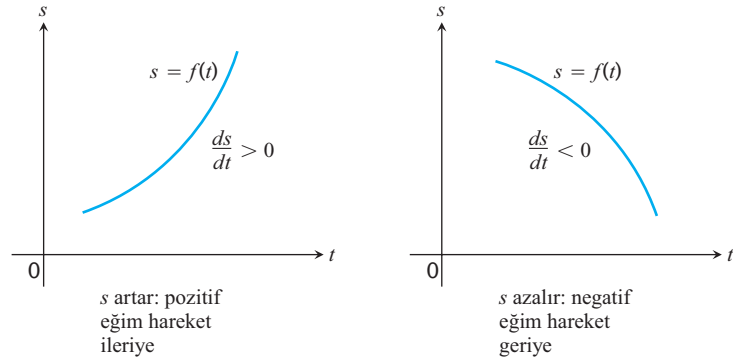
P 'deki teğetin eğimi ise $t = 2$ sn'de hız göstergesinin okuduğu değer, yani 57 ft/sn veya 39 mil/sa'tir. Gösterilen periyotta, her saniye süresince ivme yaklaşık olarak sabit ve



ŞEKİL 3.13 Örnek 2 için zaman-konum grafiği.
P'deki teğet eğimi $t = 2$ sn.'deki anlık hızdır.

28.5 ft/sn'dir, bu da, g yerçekimi ivmesi olmak üzere yaklaşık 0.89g dir. Yarış otomobilinin en yüksek hızı tahminen 190 mil/sa'tır. (Kaynak: *Road and Track*, Mart 1997). ■

Bir cismin hızı, cismin ne kadar hızlı hareket ettiğini göstermesinin yanı sıra hareketin yönünü de göstermektedir. Cisim ileriye doğru hareket ederken (s artar), hız pozitiftir; cisim geriye doğru hareket ederken (s azalır), hız negatiftir (Şekil 3.14)



ŞEKİL 3.14 Bir doğru boyunca $s = f(t)$ hareketi için $v = ds/dt$, s artarken pozitif, s azalırken negatiftir.

Bir arkadaşın evine gidip dönerken 30 mil/sa ile gidiyorsak, hız göstergesi giderken 30 mil/sa gösterirken, dönerken, evden uzaklığımız azaldığı halde, -30 mil/sa göstermeyecektir. Hız göstergesi her zaman hızın mutlak değeri olan sürati gösterir. Sürat yönden bağımsız olarak ileri gitme oranını ölçer.

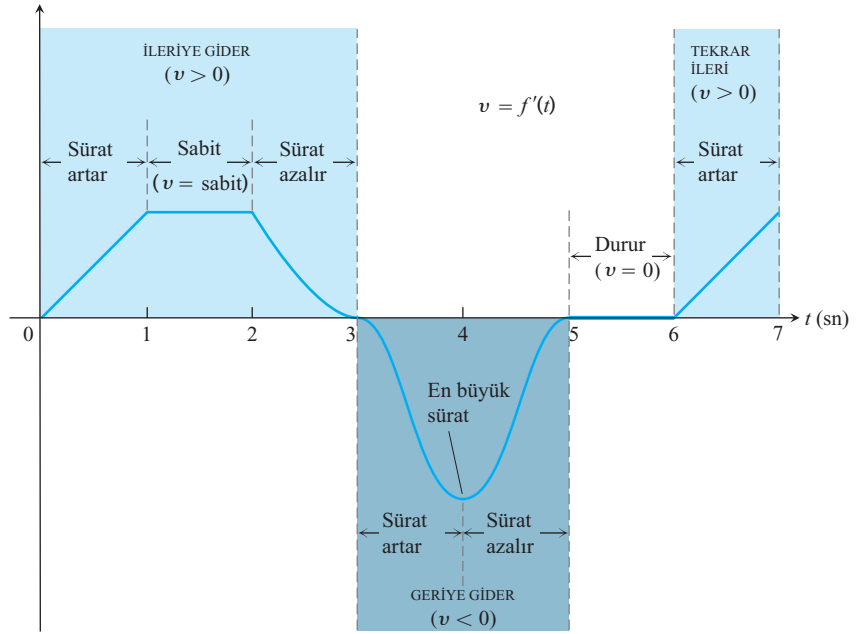
TANIM Sürat

Sürat hızın mutlak değeridir.

$$\text{Sürat} = |v(t)| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

ÖRNEK 3 Yatay Hareket

Şekil 3.15'te, bir koordinat doğrusu boyunca ilerleyen bir parçacığın hızı $v = f'(t)$ görülmektedir. Parçacık ilk 3 saniye boyunca ileri doğru, sonraki 2 saniye boyunca geri doğru hareket etmekte, bir saniye durmakta ve yine ileri doğru hareket etmektedir. Parçacık en yüksek sürata $t = 4$ anında, geriye doğru giderken ulaşır. ■



ŞEKİL 3.15 Örnek 3 için hız grafiği.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Bernard Bolzano
(1781–1848)

Bir cismin hızının değişim oranına *cismin ivmesi* denir. İvme, bir cismin ne kadar çabuk sürat kazandığını veya kaybettiğini ölçer.

İvmedeki ani bir değişime çekme denir. Bir otomobil veya bir otobüsteki yolculuk sarsıntılı olduğunda bu, ilgili ivmelerin mutlaka büyük olmasından değil ivmedeki değişimlerin ani olmasındadır.

TANIMLAR İvme, Silkinme

İvme hızın zamana göre türevidir. Bir cismin t anındaki konumu $s = f(t)$ ise, cismin t anındaki ivmesi şu şekildedir:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Silkinme ivmenin zamana göre türevidir:

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

Dünya yüzeyine yakın yerlerde bütün cisimler aynı sabit ivmeyle düşerler. Galileo'nun serbest düşme ile ilgili deneyi (Bölüm 2.1, Örnek 1), s mesafe ve g de dünyanın yerçekiminden doğan ivme olmak üzere, bizi

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

denklemine götürür. Bu denklem hava tepkisinin bulunmadığı vakumda geçerlidir, ancak kaya veya çelik aletler gibi yoğun, ağır cisimlerin, havanın tepkisinin onları yavaşlatmaya başlamadığı düşüşünün ilk birkaç saniyesini de çok iyi modeller.

$s = (1/2)gt^2$ denklemindeki g 'nin değeri t ve s 'yi ölçmekte kullanılan birimlere bağlıdır. t saniye (standart birim) iken, deniz seviyesindeki ölçümle tanımlanan g 'nin değeri, İngiliz birimiyle yaklaşık olarak $32/\text{sn}^2$ (fit bölü saniye kare) ve metrik birimle $g = 9.8 \text{ m}/\text{sn}^2$ (metre bölü saniye kare) dir. (Bu yerçekimi sabitleri Dünyanın ağırlık merkezinden uzaklığa bağlıdır ve örneğin Everest tepesinde birazcık daha azdır.)

Sabit olan yerçekimi ivmesinin ($g = 32 \text{ m}/\text{sn}^2$) silkinmesi sıfırdır:

$$j = \frac{d}{dt}(g) = 0$$

Bir cisim serbest düşme sırasında sarsılmaz.

ÖRNEK 4 Serbest Düşmenin Modellenmesi

Şekil 3.16'da $t = 0$ sn anında düşmeye başlayan ağır bir bilyenin serbest düşmesi görülmektedir.

- (a) İlk 2 sn içinde bilye kaç metre düşer?
- (b) Bu andaki hızı, sürati ve ivmesi nedir?

Çözüm

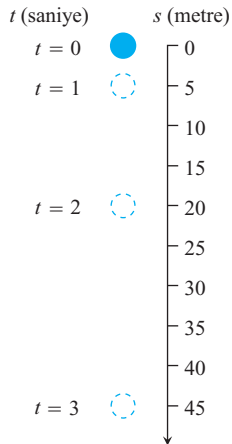
- (a) Metrik serbest düşme denklemi $s = 4.9 t^2$ 'dir. İlk 2 sn boyunca bilye

$$s(2) = 4.9(2)^2 = 19.6 \text{ m}$$

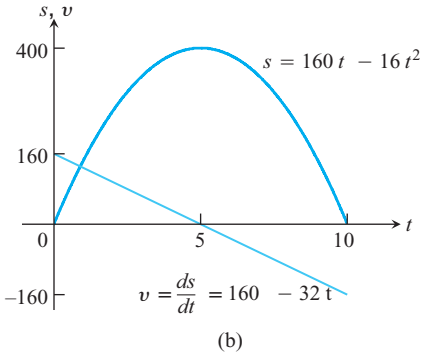
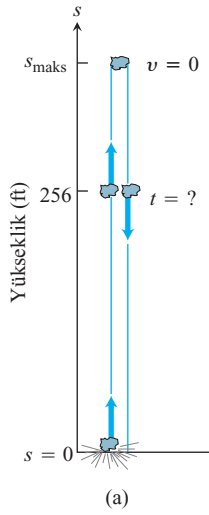
düşer.

- (b) Herhangi bir t zamanında, hız yer değiştirmenin türevidir:

$$v(t) = s'(t) = \frac{d}{dt}(4.9t^2) = 9.8t$$



ŞEKİL 3.16 Serbest düşen bir bilye (Örnek 4)



ŞEKİL 3.17 (a) Örnek 5'teki kaya. (b) s ve v 'nin, zamanın fonksiyonu olarak grafikleri; $v = ds/dt = 0$ olduğunda s maksimumdur. s 'nin grafiği kayanın izlediği yol değildir; yüksekliğin zamana karşı çizilmesidir. Burada bir doğru olarak çizilen eğim, kayanın hızını verir.

$t = 2$ sa anında, hız aşağı doğru (artan s yönünde)

$$v(2) = 19.6 \text{ m/sn}$$

dir. $t = 2$ sa anındaki *sürat* ise:

$$\text{Sürat} = |v(2)| = 19.6 \text{ m/sn}$$

dir. herhangi bir t anındaki *ivme*

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 9.8 \text{ m/sn}^2$$

dir. $t = 2$ sa'de, ivme 9.8 m/sn^2 'dir. ■

ÖRNEK 5 Dikey Hareketin Modellenmesi

Bir dinamit patlaması ağır bir kayayı 160 ft/sn (yaklaşık 109 mil/sa) hızla yukarı doğru fırlatır (Şekil 3.17a). t saniye sonra kaya $160t - 16t^2$ yüksekliğe ulaşır.

- Kaya ne kadar yükseğe çıkar?
- Kaya yukarı çıkarken ve aşağı inerken yerden 256 ft yukarıda olduğunda kayanın hızı ve sürati nedir?
- Kayanın (patlamadan sonraki) herhangi bir t zamanındaki ivmesi nedir?
- Kaya yere ne zaman çarpar?

Çözüm

- Seçtiğimiz koordinat sisteminde, s yerden yukarı doğru yüksekliği ölçmektedir, bu yüzden hız yukarıya doğru pozitif, aşağıya doğru ise negatif olur. Taşın en yüksek noktaya ulaştığı an uçuş sırasında hızın 0 olduğu tek andır. Dolayısıyla, maksimum yüksekliği bulmak için bütün yapmamız gereken ne zaman $v = 0$ olduğunu bulmak ve bu zamanda s 'yi hesaplamaktır:

Herhangi bir t anında hız

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(160t - 16t^2) = 160 - 32t \text{ ft/sn.}$$

olarak bulunur.

$$160 - 32t = 0 \quad \text{veya} \quad t = 5 \text{ sn.}$$

olduğunda hız sıfırdır. $t = 5$ sn'de kayanın yüksekliği

$$s_{\text{maks}} = s(5) = 160(5) - 16(5)^2 = 800 - 400 = 400 \text{ ft}$$

olur. Şekil 3.17b'ye bakın.

- Kayanın yukarı çıkarken ve aşağı inerken yerden 256 ft yükseklikteyken hızını bulmak için

$$s(t) = 160t - 16t^2 = 256$$

olmasını sağlayacak iki t değerini bulmamız gerekir. Bu denklemi çözmek için,

$$16t^2 - 160t + 256 = 0$$

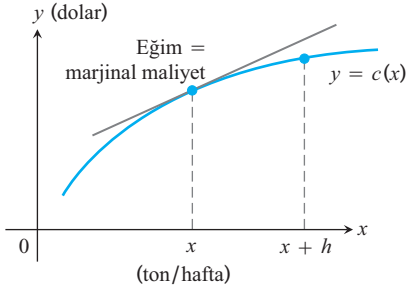
$$16(t^2 - 10t + 16) = 0$$

$$(t - 2)(t - 8) = 0$$

yazar ve

$$t = 2 \text{ sn,} \quad t = 8 \text{ sn}$$

buluruz.



ŞEKİL 3.18 Haftalık çelik üretimi: $c(x)$, haftada x ton üretimin maliyetidir. İlave h ton üretimin maliyeti $c(x+h) - c(x)$ dir.

bulunmaktadır. Bu zamanlarda kayanın hızı

$$v(2) = 160 - 32(2) = 160 - 64 = 96 \text{ ft/sn.}$$

$$v(8) = 160 - 32(8) = 160 - 256 = -96 \text{ ft/sn.}$$

olur. Her iki zamanda da kayanın sürati 96 ft/sn 'dir. $v(2) > 0$ olduğundan $t = 2$ sn de kaya yukarıya doğru hareket eder (s artar); $v(8) < 0$ olduğu için de $t = 8$ sn de kaya aşağıya doğru hareket eder (s azalır)

- (c) Patlamadan sonraki uçuşunun herhangi bir anında, kayanın ivmesi sabit ve

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(160 - 32t) = -32 \text{ ft/sn}^2$$

dir. İvme her zaman aşağıya doğrudur. Taş yukarı çıkarken yavaşlamakta, aşağı inerken ise hızlanmaktadır.

- (d) Kaya yere s 'nin 0 olduğu pozitif bir t zamanında çarpar. $160t - 16t^2 = 0$ denklemi çarpanlarına ayrılırsa $16t(10 - t) = 0$ elde edilir, dolayısıyla çözümleri $t = 0$ ve $t = 10$ olur. $t = 0$ 'da patlama olmuş ve kaya yukarı fırlamıştır. Yere ise 10 sn. sonra varmıştır.

Ekonomide Türevler

Mühendisler *hız* ve *ivme* gibi terimleri hareketi tanımlayan fonksiyonların türevlerini belirtmek için kullanırlar. Ekonomistlerin de değişim oranları ve türevler için özel kelimeleri vardır. Bunlara *marjinaler* derler.

Bir üretim işleminde, *üretim maliyeti* $c(x)$ üretilen birim miktarı x 'in bir fonksiyonudur. **Marjinal üretim maliyeti** ise maliyetin (c) üretim seviyesine (x) göre değişim oranı, dolayısıyla dc/dx 'tir.

Örneğin, $c(x)$ bir haftada x ton çelik üretmek için gereken dolar miktarı olsun. $x + h$ birim üretmek daha pahalı olacaktır ve h ile bölünmüş maliyet farkı bir haftada ton başına maliyetteki ortalama artıştır:

$$\frac{c(x+h) - c(x)}{h} = \text{üretilen her } h \text{ ton fazla çeliğin ortalama maliyeti}$$

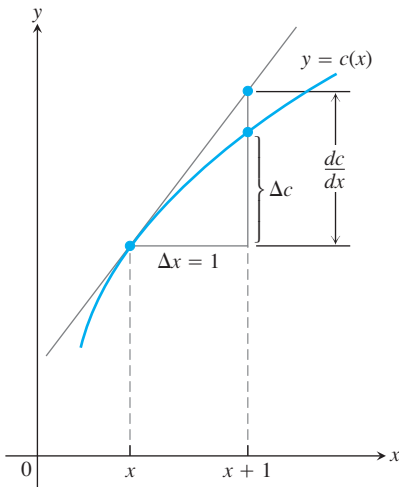
Bu oranın $h \rightarrow 0$ iken limiti, haftalık üretim x ton iken bir haftada daha fazla çelik üretmenin *marjinal maliyeti*dir (Şekil 3.18):

$$\frac{dc}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x+h) - c(x)}{h} = \text{marjinal üretim maliyeti}$$

Bazen, marjinal üretim maliyeti fazladan bir birim üretmenin maliyeti olarak da tanımlanır:

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x+1) - c(x)}{1}$$

Bu da yaklaşık olarak dc/dx 'in x 'teki değeridir. Bu yaklaşım, c 'nin grafiği x yakınlarında çok hızlı değişmiyorsa, kabul edilebilirdir. Bu durumda fark bölümü, limitine yani dc/dx 'e yakın olacaktır, bu da $\Delta x = 1$ ise teğetteki yükselmedir (Şekil 3.19). Yaklaşım, büyük x değerlerinde daha iyi sonuç verir.



ŞEKİL 3.19 Marjinal maliyet dc/dx üretimin $\Delta x = 1$ birim artmasıyla oluşacak Δc maliyetidir.

Ekonomistler, toplam maliyet fonksiyonunu genellikle

$$c(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

şeklinde bir kübik polinomla temsil ederler. Burada δ kira, ısıtma, ekipman ve yönetim giderleri gibi *sabit maliyetleri* temsil eder. Diğer terimler hammadde, vergiler ve işçilik gibi *değişken maliyetleri* temsil ederler. Sabit maliyetler üretilen birim sayısından bağımsızdırlar oysa değişken maliyetler üretim miktarına bağlıdırlar. Bir kübik polinom, ilgili nicelik aralığında maliyet davranışını yakalamaya yetecek kadar karmaşıktır.

ÖRNEK 6 Marjinal Maliyet ve Marjinal Kar

8 ile 30 arasında radyatör üretilirken x radyatör üretmenin maliyetinin

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

dolar olduğunu ve x radyatör satılmasından elde edilen gelirin

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

dolar olduğunu varsayın. Dükkanınız normal olarak günde 10 radyatör üretmektedir. Günde bir radyatör daha üretmek maliyette ne kadar fark edecektir ve günde 11 radyatör satmakla gelirdeki tahmini artış ne olacaktır?

Çözüm Normalde günde 10 radyatör üretilirken, bir radyatör daha fazla üretmenin maliyeti $c'(10)$ civarındadır:

$$c'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 15x) = 3x^2 - 12x + 15$$

$$c'(10) = 3(100) - 12(10) + 15 = 195.$$

Ek masraf 195\$ civarında olacaktır. Marjinal gelir

$$r'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 12x) = 3x^2 - 6x + 12$$

dir. Marjinal gelir fonksiyonu da fazladan bir birim satıldığında elde edilecek geliri belirtmektedir. Günde 10 radyatör satarken satışınızı 11 radyatöre çıkarırsanız, gelirinizin

$$r'(10) = 3(100) - 6(10) + 12 = \$252$$

kadar artmasını bekleyebilirsiniz. ■

ÖRNEK 7 Marjinal Vergi Oranı

Marjinal oranların diline biraz alışmak için, marjinal vergi oranlarını ele alalım. Marjinal gelir vergisi oranınız %28 ise ve geliriniz 1000\$ artarsa, gelir vergisi olarak fazladan bir 280\$ vergi vermek zorunda kalacağınızı düşünebilirsiniz. Bu toplam gelirinizin %28'ini vergi olarak vereceğiniz anlamına gelmez. Sadece şu andaki I gelir düzeyinizde, gelire göre T vergisindeki artış oranının $dT/dI = 0.28$ olacağını söyler. Kazandığınız fazladan bir dolar için 0.28\$ vergi vereceksinizdir. Elbette, kazancınız daha fazla artarsa, vergi diliminiz değişebilir ve marjinal oranınız artabilir. ■

Değişikliğe duyarlılık

x 'teki küçük bir değişim bir fonksiyonun değerinde büyük bir değişime yol açtığında, fonksiyonun x 'teki değişime karşı duyarlı olduğunu söyleriz. $f'(x)$ türevi bu duyarlılığın ölçüsüdür.

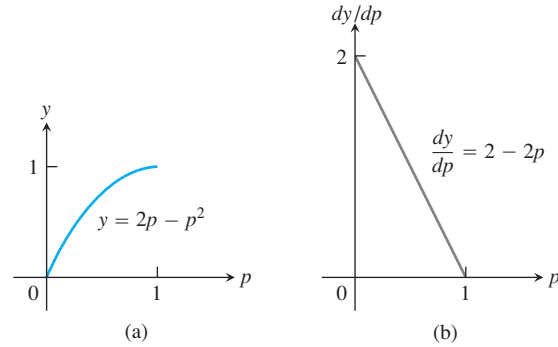
ÖRNEK 8 Genetik Data ve Değişikliğe Duyarlılık

Bezelyeler ve başka bitkilerle uğraşan Avusturyalı keşiş Gregor Johann Mendel (1822-1884) melezlemenin ilk bilimsel açıklamalarını ortaya koymuştur.

Dikkatlice yapılmış kayıtları, p (0 ile 1 arasında bir sayı) bezelyelerdeki düzgün kabuk geninin (baskın gen) sıklığı ve $(1 - p)$ de bezelyelerdeki kıvrık kabuk geninin (çekinik gen) sıklığıysa, düzgün kabuklu bezelyelerin topluluktaki oranının

$$y = 2p(1 - p) + p^2 = 2p - p^2$$

olduğunu göstermiştir. Şekil 3.20'deki $y - p$ grafiği y 'nin değerinin, p 'deki bir değişikliğe, p 'nin küçük değerleri için, p 'nin büyük değerleri için olduğundan daha fazla duyarlı olduğunu göstermektedir. Gerçekten de, bu, p 0 civarındayken dy/dp 'nin 2'ye, p 1 civarındayken de 0'a yakın olduğunu gösteren Şekil 3.20b'deki türev grafiğiyle daha iyi vurgulanmaktadır.



ŞEKİL 3.20 (a) Düzgün bezelyelerin oranını belirleyen $y = 2p - p^2$ grafiği (b) dy/dp grafiği (Örnek 8).

Genetik için anlamı şudur: Oldukça çekinik bir topluluk içine biraz daha baskın gen eklemek (kıvrık kabuklu bezelye sıklığının az olduğu yerde), oldukça baskın bir topluluktaki benzer artışa göre, sonraki jenerasyonlarda dramatik etkilere neden olacaktır ■

ALİŞTIRMALAR 3.3

Bir Koordinat Doğrusu Üzerinde Hareket

1–6 alıştırmalarında, $a \leq t \leq b$ aralığında, s metre ve t saniye olmak üzere bir koordinat doğrusunda ilerleyen bir cismin $s = f(t)$ konumu verilmektedir.

- a. Verilen zaman aralığında, cismin yer değiştirmesini ve ortalama hızını bulun.

- b. Zaman aralığının uç noktalarında cismin süratini ve ivmesini bulun.

- c. Aralık boyunca hangi zamanlarda cisim yön değiştirir (eğer değiştirirse)?

1. $s = t^2 - 3t + 2$, $0 \leq t \leq 2$

2. $s = 6t - t^2$, $0 \leq t \leq 6$

3. $s = -t^3 + 3t^2 - 3t$, $0 \leq t \leq 3$

4. $s = (t^4/4) - t^3 + t^2$, $0 \leq t \leq 3$

5. $s = \frac{25}{t^2} - \frac{5}{t}$, $1 \leq t \leq 5$

6. $s = \frac{25}{t+5}$, $-4 \leq t \leq 0$

7. **Partikül hareketi** t anında, s ekseninde ilerleyen bir cismin konumu $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ m olarak verilmektedir.

a. Hız her sıfır olduğunda cismin ivmesini bulun.

b. İvmenin her sıfır oluşunda cismin süratini bulun.

c. Cismin $t = 0$ ile $t = 2$ arasında aldığı toplam yolu bulun.

8. **Partikül hareketi** $t \geq 0$, anında, s eksenini boyunca ilerleyen bir cismin hızı $v = t^2 - 4t + 3$.

a. Hız her sıfır olduğunda cismin ivmesini bulun.

b. Cisim ne zaman ileriye, ne zaman geriye doğru gitmektedir?

c. Cismin ivmesi ne zaman artmakta, ne zaman azalmaktadır?

Serbest Düşme Uygulamaları

9. **Mars ve Jüpiter'de serbest düşme** Mars ve Jüpiter'in yüzeylerinde serbest düşme denklemleri (s metre ve t saniye olmak üzere) Mars'ta $s = 1.86t^2$ ve Jüpiter'de $s = 11.44t^2$ 'dir. Her iki gezegende, serbest düşmeye bırakılan bir cismin 27.8 m/sn (yaklaşık 100 km/sa) hıza ulaşması için ne kadar zaman geçecektir?

10. **Ayın yüzeyinde dikey hareket** Ayın yüzeyinde dikey olarak yukarı doğru 24 m/sn (yaklaşık 86 km/sa) ilk hızıyla atılan bir taş t saniyede $s = 24t - 0.8t^2$ yüksekliğine ulaşmaktadır.

a. Taşın t anındaki hızını ve ivmesini bulun. (Buradaki ivme ayın yerçekimi ivmesidir.)

b. Taşın en yüksek noktaya çıkması ne kadar sürer?

c. Taş ne kadar yüksekçe çıkar?

d. Taşın maksimum yüksekliğinin yarısına çıkması ne kadar sürer?

e. Taş havada ne kadar kalır?

11. **Ufak havasız bir gezegendeki g 'yi bulmak** Ufak havasız bir gezegendeki araştırmacılar 15 m/sn ilk hızıyla yerden dikey olarak yukarı doğru bir çelik bilye atmak için bir yaylı tabanca kullanmışlardır. Gezegenin yüzeyindeki yerçekimi ivmesi g_s m/sn² olduğu için, araştırmacılar bilyenin t saniye sonra $s = 15t - (1/2)g_s t^2$ yüksekliğe çıkmasını beklemektedirler. Çelik bilye fırlatıldıktan 20 sn sonra maksimum yüksekliğine ulaşmıştır. g_s 'nin değeri nedir?

12. **Hızlı giden mermi** Ayın yüzeyinden dik yukarı doğru fırlatılan 45 kalibrelik bir mermi t saniye sonra $s = 832t - 2.6t^2$ ft yüksekliğe ulaşacaktır. Dünyada ise, hava yokken, t saniye sonra yüksekliği $s = 832t - 16t^2$ ft olacaktır. İki durumda da, mermi ne kadar havada kalacaktır? Mermi ne kadar yüksekçe çıkacaktır?

13. **Pisa Kulesi'nden serbest düşme** Galileo, Pisa Kulesi'nin tepesinden, yerden 179 ft yükseklikten bir top güllmesini bıraksaydı düşüşten saniye sonra güllenin yerden yüksekliği $s = 179 - 16t^2$ olacaktı.

a. t anında güllenin hızı, sürati ve ivmesi ne olurdu?

b. Topun yere çarpması ne kadar sürerdi?

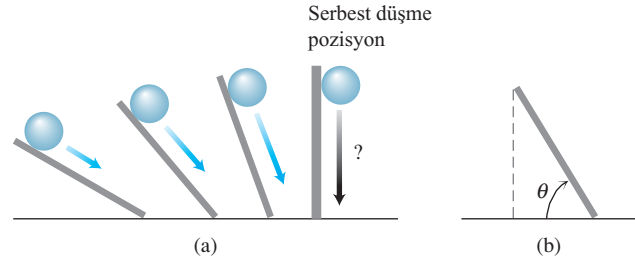
c. Yere çarpma anında topun hızı ne olurdu?

14. **Galileo'nun serbest düşme formülü** Galileo serbest düşme sırasında bir cismin hızını veren bir formülü, gittikçe dikleşen kalaslardan aşağı toplar yuvarlayarak, kalas dik olduğunda ve top serbest düştüğünde topun davranışını öngörecektir bir limit formülü arayarak geliştirmiştir; şekildeki (a) kısmına bakın. Kalastaki herhangi açıda, hareketin t anındaki topun hızının t 'nin sabit bir katı olduğunu görmüştür. Yani hız, $v = kt$ şeklinde bir formülle verilmektedir. k sabitinin değeri kalasın eğim açısına bağlıdır.

Modern gösterimle - şeklin (b) kısmı -, mesafe metre ve zaman saniye olmak üzere, Galileo'nun deneyerek bulduğu, herhangi bir açıda yuvarlanmanın t anında topun hızının

$$v = 9.8(\sin \theta)t \text{ m/sn}$$

olduğudur.

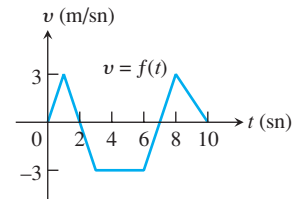


a. Serbest düşme sırasında topun hız denklemi nedir?

b. (a) şıkında bulduklarınızı kullanarak, dünyanın yüzeyi yakınında serbest düşen bir cisme etkiyen sabit ivmeyi ne olarak bulursunuz?

Grafiklerden Hareket Hakkında Sonuca Varma

15. Aşağıdaki şekil, bir koordinat doğrusu boyunca ilerleyen bir cismin $v = ds/dt = f(t)$ m/sn hızını göstermektedir.



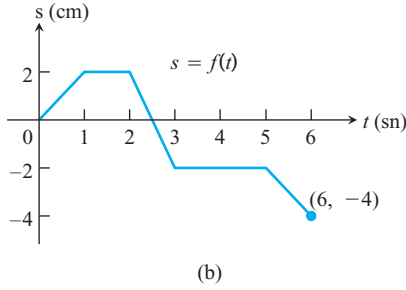
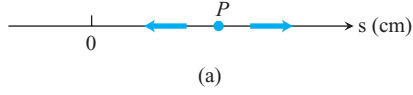
a. Cisim ne zaman yön değiştirir?

b. Cisim (yaklaşık olarak) ne zaman sabit bir süratle ilerlemektedir?

c. $0 \leq t \leq 10$ aralığında cismin sürat grafiğini çizin.

d. Tanımlı olduğunda, ivmeyi çizin.

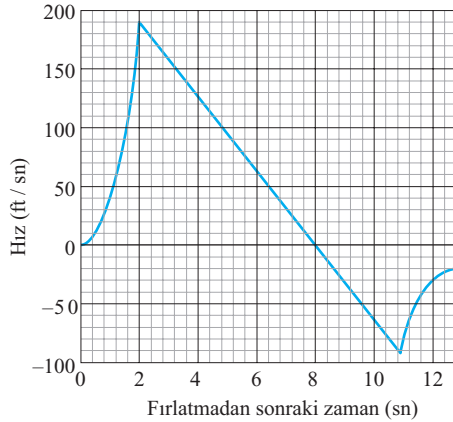
16. Bir P parçacığı, aşağıda verilen şeklin (a) kısmında gösterilen sayı doğrusu üzerinde hareket etmektedir. Kısım (b) P 'nin konumunu t zamanının bir fonksiyonu olarak göstermektedir.



- a. P ne zaman sağa doğru, sola doğru ilerlemekte veya durmaktadır?
- b. Parçacığın hızını ve süratini (tanımlıysalar) çizin.
17. **Bir roket fırlatmak** Bir roket modeli fırlatıldığında, itici motor roketi yukarı doğru ivmelendirecek şekile birkaç saniye yanar. Yanmadan sonra, roket bir süre yukarı doğru gider ve düşmeye başlar. Ufak bir patlayıcı yük sayesinde, roket düşmeye başladıktan sonra bir paraşüt açılır. Paraşüt, yere düştüğünde roketin parçalanmasını engeller.

Aşağıdaki şekilde bir roket modelinin uçuşunun hız verileri görülmektedir.

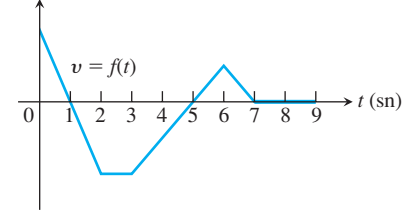
- a. Motor durduğunda roketin hızı nedir?
- b. Motor kaç saniye yanımtır?



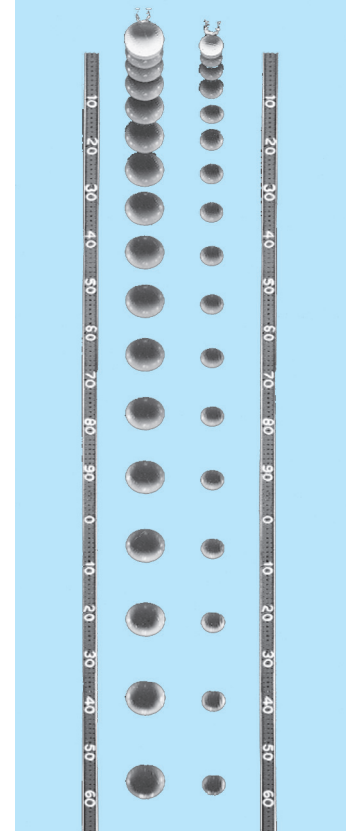
- c. Roket en yüksek noktasına ne zaman ulaşır? O zamanki hızı nedir?
- d. Paraşüt ne zaman açılmıştır? O anda roketin düşüş hızı nedir?
- e. Paraşüt açılmadan önce roket ne kadar süre düşmüştür?
- f. Roketin en yüksek ivmesi nedir?

- g. İvme ne zaman sabittir? Bu anda değeri nedir (en yakın tamsayı olarak)?

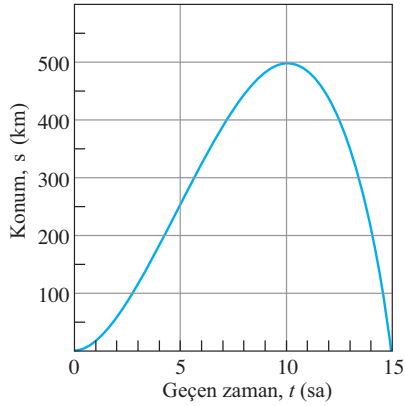
18. Aşağıdaki şekilde bir koordinat doğrusu boyunca ilerleyen bir parçacığın $v = f(t)$ hız grafiği görülmektedir.



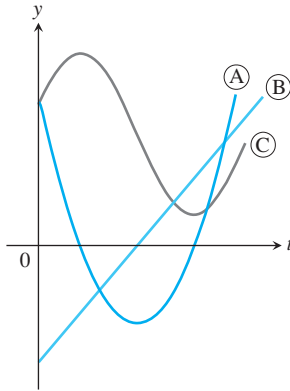
- a. Parçacık ne zaman ileriye veya geriye doğru gider? Ne zaman hızlanır veya yavaşlar?
- b. Parçacığın ivmesi nerede pozitif, negatif veya sıfırdır?
- c. Parçacık ne zaman en yüksek sürata ulaşır?
- d. Parçacık ne zaman bir andan fazla hareketsiz kalır?
19. **Düşen iki top** Aşağıdaki şekilde çok parlamlı fotoğraf serbest düşen iki topu göstermektedir. Dikey cetveller santimetre olarak işaretlenmiştir. $s = 490t^2$ (s santimetre ve t saniye olarak serbest düşme denklemi) eşitliğini kullanarak aşağıdaki soruları yanıtlayın.



- a. Topların ilk 160 cm'yi düşmeleri ne kadar sürmüştür? Bu süre içinde ortalama hızları nedir?
- b. 160 cm sınırına geldiklerinde toplar hangi hızla düşer? O andaki ivmeleri nedir?
- c. Işığın parlama hızı (saniyede parlama) nedir?
20. **Hareket haline bir kamyon** Aşağıdaki şekil bir otoyolda giden bir kamyonun s konumunu göstermektedir. Kamyon $t = 0$ 'da yola çıkar ve 15 saat sonra $t = 15$ 'te geri döner.
- a. Bölüm 3.1, Örnek 3'te tanımlanan yöntemi kullanarak $0 \leq t \leq 15$ için kamyonun $v = ds/dt$ hızını çizin. Aynı işlemi hız eğrisine uygulayarak, dv/dt ivme grafiğini çizin.
- b. (a). $s = 15t^2 - t^3$ olduğunu varsayın. ds/dt ve d^2s/dt^2 grafiklerini çizerek (a) şıkkındakiyle karşılaştırın.

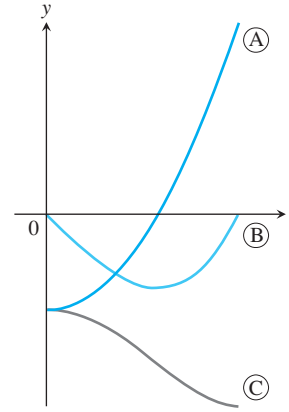


21. Şekil 3.21'deki grafikler bir koordinat doğrusu üzerinde hareket eden bir cismin s konumunu, $v = ds/dt$ hızını ve $a = d^2s/dt^2$ ivmesini t zamanının fonksiyonları olarak göstermektedir. Hangi grafik hangisidir? Yanıtınızı açıklayın.



ŞEKİL 3.21 Alıştırma 21 için grafikler.

22. Şekil 3.22'deki grafikler bir koordinat doğrusu üzerinde ilerleyen bir cismin s konumunu, $v = ds/dt$ hızını ve $a = d^2s/dt^2$ ivmesini t zamanının fonksiyonları olarak göstermektedir. Hangi grafik hangisidir? Yanıtınızı açıklayın.



ŞEKİL 3.22 Alıştırma 22 için grafikler.

Ekonomi

23. **Marjinal maliyet** x çamaşır makinesi üretmenin maliyetinin dolar olarak $c(x) = 2000 + 100x - 0.1x^2$ olduğunu varsayın.
- a. İlk 100 çamaşır makinesini üretmenin ortalama makine başına maliyetini bulun.
- b. 100 çamaşır makinesi üretildiğindeki marjinal maliyeti bulun.
- c. 100 çamaşır makinesi üretildiğindeki marjinal maliyetin, yaklaşık olarak, 100 makine üretildikten sonra üretilecek olan bir makinenin üretilmesinin maliyetine eşit olduğunu, ikinci maliyeti doğrudan hesaplayarak bulun.
24. **Marjinal gelir** x tane çamaşır makinesinin satılmasından elde edilen gelirin

$$r(x) = 20,000 \left(1 - \frac{1}{x} \right)$$

dolar olduğunu varsayın.

- a. 100 çamaşır makinesi üretildiğindeki marjinal geliri bulun.
- b. Üretimin haftada 100 çamaşır makinesinden 101 çamaşır makinesine çıkartılmasıyla oluşacak gelirdeki artmayı tahmin etmek için $r'(x)$ fonksiyonunu kullanın.
- c. $x \rightarrow \infty$ iken $r'(x)$ 'in limitini bulun. Bu sayıyı nasıl yorumlarsınız?

Ek Uygulamalar

25. **Bakteri nüfusu** Bakterilerin yetiştiği besleyici bir sıvıya bir bakteri eklendiğinde, bakteri topluluğu bir süre büyümeye devam etmiş, sonra da durmuş ve azalmaya başlamıştır. Topluluğun t (saat) anındaki büyüklüğü $b = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$ dir.
- a. $t = 0$ saat
- b. $t = 5$ saat
- c. $t = 10$ saat
- lerindeki büyüme oranlarını bulun.

26. Bir tankı boşaltmak Boşaltılmaya başlandıktan t dakika sonra bir tanktaki su miktarı (galon olarak) $Q(t) = 200(30 - t)^2$ dakikanın sonunda su hangi hızla dışarı akmaktadır? İlk 10 dakika boyunca suyun ortalama akış oranı nedir?

T 27. Bir tankı boşaltmak Altındaki musluğu açarak bir depoyu boşaltmak 12 saat sürmektedir. Musluk açıldıktan t saat sonra depodaki sıvının y yüksekliği şu formülle verilir:

$$y = 6 \left(1 - \frac{t}{12} \right)^2 \text{ m.}$$

- t zamanında deponun boşalma oranı dy/dt (m/h)'yi (m/sa) bulun.
 - Depodaki sıvı seviyesi ne zaman en hızlı, ne zaman en yavaş düşmektedir? Bu zamanlardaki dy/dt değerleri nelerdir?
 - y ve dy/dt grafiklerini beraber çizin ve y 'nin dy/dt 'nin değer ve işaretlerine bağlı olarak davranışını açıklayın.
- 28. Bir balonu şişirmek** Küresel bir balonun hacmi, $V = (4/3)\pi r^3$, yarıçapla değişir.
- $r = 2$ ft olduğunda hacmin yarıçapa göre değişim oranı (ft^3/ft) nedir?
 - Yarıçap 2ft'ten 2.2 ft'e değiştiğinde hacim yaklaşık olarak ne kadar değişir?
- 29. Bir uçağın kalkışı** Bir uçağın kalkıştan önce pistte aldığı mesafe $D = (10/9)t^2$ ile verilir. Burada D başlangıçtan itibaren metre olarak ölçülen mesafe ve t saniye olarak frenlerin boşalmasından itibaren geçen zamandır. Uçak hızı 200 km/sa olduğunda havalanacaksa, havalanması ne kadar sürer ve bu sürede ne kadar yol alır?
- 30. Volkanik lav akıntıları** Hawaii adasındaki Kasım 1959 Kilauea İki patlaması krater duvarı üzerinde akıntılar halinde başlamışsa da, hareket daha sonra kraterin tabanında tek bir kanalda toplanmış ve buradaki tek bir noktadan havaya 1900 ft yükseklikte lav fırlatmıştır (bir dünya rekoru). Lavın çıkış hızı ft/sn ve mil/sa olarak nedir? (İpucu: v_0 bir lav parçacığının çıkış hızı ise, t saniye sonra yüksekliği $s = v_0 t - 16t^2$ ft olacaktır. $ds/dt = 0$ olduğu zamanı bularak işe başlayın. Hava tepkisini ihmal edin).

T 31–34 alıştırmalarında s -ekseninde ilerleyen bir cismin $s = f(t)$ konumu t zamanının bir fonksiyonu olarak verilmektedir. f' 'yi, hız fonksiyonu $v(t) = ds/dt = f'(t)$ ve $a(t) = d^2s/dt^2 = f''(t)$ ile birlikte çizin. v ile a 'nın değer ve işaretlerine bağlı olarak cismin davranışını açıklayın. Açıklamanızda aşağıdaki bilgilere de yer verin.

- Cisim ne zaman durmaktadır?
- Ne zaman sola (aşağı) veya sağa (yukarı) gitmektedir?
- Ne zaman yön değiştirir?
- Ne zaman hızlanır ve yavaşlar?
- Ne zaman en hızlı hareket eder (en yüksek)? En yavaş?
- Ne zaman eksen orijininden en uzaktır?

31. $s = 200t - 16t^2$, $0 \leq t \leq 12.5$ (Dünya yüzeyinden dik yukarı doğru 200 ft/sn ilk hızla atılan ağır bir cisim)

32. $s = t^2 - 3t + 2$, $0 \leq t \leq 5$

33. $s = t^3 - 6t^2 + 7t$, $0 \leq t \leq 4$

34. $s = 4 - 7t + 6t^2 - t^3$, $0 \leq t \leq 4$

35. Safkan Yarışı Bir yarış atı 10-furlong'luk bir yarış koşmaktadır. (1 furlong 220 yada ≈ 201 metredir, bu alıştırmada birimler olarak furlong ve saniye kullanılacaktır). Yarışın başından itibaren, yarış atı her furlong (F) işaretini geçtiğinde bir kahya, tabloda gösterildiği gibi geçen zamanı (t) kaydetmektedir.

F	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	0	20	33	46	59	73	86	100	112	124	135

- Yarış atı yarışı ne kadar zamanda bitirir?
- İlk 5 furlong'ta atın ortalama sürati nedir?
3. furlong işaretini geçerken atın yaklaşık sürati nedir?
- At, yarışın hangi bölümünde en hızlı koşar?
- At, yarışın hangi bölümünde en çabuk hızlanır?

3.4

Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri

Hakkında bilgi edinmek istediğimiz bir çok olay yaklaşık olarak periyodiktir (elektromanyetik alanlar, kalp atışları, gel-gitler, hava). Sinüslerin ve kosinüslerin türevleri periyodik değişiklikleri tanımlamada anahtar rolü oynarlar. Bu bölüm altı temel trigonometrik fonksiyonun türevlerinin nasıl alınacağını göstermektedir.

Sinüs Fonksiyonunun Türevi

x , radyan olarak ölçülmek üzere $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun türevini almak için, Bölüm 2.4'te Örnek 5a ve Teorem 7'deki limitleri, sinüs için açı toplama özdeşliği ile birleştiririz:

$$\sin(x + h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

$f(x) = \sin x$, ise

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} && \text{Türev tanımı} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h} && \text{Sinüs açılımla özdeşliği} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right) \\
 &= \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\
 &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\
 &= \cos x && \text{Bölüm 2.4, Örnek 5(a) ve Teorem 7}
 \end{aligned}$$

Sinüs fonksiyonunun türevi kosinüs fonksiyonudur:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

ÖRNEK 1 Sinüs İçeren Türevler

(a) $y = x^2 - \sin x$:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= 2x - \frac{d}{dx}(\sin x) && \text{Farklı kuralı} \\
 &= 2x - \cos x.
 \end{aligned}$$

(b) $y = x^2 \sin x$:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= x^2 \frac{d}{dx}(\sin x) + 2x \sin x && \text{Çarpma kuralı} \\
 &= x^2 \cos x + 2x \sin x.
 \end{aligned}$$

(c) $y = \frac{\sin x}{x}$:

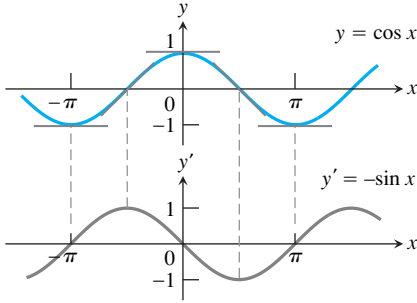
$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \cdot 1}{x^2} && \text{Bölme kuralı} \\
 &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}
 \end{aligned}$$

Kosinüs Fonksiyonunun Türevi

Kosinüs için

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

açılımla formülünün yardımıyla,



ŞEKİL 3.23 $y = \cos x$ eğrisinin teğetlerinin eğimleri olarak $y' = -\sin x$ eğrisi.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(\cos x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} && \text{Türev tanımı} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h} && \text{Kosinüs açılı toplama özdeşliği} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \\
 &= \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\
 &= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 \\
 &= -\sin x
 \end{aligned}$$

Bölüm 2.4, Örnek 5(a) ve Teorem 7

Kosinüs fonksiyonunun türevi sinüs fonksiyonunun negatimidir:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

Şekil 3.23'te bu sonucu görmenin başka bir yolu gösterilmektedir.

ÖRNEK 2 Cosinüs İçeren Türevler

(a) $y = 5x + \cos x$:

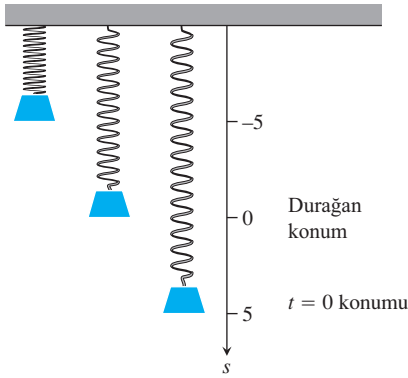
$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(\cos x) && \text{Toplama kuralı} \\
 &= 5 - \sin x.
 \end{aligned}$$

(b) $y = \sin x \cos x$:

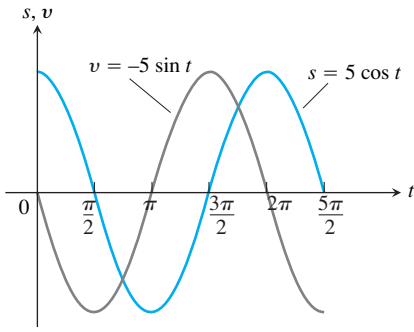
$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \sin x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(\sin x) && \text{Çarpım kuralı} \\
 &= \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x) \\
 &= \cos^2 x - \sin^2 x
 \end{aligned}$$

(c) $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{(1 - \sin x) \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)^2} && \text{Bölme kuralı} \\
 &= \frac{(1 - \sin x)(-\sin x) - \cos x(0 - \cos x)}{(1 - \sin x)^2} \\
 &= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2} && \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\
 &= \frac{1}{1 - \sin x}
 \end{aligned}$$



ŞEKİL 3.24 Dikey bir yay'a asılı bir cisim durağan konumundan yukarı-aşağı salınıyor. Bu hareket trigonometrik fonksiyonlarla tanımlanır (Örnek 3).



ŞEKİL 3.25 Örnek 3'teki cismin konum ve hız grafikleri.

Basit Harmonik Hareket

Bir yayın ucunda serbestçe aşağı ve yukarı doğru salınan bir cismin hareketi *basit harmonik harekete* bir örnektir. Aşağıdaki örnekte sürtünme veya esneklik gibi hareketi yavaşlatacak kuvvetlerin bulunmadığı bir durum tanımlanmaktadır.

ÖRNEK 3 Yayın Hareketi

Bir yay'a asılı bir cisim (Şekil 3.24) başlangıç konumundan 5 birim uzatılır ve $t = 0$ zamanında salınmaya bırakılır. t zaman sonraki konumu

$$s = 5 \cos t$$

ile verilir. t anındaki hızı ve ivmesi nedir?

Çözüm

Konum: $s = 5 \cos t$

Hız: $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(5 \cos t) = -5 \sin t$

İvme: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 \sin t) = -5 \cos t$

Bu denklemlerden şunları öğreniriz:

1. Zaman içinde, cisim s -ekseninde $s = 5$ ile $s = -5$ arasında gidip gelir. Hareketin genliği 5'tir. Hareketin periyodu ise, $\cos t$ 'nin periyodu olan 2π 'dir.
2. $v = -5 \sin t$ hız fonksiyonu en büyük değerini, 5, Şekil 3.25'teki grafiklerde görüldüğü gibi, $\cos t = 0$ olduğunda alır. Dolayısıyla cismin sürati, $|v| = 5|\sin t|$, her $\cos t = 0$ olduğunda, yani $s = 0$ iken (başlangıç konumunda), en büyüktür. $\sin t = 0$ olduğunda, cismin sürati sıfırdır. Bu durum, $s = 5 \cos t = \pm 5$ iken, yani hareket aralığının uç noktalarında gerçekleşir.
3. İvmenin değeri, daima konumun değerinin tam zıddıdır. Cisim başlangıç konumundan yukarıda ise yerçekimi cismi aşağıya çeker; Cisim başlangıç konumundan aşağıda ise yay cismi aşağıya çeker.
4. İvme, $a = -5 \cos t$, sadece $\cos t = 0$ olduğu ve yerçekimi kuvveti ile yay kuvvetinin birbirini dengelediği başlangıç konumunda sıfırdır. Cisim başka bir yerdeyse, iki kuvvet eşit değildir dolayısıyla ivme sıfırdan farklıdır. İvmenin büyüklüğü, orijinden en uzak noktalarda, yani $\cos t = \pm 1$ olduğunda en büyüktür. ■

ÖRNEK 4 Silkinme

Örnek 3'teki basit harmonik hareketin silkinmesi

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 \cos t) = 5 \sin t.$$

dir. En büyük değerini, yer değiştirmenin ekstremlerinde değil, ivmenin yön ve işaret değiştirdiği başlangıç konumunda, $\sin t = \pm 1$ olduğunda alır. ■

Diğer Temel Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri

$\sin x$ ve $\cos x$ x 'in türevlenebilir fonksiyonları oldukları için, bunlarla ilişkili

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \text{ve} \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

fonksiyonları da tanımlı oldukları bütün x değerlerinde türevlenebilirler. Bölüm kuralıyla bulunan türevleri aşağıdaki formüllerle verilir. Kotanjant ve kosekant fonksiyonlarının türev formüllerindeki eksi işaretine dikkat edin.

Diğer Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

Bunların nasıl hesaplandığını görmek için, tanjat fonksiyonunun türevini çıkartacağız. Diğerlerinin çıkartılması Alıştırma 50'ye bırakılmıştır.

ÖRNEK 5

$d(\tan x)/dx$ 'i bulun.

Çözüm

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} && \text{Bölme kuralı} \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$

ÖRNEK 6

$y = \sec x$ ise y'' 'nü bulun.

Çözüm

$$\begin{aligned} y &= \sec x \\ y' &= \sec x \tan x \\ y'' &= \frac{d}{dx}(\sec x \tan x) \\ &= \sec x \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x \frac{d}{dx}(\sec x) && \text{Çarpım kuralı} \\ &= \sec x (\sec^2 x) + \tan x (\sec x \tan x) \\ &= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x \end{aligned}$$

Trigonometrik fonksiyonların, tanım kümelerinin tamamında türevlenebilir olmaları, tanım kümelerinin her noktasında sürekliliklerinin bir başka ispatıdır (Bölüm 3.1, Teorem 1). Dolayısıyla, trigonometrik fonksiyonların cebirsel kombinasyonlarının ve bileşkelerinin limitlerini doğrudan yerine yazma ile hesaplayabiliriz.

ÖRNEK 7 Bir trigonometrik limit bulma

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + \sec x}}{\cos(\pi - \tan x)} = \frac{\sqrt{2 + \sec 0}}{\cos(\pi - \tan 0)} = \frac{\sqrt{2 + 1}}{\cos(\pi - 0)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \quad \blacksquare$$

ALİŞTIRMALAR 3.4

Türevler

1–12 alıştırmalarında dy/dx 'i bulun.

1. $y = -10x + 3 \cos x$
2. $y = \frac{3}{x} + 5 \sin x$
3. $y = \csc x - 4\sqrt{x} + 7$
4. $y = x^2 \cot x - \frac{1}{x^2}$
5. $y = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$
6. $y = (\sin x + \cos x) \sec x$
7. $y = \frac{\cot x}{1 + \cot x}$
8. $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$
9. $y = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\tan x}$
10. $y = \frac{\cos x}{x} + \frac{x}{\cos x}$
11. $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$
12. $y = x^2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x$

13–16 alıştırmalarında ds/dt 'yi bulun.

13. $s = \tan t - t$
14. $s = t^2 - \sec t + 1$
15. $s = \frac{1 + \csc t}{1 - \csc t}$
16. $s = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$

17–20 alıştırmalarında $dr/d\theta$ 'yi bulun.

17. $r = 4 - \theta^2 \sin \theta$
18. $r = \theta \sin \theta + \cos \theta$
19. $r = \sec \theta \csc \theta$
20. $r = (1 + \sec \theta) \sin \theta$

21–24 alıştırmalarında dp/dq 'yi bulun.

21. $p = 5 + \frac{1}{\cot q}$
22. $p = (1 + \csc q) \cos q$
23. $p = \frac{\sin q + \cos q}{\cos q}$
24. $p = \frac{\tan q}{1 + \tan q}$

25. a. $y = \csc x$ b. $y = \sec x$
ise y'' 'nü bulun.

26. a. $y = -2 \sin x$ b. $y = 9 \cos x$

ise $y^{(4)} = d^4 y/dx^4$ 'ü bulun.

Teğetler

27–30 alıştırmalarında, verilen aralıklarda eğrileri, verilen x değerlerindeki teğetleriyle birlikte çizin. Her eğriyi ve teğetini denklemleriyle isimlendirin.

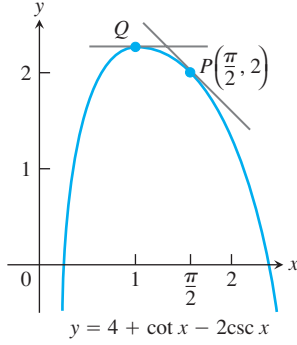
27. $y = \sin x$, $-3\pi/2 \leq x \leq 2\pi$
 $x = -\pi, 0, 3\pi/2$
28. $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$
 $x = -\pi/3, 0, \pi/3$
29. $y = \sec x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$
 $x = -\pi/3, \pi/4$
30. $y = 1 + \cos x$, $-3\pi/2 \leq x \leq 2\pi$
 $x = -\pi/3, 3\pi/2$

T 31–34 alıştırmalarındaki fonksiyonların grafiklerinin $0 \leq x \leq 2\pi$ aralığında yatay teğetleri var mıdır? Varsa, nerede bulunur? Yoksa, neden yoktur? Bulduklarınızı bir grafik programında çizerek kontrol edebilirsiniz.

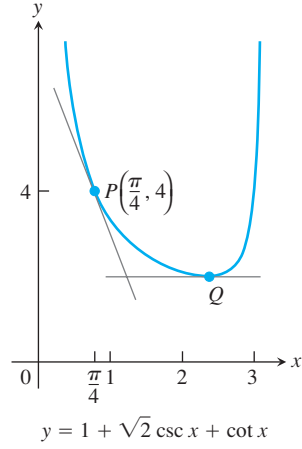
31. $y = x + \sin x$
32. $y = 2x + \sin x$
33. $y = x - \cot x$
34. $y = x + 2 \cos x$
35. $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$ eğrisinde, teğetin $y = 2x$ doğrusuna paralel olduğu bütün noktaları bulun. Eğriyi ve teğet(ler)ini denklemleriyle isimlendirerek birlikte çizin.
36. $y = \cot x$, $0 < x < \pi$ eğrisinde, teğetin $y = -x$ doğrusuna paralel olduğu bütün noktaları bulun. Eğriyi ve teğet(ler)ini denklemleriyle isimlendirerek birlikte çizin.

37 ve 38 alıştırmalarında, eğrinin (a) P noktasındaki teğetinin, (b) Q noktasındaki yatay teğetinin denklemlerini bulun.

37.



38.



Trigonometrik Limitler

39–44 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

39. $\lim_{x \rightarrow 2} \sin \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right)$

40. $\lim_{x \rightarrow -\pi/6} \sqrt{1 + \cos(\pi \csc x)}$

41. $\lim_{x \rightarrow 0} \sec \left[\cos x + \pi \tan \left(\frac{\pi}{4 \sec x} \right) - 1 \right]$

42. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{\pi + \tan x}{\tan x - 2 \sec x} \right)$

43. $\lim_{t \rightarrow 0} \tan \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)$

44. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \left(\frac{\pi \theta}{\sin \theta} \right)$

Basit Harmonik Hareket

45 ve 46 alıştırmalarındaki denklemler bir koordinat doğrusu üzerinde hareket eden bir cismin $s = f(t)$ konum fonksiyonlarıdır (s metre, t saniye). Cismin $t = \pi/4$ sn'deki hızını, süratini, ivmesini ve silkinmesini bulun.

45. $s = 2 - 2 \sin t$

46. $s = \sin t + \cos t$

Teori ve Örnekler

47.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 3x}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu $x = 0$ 'da sürekli yapacak bir c değeri var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

48.

$$g(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu $x = 0$ 'da sürekli yapacak bir b değeri var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

49. $d^{999}/dx^{999}(\cos x)$ 'i bulun.

50. Aşağıdakilerin x 'e göre türevlerinin formüllerini çıkarın.

a. $\sec x$. b. $\csc x$. c. $\cot x$.

T 51. $y = (\cos x)$ 'i $-\pi \leq x \leq 2\pi$ aralığında çizin. Aynı ekranda, $h = 1, 0.5, 0.3$ ve 0.1 için

$$y = \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h}$$

fonksiyonunu çizin. Başka bir çerçeve açarak, $h = -1, -0.5, -0.3$ 'ü deneyin. $h \rightarrow 0^+$ ve $h \rightarrow 0^-$ iken ne olur? Burada gösterilmek istenen olay nedir?

T 52. $y = -\sin x$ 'i $-\pi \leq x \leq 2\pi$ aralığında çizin. Aynı ekranda, $h = 1, 0.5, 0.3$ ve 0.1 için

$$y = \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h}$$

fonksiyonunu çizin. Başka bir çerçeve açarak, $h = -1, -0.5, -0.3$ 'ü deneyin. $h \rightarrow 0^+$ ve $h \rightarrow 0^-$ iken ne olur? Burada gösterilmek istenen olay nedir?

T 53. **Ortalanmış farklar oranı** Ortalanmış farklar oranı

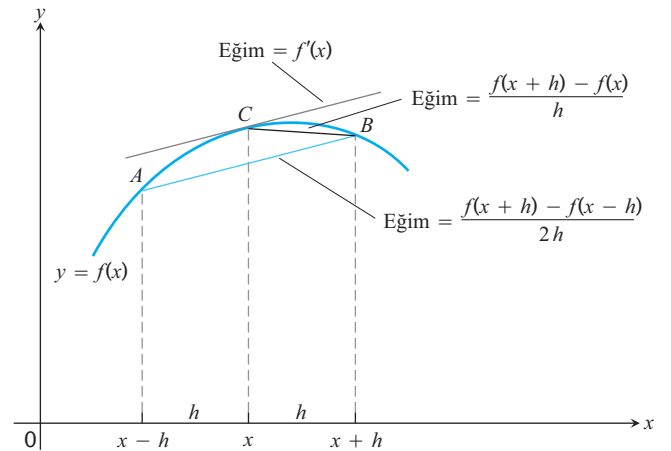
$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$$

sayısal hesaplamalarda $f'(x)$ 'e yaklaşım için kullanılır, çünkü (1) $h \rightarrow 0$ iken, limiti, $f'(x)$ varsa, $f'(x)$ 'i verir, (2) verilen bir h değeri için, Fermat'ın

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

farklar oranından daha iyi bir yaklaşıklık sağlar.

Aşağıdaki şekle bakın.



- a. $f(x) = \sin x$ 'in ortalanmış farklar oranının $f'(x) = \cos x$ 'e ne hızla yakınsadığını görmek için, $y = \cos x$ ve

$$y = \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{2h}$$

fonksiyonlarını, $h = 1, 0.5$ ve 0.3 değerleri için $[-\pi, 2\pi]$ aralığında beraber çizin. Sonuçlarınızı Alıştırma 51'de bulduklarınızla karşılaştırın.

- b. $f(x) = \cos x$ 'in ortalanmış farklar oranının $f'(x) = -\sin x$ 'e ne hızla yakınsadığını görmek için, $y = -\sin x$ ve

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos(x-h)}{2h}$$

fonksiyonlarını, $h = 1, 0.5$ ve 0.3 değerleri için $[-\pi, 2\pi]$ aralığında beraber çizin. Sonuçlarınızı Alıştırma 52'de bulduklarınızla karşılaştırın.

54. Ortalanmış farklar oranları hakkında bir uyarı (Alıştırma 53'ün devamı)

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

farklar oranının, f 'nin x 'te türevi olmadığına, $h \rightarrow 0$ iken bir limiti bulunabilir. Bir deneme olarak, $f(x) = |x|$ alın ve

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0-h|}{2h}.$$

limitini hesaplayın. Göreceğiniz gibi, $f(x) = |x|$ fonksiyonunun $x = 0$ 'da türevi olmamasına rağmen, limit vardır. *Moral:* Bir ortalananmış farklar oranı kullanmadan önce türevin varlığından emin olun.

- T 55. Tanjant fonksiyonunun grafiği üzerinde eğimler** $y = \tan x$ ve türevini $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında birlikte çizin. Tanjant fonksiyonunun grafiğinin en büyük veya en küçük bir eğimi var mıdır? Eğim hiç negatif olur mu? Yanıtlarınızı açıklayın.

- T 56. Kotanjant fonksiyonunun grafiği üzerinde eğimler** $y = \cot x$ ve türevini $0 < x < \pi$ aralığında birlikte çizin. Kotanjant fonksiyonunun grafiğinin en büyük veya en küçük bir eğimi var mıdır? Eğim hiç pozitif olur mu? Yanıtlarınızı açıklayın.

- T 57. $(\sin kx)/x$ 'i araştırmak** $y = (\sin x)/x$, $y = (\sin 2x)/x$, ve $y = (\sin 4x)/x$ grafiklerini $-2 \leq x \leq 2$ aralığında birlikte çizin. Her bir grafik y eksenini nerede keser gibi görünmektedir? Grafikler eksenle gerçekten de kesişirler mi? $y = (\sin 5x)/x$ ve $y = (\sin(-3x))/x$ grafiklerinin $x \rightarrow 0$ iken nasıl davranmalarını beklersiniz? Neden? Peki ya farklı k değerleri için $y = (\sin kx)/x$ grafiği nasıl davranır? Yanıtınızı açıklayın.

- T 58. Radyan ve derece: derece modunda türevler** x radyan yerine derece olarak ölçülürse, $\sin x$ ve $\cos x$ 'in türevlerine ne olur? Aşağıdaki adımları izleyerek bulun.

- a. Grafik programınızı *derece moduna* ayarlayarak,

$$f(h) = \frac{\sin h}{h}$$

fonksiyonunu çizin ve $\lim_{h \rightarrow 0} f(h)$ 'yi tahmin edin. Tahmininizi $\pi/180$ ile karşılaştırın. Limitin $\pi/180$ olması için bir neden var mıdır?

- b. Grafik programınızı yine *derece modunda* olmak üzere,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

limitini hesaplayın.

- c. $\sin x$ 'in türevinin çıkartılışına geri dönün ve buradaki adımları derece modunda limitler olarak tekrarlayın. Türev için nasıl bir formül bulursunuz?
- d. $\cos x$ 'in türevini derece modunda limitler olarak bulun. Türev için nasıl bir formül bulursunuz?
- e. Derece modundaki formüllerin dezavantajı daha yüksek mertebe türevler alırken iyice belirginleşir. $\sin x$ ve $\cos x$ 'in ikinci ve üçüncü mertebe derece modundaki türevleri nedir?

3.5

Zincir Kuralı ve Parametrik Denklemler

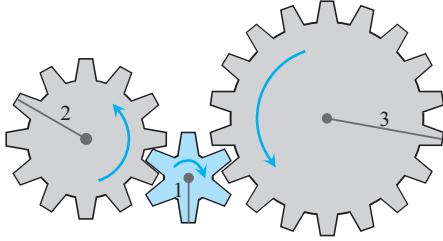
$y = f(u) = \sin u$ ve $u = g(x) = x^2 - 4$ fonksiyonlarının türevlerini nasıl alacağımızı biliyoruz, fakat $F(x) = f(g(x)) = \sin(x^2 - 4)$ gibi bir bileşkenin türevini nasıl alırız? Yani, $F(x) = f \circ g$ 'nin türevini nasıl buluruz? Cevap, iki türevlenebilir fonksiyonun bileşkesinin türevinin, iki fonksiyonun da uygun noktalarda alınmış türevlerinin çarpımı olduğunu söyleyen zincir kuralıdır. Zincir kuralı büyük olasılıkla matematikte en sık kullanılan türev alma yöntemidir. Bu bölüm, kuralı ve nasıl kullanılacağını tanımlamaktadır. Daha sonra kuralı, düzlemde eğrileri ve teğetlerini başka yolla tanımlamak için kullanacağız.

Bir Bileşke Fonksiyonun Türevi

Örneklerle başlıyoruz.

ÖRNEK 1 Türevleri İlişkilendirmek

$y = \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}(3x)$ fonksiyonu $y = \frac{1}{2}u$ ve $u = 3x$ fonksiyonlarının bileşkesidir. Bu üç fonksiyonun türevlerinin arasındaki ilişki nedir?



C: y dönüş B: u dönüş A: x dönüş

ŞEKİL 3.26 A dişlisi x kere dönerken, B dişlisi u kere, C dişlisi ise y kere döner. Çevrelerini karşılaştırarak veya dişlerini sayarak, $y = u/2$ (B 'nin her bir dönüşü için, C yarım dönüş yapar), $u = 3x$ (A 'nın her bir dönüşü için, B üç defa döner), yani $y = 3x/2$ olduğunu görürüz. Dolayısıyla $dy/dx = 3/2 = (1/2)(3) = (dy/du)(du/dx)$ olur.

Çözüm

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}, \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{2}, \quad \text{ve} \quad \frac{du}{dx} = 3$$

olduğunu biliyoruz. $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3$ olduğundan,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

buluruz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

olması bir tesadüf müdür? Türevi bir değişim oranı olarak düşünersek, şimdiye kadar öğrendiklerimiz bu ilişkinin mantıklı olduğunu gösterir. $y = f(u)$ ve $u = g(x)$ için, y u 'nun yarısı kadar hızlı değişiyor ve u da x 'in üç katı kadar hızlı değişiyorsa, y 'nin x 'in $3/2$ katı hızlı değişmesini bekleriz. Bu çoklu bir dişli sisteminin etkisiyle aynıdır (Şekil 3.26). ■

ÖRNEK 2

$$y = 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2 + 1)^2$$

$y = u^2$ ve $u = 3x^2 + 1$ fonksiyonlarının bileşkesidir. Türevleri hesaplarsak,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} &= 2u \cdot 6x \\ &= 2(3x^2 + 1) \cdot 6x \\ &= 36x^3 + 12x \end{aligned}$$

olduğunu görürüz. Türevleri açık formülden hesaplarsak

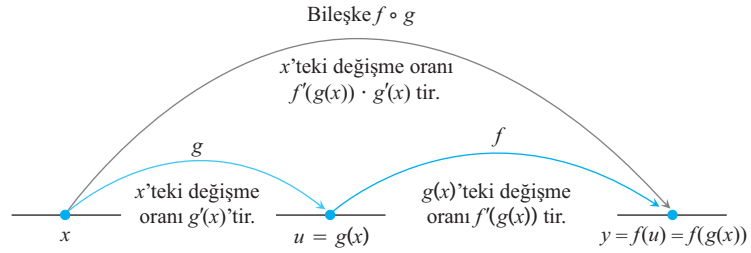
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(9x^4 + 6x^2 + 1) \\ &= 36x^3 + 12x \end{aligned}$$

elde ederiz. Bir kere daha

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

ile karşılaştırırız.

$f(g(x))$ bileşke fonksiyonunun x 'teki türevi f 'nin $g(x)$ 'teki türevi çarpı g 'nin x 'teki türevidir. Buna zincir kuralı denir (Şekil 3.27). ■



ŞEKİL 3.27 Değişim oranları çarpılır: $f \circ g$ 'nin x 'teki türevi f 'nin $g(x)$ noktasındaki türevi çarpı g 'nin x 'teki türevidir.

TEOREM 3 Zincir Kuralı

$f(u)$ $u = g(x)$ noktasında türevlenebiliyorsa ve $g(x)$ de x 'te türevlene biliyorsa, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ bileşke fonksiyonu da x 'de türevlenebilir ve bu türev

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

olur. Leibnitz gösterimiyle, $y = f(u)$ ve $u = g(x)$ ise, bu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

olarak yazılır. Burada dy/du $u = g(x)$ 'te hesaplanmaktadır.

Zincir Kuralının Sezgisel "İspatı":

x 'teki Δx değişimine karşılık u 'daki değişme Δu olsun, yani

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

olsun. Buna karşılık y 'deki değişme

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

olur.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

[1]

yazmak ve $\Delta x \rightarrow 0$ iken limit almak ilginç olabilir:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

(g sürekli olduğundan $\Delta x \rightarrow 0$ için $\Delta u \rightarrow 0$ olduğuna dikkat edin)

Bu akıl yürütmedeki tek pürüz şu olabilir: (1) denkleminde $\Delta u = 0$ olabilir ($\Delta u \neq 0$ olduğu halde) ve şüphesiz ki 0 ile bölemeyiz. İspat, bu pürüzün üstesinden gelmek için farklı bir yaklaşım gerektirmektedir ve Bölüm 3.8 de tam ispatı vereceğiz. ■

ÖRNEK 3 Zincir Kuralını Uygulamak

x -ekseni üzerinde hareket eden bir cismin her $t \geq 0$ zamanındaki konumu $x(t) = \cos(t^2 + 1)$ ile veriliyor. Cismin hızını, t 'nin bir fonksiyonu olarak bulun.

Çözüm Hızın dx/dt olduğunu biliyoruz. Bu arada, x bir bileşke fonksiyondur: $x = \cos(u)$ ve $u = t^2 + 1$.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{du} &= -\sin(u) & x &= \cos(u) \\ \frac{du}{dt} &= 2t & u &= t^2 + 1\end{aligned}$$

buluruz. Zincir kuralına göre,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\ &= -\sin(u) \cdot 2t & \frac{dx}{du} & u \text{ 'da hesaplanır.} \\ &= -\sin(t^2 + 1) \cdot 2t \\ &= -2t \sin(t^2 + 1)\end{aligned}$$

bulunur. Örnek 3'te gördüğümüz gibi, Leibniz notasyonundaki zorluk, türevlerin tam olarak nerede hesaplandığını belirtmemesindedir.

“İç-Dış” Kuralı

Bazen zincir kuralını şu şekilde düşünmek yararlı olabilir: $y = f(g(x))$ ise

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

dir. Yani, “dış” fonksiyon f 'nin türevini alın ve “iç” fonksiyon $g(x)$ 'e dokunmayın; sonra da iç fonksiyon $g(x)$ 'in türeviyle çarpın.

ÖRNEK 4 Dıştan İçe Türev Almak

$\sin(x^2 + x)$ 'in x 'e göre türevini alın.

Çözüm

$$\frac{d}{dx} \sin(\underbrace{x^2 + x}_{\text{iç}}) = \cos(\underbrace{x^2 + x}_{\text{iç aynı bırakılmış}}) \cdot \underbrace{(2x + 1)}_{\text{için türevi}}$$

Zincir Kuralının Üst Üste Kullanılması

Bazen bir türevi bulabilmek için zincir kuralını iki veya daha fazla defa kullanmamız gerekebilir. Aşağıda buna bir örnek verilmektedir.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Johann Bernoulli
(1667–1748)

ÖRNEK 5 Üç Halkalı Bir “Zincir”

$g(t) = \tan(5 - \sin 2t)$ fonksiyonunun türevini bulun.

Çözüm Burada şuna dikkat edin, teğet $5 - \sin 2t$ ’nin fonksiyonudur. Oysa sinüs fonksiyonu, kendisi de t ’nin bir fonksiyonu olan $2t$ ’nin fonksiyonudur. Bu nedenle Zincir Kuralı’ndan

$$\begin{aligned}
 g'(t) &= \frac{d}{dt}(\tan(5 - \sin 2t)) \\
 &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot \frac{d}{dt}(5 - \sin 2t) && u = 5 - \sin 2t \text{ olmak üzere } \tan u \text{’nun türevi} \\
 &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot \left(0 - \cos 2t \cdot \frac{d}{dt}(2t)\right) && u = 2t \text{ olmak üzere } 5 - \sin u \text{’nun türevi} \\
 &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (-\cos 2t) \cdot 2 \\
 &= -2(\cos 2t) \sec^2(5 - \sin 2t)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Zincir Kuralı ve Bir Fonksiyonun Kuvveti

f , u ’nun türevlenebilir bir fonksiyonu ve u da x ’in türevlenebilir bir fonksiyonu ise,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

zincir kuralında $y = f(u)$ yazmak

$$\frac{d}{dx} f(u) = f'(u) \frac{du}{dx}$$

formülüne götürür.

Nasıl çalıştığına dair bir örnek aşağıdadır: n bir tamsayıysa, pozitif veya negatif, ve $f(u) = u^n$ ise, Kuvvet Kuralı (2 ve 7 Kuralları) $f'(u) = nu^{n-1}$ olduğunu söyler. u , x ’in türevlenebilir bir fonksiyonu ise bunu, Zincir Kuralını **Kuvvet Zincir Kuralı**’na genişletmek için kullanabiliriz:

$$\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}. \quad \frac{d}{du}(u^n) = nu^{n-1}$$

ÖRNEK 6 Kuvvet Zincir Kuralını Uygulamak

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \frac{d}{dx} (5x^3 - x^4)^7 &= 7(5x^3 - x^4)^6 \frac{d}{dx} (5x^3 - x^4) && u = 5x^3 - x^4, n = 7 \text{ ile Kuvvet Zincir Kuralı} \\
 &= 7(5x^3 - x^4)^6 (5 \cdot 3x^2 - 4x^3) \\
 &= 7(5x^3 - x^4)^6 (15x^2 - 4x^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3x - 2} \right) &= \frac{d}{dx} (3x - 2)^{-1} \\
 &= -1(3x - 2)^{-2} \frac{d}{dx} (3x - 2) && u = 3x - 2, n = -1 \text{ ile Kuvvet Zincir Kuralı} \\
 &= -1(3x - 2)^{-2} (3) \\
 &= -\frac{3}{(3x - 2)^2}
 \end{aligned}$$

(b) şıkında türevi bölme kuralıyla da bulabilirdik.

$\sin^n x$ 'in anlamı $(\sin x)^n$, $n \neq -1$.

ÖRNEK 7 Teğet Eğimlerini Bulmak

(a) $y = \sin^5 x$ eğrisine $x = \pi/3$ noktasında teğet olan doğrunun eğimini bulunuz.

(b) $y = 1/(1 - 2x)^3$ eğrisine teğet olan her doğrunun eğiminin pozitif olduğunu gösterin.

Çözüm

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{dy}{dx} &= 5 \sin^4 x \cdot \frac{d}{dx} \sin x & u = \sin x, n = 5 \text{ ile Kuvvet Zincir Kuralı} \\ &= 5 \sin^4 x \cos x \end{aligned}$$

Teğet doğrusunun eğimi

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\pi/3} = 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{45}{32}.$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (1 - 2x)^{-3} \\ &= -3(1 - 2x)^{-4} \cdot \frac{d}{dx} (1 - 2x) & u = (1 - 2x), n = -3 \text{ Kuvvet Zincir Kuralı} \\ &= -3(1 - 2x)^{-4} \cdot (-2) \\ &= \frac{6}{(1 - 2x)^4} \end{aligned}$$

Eğri üzerindeki her (x, y) noktasında, $x \neq 1/2$ dir ve teğet doğrunun eğimi, pozitif iki sayının oranı olan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{(1 - 2x)^4}$$

tür. ■

ÖRNEK 8 Radyan ve derece

$\sin x$ ve $\cos x$ 'in türev formüllerinin x 'in derece *değil*, radyan olarak ölçüldüğü varsayımı altında çıkarıldığını unutmamak çok önemlidir. Zincir kuralı bu ikisi arasındaki farkı anlamaya daha iyi yardımcı olur. $180^\circ = \pi$ radyan olduğu için, $x^\circ = \pi x/180$ radyan olur.

Zincir kuralını kullanarak,

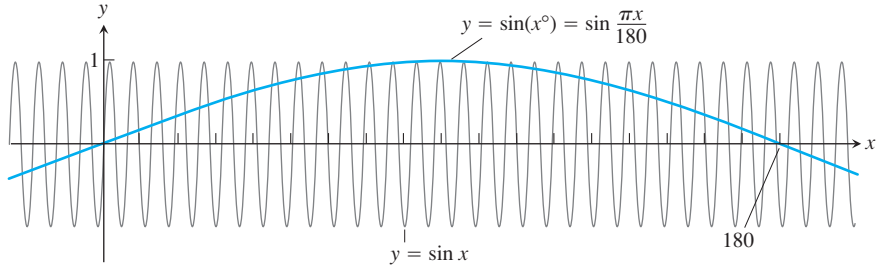
$$\frac{d}{dx} \sin(x^\circ) = \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180} \cos\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180} \cos(x^\circ)$$

buluruz. Şekil 3.28'e bakın. Aynı şekilde, $\cos(x^\circ)$ 'nin türevi $-(\pi/180)\sin(x^\circ)$ olur.

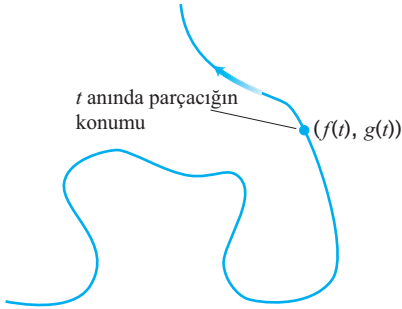
Daha ilk türevde rahatsız edici görünen $\pi/180$ faktörü üst üste türev almayla daha da belirginleşecektir. Bir bakışta radyan ölçü kullanmanın neden daha çekici olduğu anlaşılmaktadır. ■

Parametrik Denklemler

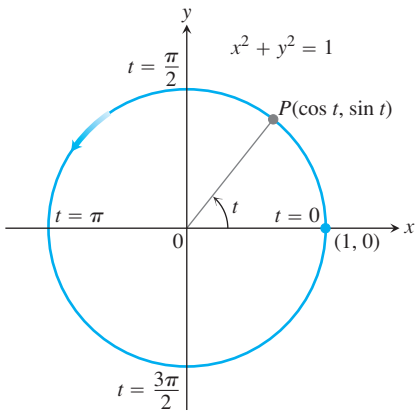
Bir eğriyi, eğri üzerindeki bir $P(x, y)$ noktasının y -koordinatını x 'in bir fonksiyonu olarak ifade etmekle tanımlamak yerine, bazen *her iki* koordinatı da bir üçüncü değişken t cinsinden ifade etmek daha uygundur. Şekil 3.29 da bir cismin, bir çift denklem $x = f(t)$, $y = g(t)$, ile tanımlı yolu görülmektedir. Hareket incelemesinde t genellikle zamanı gös-



ŞEKİL 3.28 $\sin x$ 'in salınmasına karşın $\sin(x^0)$ sadece $\pi/180$ defa fazla salınır. Maksimum eğimi, $x=0$ da $\pi/180$ 'dir (Örnek 8).



ŞEKİL 3.29 xy -düzleminde ilerleyen bir parçacığın izlediği yol her zaman x 'in veya y 'nin bir fonksiyonunun grafiği değildir.



ŞEKİL 3.30 $x = \cos t$, $y = \sin t$ denklemleri $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindeki hareketi tanımlarlar. Ok artan t yönünü göstermektedir (Örnek 9).

terir. Bu gibi denklemler, herhangi bir t anında parçacığın $(x, y) = (f(t), g(t))$ konumunu verdikleri için bir kartezyen formülden daha iyidirler.

TANIM Parametrik Eğri

x ve y , bir t değerleri aralığında

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

fonksiyonları olarak verilmişse, bu denklemlerle tanımlanan $(x, y) = (f(t), g(t))$ noktalarının kümesi **bir parametrik eğridir**. Denklemler, eğrinin **parametrik denklemleridir**.

t değişkeni eğrinin bir parametresi ve tanım kümesi I , **parametre aralığıdır**. I kapalı bir aralıksa, $a \leq t \leq b$, $(f(a), g(a))$ noktası eğrinin başlangıç noktası ve $(f(b), g(b))$ noktası eğrinin **bitiş noktasıdır**. Düzlemdeki bir eğri için parametrik denklemleri ve parametre aralığını verirken, eğriyi **parametrize ettiğimizi** söyleriz. Denklemler ve aralık eğrinin **parametrizasyonunu** verir.

ÖRNEK 9 Bir Çember Üzerinde Saat Yönünün Tersine Hareket

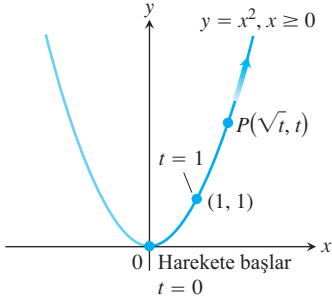
Aşağıdaki parametrik eğrilerin grafiklerini çizin

- (a) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
 (b) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Çözüm

(a) $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ olduğundan, parametrik eğri $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindedir. t 0'dan 2π 'ye artarken $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ noktası $(1, 0)$ 'dan başlar ve saat yönünün tersine olarak bütün çemberi çizer (Şekil 3.30).

(b) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ için $x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t = a^2$ dir. Parametrizasyon, $(a, 0)$ başlayıp $x^2 + y^2 = a^2$ çemberini saat yönünün tersine bir defa kat eden ve $t = 2\pi$ 'de $(a, 0)$ noktasına dönen hareketi tanımlar. ■



ŞEKİL 3.31 $x = \sqrt{t}$ ve $y = t$ denklemleri ve $t \geq 0$ aralığı, $y = x^2$ parabolünün sağ kolunda ilerleyen bir parçacığın hareketini tanımlar (Örnek 10).

ÖRNEK 10 Bir Parabol Boyunca Hareket

xy -düzleminde ilerleyen bir parçacığın $P(x, y)$ konumu

$$x = \sqrt{t}, \quad y = t, \quad t \geq 0$$

denklemleri ve parametre aralığıyla verilmektedir. Parçacığın izlediği yolu belirleyin ve hareketi tanımlayın.

Çözüm İzlenen yolu $x = \sqrt{t}$ ve $y = t$ denklemleri arasında t 'yi yok ederek bulmaya çalışırız. Şansımız varsa, bu x ile y arasında tanımlanabilir bir cebirsel bağıntı verecektir. Bu şekilde

$$y = t = (\sqrt{t})^2 = x^2$$

buluruz. Bu, parçacığın konum koordinatlarının $y = x^2$ denklemini sağladığını gösterir, dolayısıyla parçacık $y = x^2$ parabolü boyunca hareket eder.

Ancak parçacığın izlediği yolun tüm $y = x^2$ parabolü olduğunu düşünmek bir hatadır—bu yol parabolün sadece yarısıdır. Parçacığın x koordinatı hiçbir zaman negatif değildir. Parçacık $t = 0$ iken $(0, 0)$ 'dan harekete başlar ve t arttıkça birinci dördte bir bölgede yükselir (Şekil 3.31). Parametre aralığı $[0, \infty)$ dur ve bir bitiş noktası yoktur. ■

ÖRNEK 11 Bir Doğru Parçasını Parametrelmek

Uç noktaları $(-2, 1)$ ve $(3, 5)$ olan doğru parçasının bir parametrisasyonunu bulun.

Çözüm $(-2, 1)$ noktasını kullanarak

$$x = -2 + at, \quad y = 1 + bt$$

parametrik denklemlerini oluştururuz. Her iki denklemi t 'ye göre çözer ve eşitlersek

$$\frac{x + 2}{a} = \frac{y - 1}{b}$$

elde ederiz. Bu eşitlikten, denklemlerin bir doğruyu temsil ettiklerini görürüz. Bu doğru, $t = 0$ iken $(-2, 1)$ den geçer. $t = 1$ iken doğru $(3, 5)$ noktasından geçecek şekilde a ve b değerlerini belirleriz.

$$\begin{aligned} 3 &= -2 + a & \Rightarrow & a = 5 & t = 1 \text{ için } x = 3 \\ 5 &= 1 + b & \Rightarrow & b = 4 & t = 1 \text{ için } y = 5 \end{aligned}$$

Bu nedenle,

$$x = -2 + 5t, \quad y = 1 + 4t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

denklemleri, başlangıç noktası $(-2, 1)$ ve bitiş noktası $(3, 5)$ olan doğru parçasının bir parametrisasyonudur. ■

Parametrize Eğrilerin Eğimleri

f ve g fonksiyonları t 'de türevlenebiliyorsa, parametrize $x = f(t)$, $y = g(t)$ eğrisi de t 'de **türevlenebilirdir**. y 'nin de x 'in sürekli bir fonksiyonu olduğu türevlenebilir parametrize bir eğrinin üzerindeki bir noktada dy/dt , dx/dt ve dy/dx türevleri Zincir Kuralı'na göre bağılırlar:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$dx/dt \neq 0$ ise, denklemin iki tarafını da dx/dt ile bölerek, dy/dx 'i çözebiliriz.

dy/dx İçin Parametrik FormülHer üç türev varsa ve $dx/dt \neq 0$ ise

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad (2)$$

dir.

ÖRNEK 12 Parametre ile Türetmek $x = 2t + 3$ ve $y = t^2 - 1$ ise dy/dx 'in $t = 6$ 'daki değerini bulun.**Çözüm** (2) denklemini dy/dx 'i t 'nin bir fonksiyonu olarak verir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t}{2} = t = \frac{x-3}{2}$$

 $t = 6$ için $dy/dx = 6$ olur. Şuna dikkat edin, dy/dx türevini x 'in bir fonksiyonu olarak da bulabiliriz.**ÖRNEK 13** $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ Elipsi Boyunca Hareket t anındaki konumu $P(x, y)$

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

ile verilen bir parçacığın hareketini tanımlayın. $t = \pi/4$ olduğu $(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$, noktasında eğriye teğet olan doğruyu bulun (a ve b sabitlerinin her ikisi de pozitifdir).**Çözüm**

$$\cos t = \frac{x}{a}, \quad \sin t = \frac{y}{b}$$

denklemlerinden t 'yi yok ederek, parçacığın konumu için bir Kartezyen denklem buluruz. Bunu $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ bağıntısını kullanarak yaparız. Bu bağıntı

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad \text{veya} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

verir. Parçacığın (x, y) koordinatları $(x^2/a^2) = (y^2/b^2) = 1$ denklemini sağlar, dolayısıyla parçacık bu elips üzerinde hareket eder. $t = 0$ iken parçacığın koordinatları

$$x = a \cos(0) = a, \quad y = b \sin(0) = 0$$

olur, dolayısıyla hareket $(a, 0)$ 'da başlar. t artarken, parçacık yükselir ve saat yönünün tersine sola doğru hareket eder. Elipsi bir kere dolaşarak $t = 2\pi$ iken başlangıç noktası $(a, 0)$ 'a döner. $t = \pi/4$ için elipse teğet olan doğrunun eğimi

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\pi/4} &= \left. \frac{dy/dt}{dx/dt} \right|_{t=\pi/4} \\ &= \left. \frac{b \cos t}{-a \sin t} \right|_{t=\pi/4} \\ &= \frac{b/\sqrt{2}}{-a/\sqrt{2}} = -\frac{b}{a} \end{aligned} \quad \text{Denklem (2)}$$

dir.

Teğet doğru

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a} \left(x - \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$$

$$y = \frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{b}{a} \left(x - \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$$

veya

$$y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b$$

Parametrik denklemler y' 'yi x 'in iki kere türevlenebilir bir fonksiyonu olarak tanımlıyorsa, d^2y/dx^2 'yi t 'nin bir fonksiyonu olarak hesaplamak için Denklem (2) yi $dy/dx = y''$ ye uygulayabiliriz:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt} \cdot \quad (2) \text{ denkleminde } y \text{ yerine } y' \text{ yazılmış.}$$

d^2y/dx^2 İçin Parametrik Formül

$x = f(t)$, $y = g(t)$ denklemleri y' 'yi x 'in iki kere türevlenebilir bir fonksiyonu olarak tanımlıyorsa, $dx/dt \neq 0$ olan her noktada

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} \quad (3)$$

ÖRNEK 14 Parametrize Bir Eğri İçin d^2y/dx^2 'yi Bulmak

$x = t - t^2$ ve $y = t - t^3$ ise d^2y/dx^2 'yi bulun.

d^2y/dx^2 'yi t cinsinden bulmak

1. $y' = dy/dx$ 'i t cinsinden ifade edin.
2. dy'/dt 'yi bulun.
3. dy'/dt 'yi dx/dt ile bölün.

Çözüm

1. $y' = dy/dx$ 'i t cinsinden ifade edin:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}$$

2. y' 'nin t 'ye göre türevini alın:

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1 - 3t^2}{1 - 2t} \right) = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^2} \quad \text{Bölüm Kuralı}$$

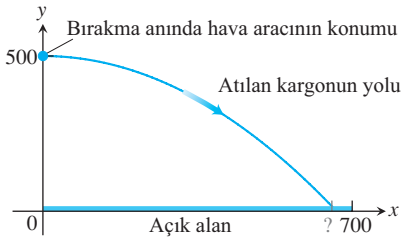
3. dy'/dt 'yi dx/dt ile bölün.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{(2 - 6t + 6t^2)/(1 - 2t)^2}{1 - 2t} = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^3} \quad \text{Denklem (3)}$$

ÖRNEK 15 Acil Yardım İçin Erzak Atmak

Bir Kızılhaç hava aracı, bir felaket bölgesine acil yardım için yiyecek ve ilaç atmaktadır. Hava aracı, erzağı 700 ft uzunluğundaki açık bir alanın hemen kenarının üzerinde bırakırsa ve kargo

$$x = 120t \quad \text{ve} \quad y = -16t^2 + 500, \quad t \geq 0$$



ŞEKİL 3.32 Örnek 15'teki atılan erzak kargosunun izlediği yol

yolunu izlerse kargo alan içine düşer mi? x ve y koordinatları feet olarak ve t parametresi (bırakma dan itibaren) saniye olarak ölçülmektedir. Düşen kargonun yolu için bir Kartezyen denklem bulun (Şekil 3.32) ve yere çarptığı anda alçalmasının ilerlemesine oranını bulun.

Çözüm Kargo, $y = 0$ iken yere çarpar ve bu da t 'nin

$$-16t^2 + 500 = 0 \quad y = 0 \text{ koyun}$$

$$t = \sqrt{\frac{500}{16}} = \frac{5\sqrt{5}}{2} \text{ sn} \quad t \geq 0$$

anında görülür. Bırakılma anında x -koordinatı $x = 0$ dır. Kargonun yere çarpması anında x -koordinatı

$$x = 120t = 120\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right) = 300\sqrt{5} \text{ ft.}$$

dir. $300\sqrt{5} \approx 670.8 < 700$ olduğundan kargo alan içine düşer.

Parametrik denklemler arasında t parametresini yok ederek kargo'nun yolu için bir kartezyen denklem buluruz:

$$y = -16t^2 + 500 \quad y\text{'nin parametrik denklemi}$$

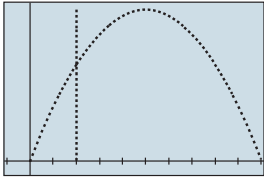
$$= -16\left(\frac{x}{120}\right)^2 + 500 \quad x = 120t \text{ eşitliğinden } t\text{'yi yerine yazın.}$$

$$= -\frac{1}{900}x^2 + 500 \quad \text{Bir parabol}$$

Kargo yere çarptığında alçalmasının ilerlemesine oranı

$$\begin{aligned} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=5\sqrt{5}/2} &= \left.\frac{dy/dt}{dx/dt}\right|_{t=5\sqrt{5}/2} && \text{Denklem (2)} \\ &= \left.\frac{-32t}{120}\right|_{t=5\sqrt{5}/2} \\ &= -\frac{2\sqrt{5}}{3} \approx -1.49 \end{aligned}$$

dir. Böylece, kargo yere çarptığı anda 1 foot (ayak = 30.4 cm) ilerlemesine karşılık 1.5 feet alçalıyordu. ■



$$\begin{cases} x(t) = 2 \\ y(t) = 160t - 16t^2 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 160t - 16t^2 \end{cases}$$

nokta modunda

TEKNOLOJİ KULLANMAK Dikey Bir Doğru Üzerindeki Hareketin Simülasyonu

$$x(t) = c, \quad y(t) = f(t)$$

Parametrik denklemleri $x = c$ doğrusu üzerindeki noktaları aydınlatacaktır. $f(t)$, hareket etmekte olan bir cismin t anındaki yüksekliğini gösteriyorsa, $x(t), y(t) = (c, f(t))$ 'yi çizmek asıl hareketi simüle edecektir. Bunu, Bölüm 3.3, Örnek 5'teki kaya için, $x(t) = 2$ ve örneğin, $y(t) = 160t - 16t^2$ ile nokta modunda t adımı için deneyin. Noktalar arasındaki boşluk değişiyor? Tepeye ulaşıldığında, grafik çizici neden stop etmiş gibi gözüküyor? ($0 \leq t \leq 5$ ve $5 \leq t \leq 10$ için ayrı çizimler deneyin.)

İkinci bir deney için,

$$x(t) = t \text{ ve } y(t) = 160t - 16t^2$$

parametrik denklemlerini, hareketin dikey simülasyonu ile birlikte yine nokta modunda çizin. Bütün ilginç davranışı gösterecek bir çerçeve ölçüsü seçmek için, Örnek 5'teki hesaplamalardan, kayanın davranışı hakkındaki bildiklerinizi kullanın.

Standart Parametrizasyonlar ve Türev Kuralları

ÇEMBER $x^2 + y^2 = a^2$:

$$x = a \cos t$$

$$y = a \sin t$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

ELİPS $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

FONKSİYON $y = f(x)$:

$$x = t$$

$$y = f(t)$$

TÜREVLER

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y/dt^2}{dx/dt}$$

ALİŞTIRMALAR 3.5

Türev Hesaplamaları

1–8 alıştırmalarında, $y = f(u)$ ve $u = g(x)$ verilmiştir. $dy/dx = f'(g(x))g'(x)$ 'i bulun.

1. $y = 6u - 9$, $u = (1/2)x^4$
2. $y = 2u^3$, $u = 8x - 1$
3. $y = \sin u$, $u = 3x + 1$
4. $y = \cos u$, $u = -x/3$
5. $y = \cos u$, $u = \sin x$
6. $y = \sin u$, $u = x - \cos x$
7. $y = \tan u$, $u = 10x - 5$
8. $y = -\sec u$, $u = x^2 + 7x$

9–18 alıştırmalarında, fonksiyonu $y = f(u)$ ve $u = g(x)$ şeklinde yazın. dy/dx 'i x 'in bir fonksiyonu olarak bulun.

9. $y = (2x + 1)^5$
10. $y = (4 - 3x)^9$
11. $y = \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{-7}$
12. $y = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^{-10}$
13. $y = \left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^4$
14. $y = \left(\frac{x}{5} + \frac{1}{5x}\right)^5$
15. $y = \sec(\tan x)$
16. $y = \cot\left(\pi - \frac{1}{x}\right)$
17. $y = \sin^3 x$
18. $y = 5 \cos^{-4} x$

19–38 alıştırmalarındaki fonksiyonların türevlerini bulun.

19. $p = \sqrt{3 - t}$
20. $q = \sqrt{2r - r^2}$
21. $s = \frac{4}{3\pi} \sin 3t + \frac{4}{5\pi} \cos 5t$

$$22. s = \sin\left(\frac{3\pi t}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$$

$$23. r = (\csc \theta + \cot \theta)^{-1} \quad 24. r = -(\sec \theta + \tan \theta)^{-1}$$

$$25. y = x^2 \sin^4 x + x \cos^{-2} x \quad 26. y = \frac{1}{x} \sin^{-5} x - \frac{x}{3} \cos^3 x$$

$$27. y = \frac{1}{21} (3x - 2)^7 + \left(4 - \frac{1}{2x^2}\right)^{-1}$$

$$28. y = (5 - 2x)^{-3} + \frac{1}{8} \left(\frac{2}{x} + 1\right)^4$$

$$29. y = (4x + 3)^4 (x + 1)^{-3} \quad 30. y = (2x - 5)^{-1} (x^2 - 5x)^6$$

$$31. h(x) = x \tan(2\sqrt{x}) + 7 \quad 32. k(x) = x^2 \sec\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$33. f(\theta) = \left(\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}\right)^2 \quad 34. g(t) = \left(\frac{1 + \cos t}{\sin t}\right)^{-1}$$

$$35. r = \sin(\theta^2) \cos(2\theta) \quad 36. r = \sec \sqrt{\theta} \tan\left(\frac{1}{\theta}\right)$$

$$37. q = \sin\left(\frac{t}{\sqrt{t+1}}\right) \quad 38. q = \cot\left(\frac{\sin t}{t}\right)$$

39–48 alıştırmalarında dy/dt 'yi bulun.

39. $y = \sin^2(\pi t - 2)$
40. $y = \sec^2 \pi t$
41. $y = (1 + \cos 2t)^{-4}$
42. $y = (1 + \cot(t/2))^{-2}$

$$43. y = \sin(\cos(2t - 5)) \quad 44. y = \cos\left(5 \sin\left(\frac{t}{3}\right)\right)$$

$$45. y = \left(1 + \tan^4\left(\frac{t}{12}\right)\right)^3 \quad 46. y = \frac{1}{6}\left(1 + \cos^2(7t)\right)^3$$

$$47. y = \sqrt{1 + \cos(t^2)} \quad 48. y = 4 \sin(\sqrt{1 + \sqrt{t}})$$

İkinci Türevler

49–52 alıştırmalarında y'' 'nü bulun.

$$49. y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 \quad 50. y = (1 - \sqrt{x})^{-1}$$

$$51. y = \frac{1}{9} \cot(3x - 1) \quad 52. y = 9 \tan\left(\frac{x}{3}\right)$$

Türevlerin Sayısal Değerlerini Bulma

53–58 alıştırmalarında, verilen x değerinde $(f \circ g)'$ 'nin değerini bulun.

$$53. f(u) = u^5 + 1, \quad u = g(x) = \sqrt{x}, \quad x = 1$$

$$54. f(u) = 1 - \frac{1}{u}, \quad u = g(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x = -1$$

$$55. f(u) = \cot \frac{\pi u}{10}, \quad u = g(x) = 5\sqrt{x}, \quad x = 1$$

$$56. f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}, \quad u = g(x) = \pi x, \quad x = 1/4$$

$$57. f(u) = \frac{2u}{u^2 + 1}, \quad u = g(x) = 10x^2 + x + 1, \quad x = 0$$

$$58. f(u) = \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^2, \quad u = g(x) = \frac{1}{x^2} - 1, \quad x = -1$$

$$59. f \text{ ile } g \text{ fonksiyonları ve türevlerinin } x = 2 \text{ ve } x = 3 \text{ 'teki değerleri aşağıda verilmiştir.}$$

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	1/3	-3
3	3	-4	2π	5

Aşağıdaki kombinasyonların verilen x değerlerinde x 'e göre türevlerini bulun.

$$a. 2f(x), \quad x = 2 \quad b. f(x) + g(x), \quad x = 3$$

$$c. f(x) \cdot g(x), \quad x = 3 \quad d. f(x)/g(x), \quad x = 2$$

$$e. f(g(x)), \quad x = 2 \quad f. \sqrt{f(x)}, \quad x = 2$$

$$g. 1/g^2(x), \quad x = 3 \quad h. \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}, \quad x = 2$$

$$60. f \text{ ile } g \text{ fonksiyonları ve türevlerinin } x = 0 \text{ ve } x = 1 \text{ 'teki değerleri aşağıda verilmiştir.}$$

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	1/3
1	3	-4	-1/3	-8/3

Aşağıdaki kombinasyonların verilen x değerlerinde x 'e göre türevlerini bulun.

$$a. 5f(x) - g(x), \quad x = 1 \quad b. f(x)g^3(x), \quad x = 0$$

$$c. \frac{f(x)}{g(x) + 1}, \quad x = 1 \quad d. f(g(x)), \quad x = 0$$

$$e. g(f(x)), \quad x = 0 \quad f. (x^{11} + f(x))^{-2}, \quad x = 1$$

$$g. f(x + g(x)), \quad x = 0$$

$$61. s = \cos \theta \text{ ve } d\theta/dt = 5 \text{ ise, } \theta = 3\pi/2 \text{ iken } ds/dt \text{ 'yi bulun.}$$

$$62. y = x^2 + 7x - 5 \text{ ve } dx/dt = 1/3 \text{ ise, } x = 1 \text{ iken } dy/dt \text{ 'yi bulun.}$$

Bileşke Seçimi

Bir fonksiyonu bir bileşke olarak farklı şekillerde yazabiliyorsanız, ne olur? Her seferinde aynı türevi bulabilir misiniz? Zincir kuralı böyle olduğunu söyler. Bunu 63 ve 64 alıştırmalarındaki fonksiyonlarla deneyin.

$$63. y = x \text{ ise } y \text{ 'yi aşağıdaki bileşkeler olarak kabul edip, zincir kuralını kullanarak } dy/dx \text{ 'i bulun.}$$

$$a. y = (u/5) + 7 \text{ ve } u = 5x - 35$$

$$b. y = 1 + (1/u) \text{ ve } u = 1/(x-1)$$

$$64. y = x^{3/2} \text{ ise } y \text{ 'yi aşağıdaki bileşkeler olarak kabul edip, zincir kuralını kullanarak } dy/dx \text{ 'i bulun.}$$

$$a. y = u^3 \text{ ve } u = \sqrt{x}$$

$$b. y = \sqrt{u} \text{ ve } u = x^3.$$

Teğet ve Eğimler

$$65. a. y = 2 \tan(\pi x/4) \text{ eğrisinin } x = 1 \text{ 'deki teğetini bulun.}$$

$$b. \text{ Bir tanjant eğrisi üzerinde eğimler Bu eğrinin } -2 < x < 2 \text{ aralığında alabileceği en küçük eğim değeri nedir? Yanıtınızı açıklayın.}$$

$$66. \text{ Sinüs eğrisi üzerinde eğimler}$$

$$a. y = \sin 2x \text{ ve } y = -\sin(x/2) \text{ eğrilerinin orijindeki teğetlerinin denklemlerini bulun. Teğetlerin birbiriyle ilişkisinde bir özellik var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.}$$

$$b. y = \sin mx \text{ ve } y = -\sin(x/m) \text{ (} m \neq 0 \text{ bir sabit) eğrilerinin orijindeki teğetleri hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.}$$

$$c. \text{ Verilen bir } m \text{ için, } y = \sin mx \text{ ve } y = -\sin(x/m) \text{ eğrilerinin teğetlerinin eğimlerinin alabileceği en büyük değerler nedir? Yanıtınızı açıklayın.}$$

$$d. y = \sin x \text{ fonksiyonu } [0, 2\pi], \text{ aralığında bir periyot, } y = \sin 2x \text{ fonksiyonu iki periyot, } y = \sin(x/2) \text{ fonksiyonu ise yarım periyot tamamlar. } y = \sin mx \text{ fonksiyonunun } [0, 2\pi] \text{ aralığında tamamladığı periyot sayısıyla, bu eğrinin orijindeki teğetinin eğimi arasında bir ilişki var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.}$$

Parametrik Denklemlerden Kartezyen Denklemleri Bulmak

67–78 alıştırmaları, xy düzleminde ilerleyen bir parçacığın parametrik denklemlerini ve parametre aralıklarını vermektedir. Parçacığın izlediği yolu bir Kartezyen denklem bularak belirleyin.

Kartezyen denklemin grafiğini çizin. (Grafikler kullanılan denkleme göre değişecektir). Grafiğin, parçacığın kat ettiği parçasını ve hareket yönünü belirtin.

67. $x = \cos 2t, y = \sin 2t, 0 \leq t \leq \pi$
68. $x = \cos(\pi - t), y = \sin(\pi - t), 0 \leq t \leq \pi$
69. $x = 4 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$
70. $x = 4 \sin t, y = 5 \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$
71. $x = 3t, y = 9t^2, -\infty < t < \infty$
72. $x = -\sqrt{t}, y = t, t \geq 0$
73. $x = 2t - 5, y = 4t - 7, -\infty < t < \infty$
74. $x = 3 - 3t, y = 2t, 0 \leq t \leq 1$
75. $x = t, y = \sqrt{1 - t^2}, -1 \leq t \leq 0$
76. $x = \sqrt{t + 1}, y = \sqrt{t}, t \geq 0$
77. $x = \sec^2 t - 1, y = \tan t, -\pi/2 < t < \pi/2$
78. $x = -\sec t, y = \tan t, -\pi/2 < t < \pi/2$

Parametrik Denklemleri Belirlemek

79. $(a, 0)$ noktasından başlayan ve $x^2 + y^2 = a^2$ çemberini çizen bir parçacığın hareketinin parametrik denklemlerini ve parametre aralığını bulun.
 - a. saat yönünde bir kere
 - b. saat yönünün tersine bir kere
 - c. saat yönünde iki kere
 - d. saat yönünün tersine iki kere
 (Bunu yapmanın bir çok yolu vardır, dolayısıyla yanıtlarınız kitabın arkasındakilerle aynı olmayabilir.)
80. $(a, 0)$ noktasından başlayan ve $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ elipsini çizen bir parçacığın hareketinin parametrik denklemlerini ve parametre aralığını bulun.
 - a. saat yönünde bir kere
 - b. saat yönünün tersine bir kere
 - c. saat yönünde iki kere
 - d. saat yönünün tersine iki kere
 Alıştırma 79'da olduğu gibi, bir çok doğru yanıt vardır.)
- 81–86 alıştırma 79'da olduğu gibi, bir çok doğru yanıt bulun.
81. Uç noktaları $(-1, -3)$ ve $(4, 1)$ olan doğru parçası
82. Uç noktaları $(-1, 3)$ ve $(3, -2)$ olan doğru parçası
83. $x - 1 = y^2$ parabolünün alt yarısı
84. $y = x^2 + 2x$ parabolünün sol yarısı
85. Başlangıç noktası $(2, 3)$ olan ve $(-1, -1)$ noktasından geçen ışın (yarım doğru)
86. Başlangıç noktası $(-1, 2)$ olan ve $(0, 0)$ noktasından geçen ışın (yarım doğru)

Parametrize Eğrilerin Teğetleri

87–94 alıştırma 79'da verilen t değerinin tanımladığı noktada eğriye teğet doğrunun denklemini bulun. Ayrıca, bu noktada d^2y/dx^2 'nin değerini de bulun.

87. $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, t = \pi/4$
88. $x = \cos t, y = \sqrt{3} \cos t, t = 2\pi/3$

89. $x = t, y = \sqrt{t}, t = 1/4$
90. $x = -\sqrt{t + 1}, y = \sqrt{3t}, t = 3$
91. $x = 2t^2 + 3, y = t^4, t = -1$
92. $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t = \pi/3$
93. $x = \cos t, y = 1 + \sin t, t = \pi/2$
94. $x = \sec^2 t - 1, y = \tan t, t = -\pi/4$

Teori, Örnekler ve Uygulamalar

95. **Bir aleti çok hızlı çalıştırmak** Bir pistonun aşağı yukarı hareket ettiğini ve t anındaki konumunun, A ve b pozitif olmak üzere

$$s = A \cos(2\pi bt)$$

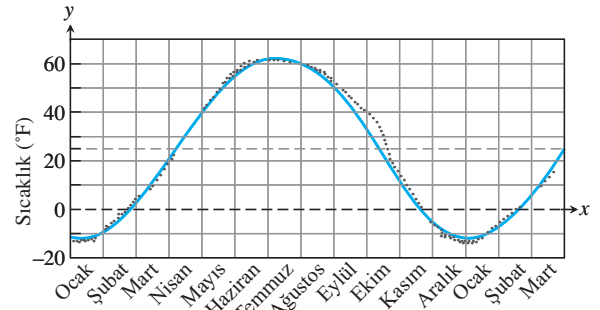
ile verildiğini varsayın. A 'nın değeri hareketin genliği ve b de frekansı (saniyede pistonun aşağı yukarı hareket etme sayısı). Frekansın iki katına çıkarılmasının hız, ivme ve silkinme üzerindeki etkisi ne olur? (Sonucu bulduğunuzda, bir aleti çok hızlı çalıştırdığınızda aletin neden bozulduğunu anlayacaksınız.)

96. **Fairbanks, Alaska'da sıcaklıklar** Şekil 3.33'teki grafik tipik bir 365 günlük yıl boyunca Fairbanks, Alaska'daki ortalama Fahrenheit sıcaklığı göstermektedir. x günündeki sıcaklığa

$$y = 37 \sin \left[\frac{2\pi}{365} (x - 101) \right] + 25$$

denklemleriyle bir yaklaşım yapılabilir.

- a. Sıcaklık hangi günde en hızlı artmaktadır?
- b. En hızlı artışı sırasında, sıcaklık günde ortalama kaç derece artmaktadır?



ŞEKİL 3.33 Fairbanks, Alaska'da hava sıcaklıkları normal ortalaması, veri noktaları olarak çizilmiş ve sinüs yaklaşım fonksiyonu (Alıştırma 96).

97. **Parçacık hareketi** Bir koordinat doğrusu üzerinde ilerleyen bir cismin konumu, s metre ve t saniye olmak üzere, $s = \sqrt{1 + 4t}$ ile verilmektedir. $t = 6$ sn'de hız ve ivmeyi bulun.
98. **Sabit ivme** Düşen bir cismin hızının, başlangıç konumundan s metre düştükten sonra $v = k\sqrt{s}$ (k bir sabit) m/sn olduğunu varsayın. Cismin ivmesinin sabit olduğunu gösterin.

- 99. Düşen meteor** Dünyanın atmosferine giren ağır bir meteorun hızı, dünyanın merkezinden s km uzaktayken $\sqrt{s}$ ile ters orantılıdır. Meteorun ivmesinin s^2 ile ters orantılı olduğunu gösterin.
- 100. Parçacık ivmesi** Bir parçacık x ekseninde $dx/dt = f(x)$ hızıyla ilerlemektedir. Parçacığın ivmesinin $f(x)f'(x)$ olduğunu gösterin.
- 101. Sıcaklık ve bir sarkacın periyodu** Küçük genlikli salınımlar (kısaca sallanmalar) için, basit bir sarkacın periyodu T ile boyu L arasındaki ilişkinin

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

ile verildiğini söyleyebiliriz. Burada g salınının bulunduğu yerdeki sabit yerçekimi ivmesidir. g 'yi santimetre bölü saniye kare olarak ölçersek, L 'yi santimetre ve T 'yi saniye olarak ölçmemiz gerekir. Sarkaç metalden yapılmışsa, uzunluğu, L 'ye orantılı olarak, artacak veya azalacak şekilde sıcaklıkla değişir. Formülü, u sıcaklık ve k oran sabiti olmak üzere

$$\frac{dL}{du} = kL$$

ile verilir. Bunu doğru varsayarak, periyodun sıcaklığa göre değişim oranının $kT/2$ olduğunu gösterin.

- 102. Zincir Kuralı** $f(x) = x^2$ ve $g(x) = |x|$ olduğunu varsayın. Bu durumda $(g \circ f)(x) = |x|^2 = x^2$ ve $(g \circ f)'(x) = |x^2| = x^2$ bileşke fonksiyonlarının ikisi de $(g$ 'nin $x = 0$ 'da türevlenememesine rağmen) $x = 0$ 'da türevlenebilir. Bu zincir kuralıyla çelişir mi? Açıklayın.
- 103. Teğetler** $u = g(x)$ 'in $x = 1$ 'de ve $y = f(u)$ 'nin $u = g(1)$ 'de türevlenebildiğini varsayın. $y = f(g(x))$ grafiğinin $x = 1$ 'de yatay bir teğeti varsa, g 'nin grafiğinin $x = 1$ 'deki teğeti veya f 'nin grafiğinin $u = g(1)$ 'deki teğeti hakkında bir şey söyleyebilir miyiz? Yanıtınızı açıklayın.
- 104.** $u = g(x)$ 'in $x = -5$ 'te, $y = f(u)$ 'nin $u = g(-5)$ 'te türevlenebildiklerini ve $(f \circ g)'(-5)$ 'in negatif olduğunu varsayın. $g'(-5)$ ve $f'(g(-5))$ hakkında bir şey söylenebilir mi?

- T 105. sin 2x'in türevi** $y = 2 \cos 2x$ fonksiyonunu $-2 \leq x \leq 3.5$ aralığında çizin. Aynı ekranda, $h = 1.0, 0.5$ ve 0.2 için

$$y = \frac{\sin 2(x + h) - \sin 2x}{h}$$

fonksiyonunu çizin. Negatif değerler de alarak başka h değerlerini de deneyin. $h \rightarrow 0$ iken ne olduğunu görüyorsunuz? Bu davranışı açıklayın.

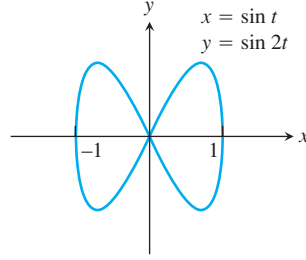
- T 106. cos(x²)'nin türevi** $y = -2x \sin(x^2)$ fonksiyonunu $-2 \leq x \leq 3$ aralığında çizin. Aynı ekranda, $h = 1.0, 0.7$ ve 0.3 için

$$y = \frac{\cos((x + h)^2) - \cos(x^2)}{h}$$

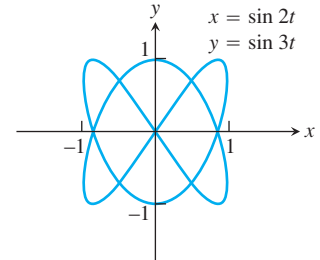
fonksiyonunu çizin. Negatif değerler de alarak başka h değerlerini de deneyin. $h \rightarrow 0$ iken ne olduğunu görüyorsunuz? Bu davranışı açıklayın.

107 ve 108 alıştırmalarındaki eğrilere *Papyon* eğrileri denmektedir. Her bir durumda, birinci dördte bir bölge içinde, eğrinin yatay teğetinin bulunduğu noktayı ve orijindeki iki teğetin denklemlerini bulun.

T 107.



108.



Zincir Kuralını kullanarak, 109 ve 110 alıştırmalarındaki x^n fonksiyonları için $(d/dx)x^n = nx^{n-1}$ kuvvet kuralının geçerli olduğunu gösterin.

109. $x^{1/4} = \sqrt{\sqrt{x}}$

110. $x^{3/4} = \sqrt{x\sqrt{x}}$

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

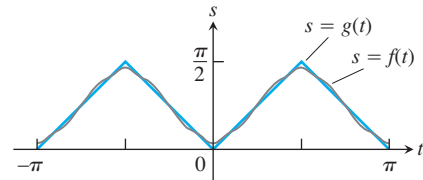
Trigonometrik Polinomlar

111. Şekil 3.34'te görüldüğü gibi,

$$s = f(t) = 0.78540 - 0.63662 \cos 2t - 0.07074 \cos 6t - 0.02546 \cos 10t - 0.01299 \cos 14t$$

trigonometrik "polinomu" $[-\pi, \pi]$ aralığında $s = g(t)$ testere dişi fonksiyonuna çok iyi bir yaklaşımdır. f 'nin türevinin, dg/dt 'nin tanımlı olduğu noktalarda g 'nin türevine yaklaşımı ne kadar iyi dir? Yanıt için, aşağıdaki adımları izleyin.

- $[-\pi, \pi]$ aralığında dg/dt 'yi (tanımlı olduğunda) çizin.
 - df/dt 'yi bulun.
 - df/dt 'yi çizin. df/dt 'nin dg/dt 'ye en iyi ve en kötü yaklaşımlar nerededir? Trigonometrik polinomlarla yapılan yaklaşımlar ısı ve salınım teorilerinde önemlidirler, fakat bir sonraki alıştırmada göreceğimiz gibi, bunlara fazla güvenemeyiz.
- 112.** (Alıştırma 111'in devamı) Alıştırma 111'de, bir $g(t)$ testere dişi fonksiyonuna $[-\pi, \pi]$ aralığında yaklaşımda kullanılan bir $f(t)$ trigonometrik polinomunun, testere dişi fonksiyonunun türevine benzeyen bir türevi olduğunu gördük. Ancak, bir trigonometrik



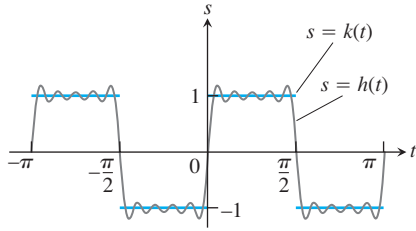
ŞEKİL 3.34 Bir testere dişi fonksiyonunun bir trigonometrik "polinom" yaklaşımı (Alıştırma 111).

fonksiyon bir fonksiyonu, türevi o fonksiyonun türevine yaklaşıklık göstermeyecek bir şekilde temsil edebilir. Örnek olarak, Şekil 3.35'teki $s = k(t)$ basamak fonksiyonunu temsil etmek üzere

$$s = h(t) = 1.2732 \sin 2t + 0.4244 \sin 6t + 0.25465 \sin 10t \\ + 0.18189 \sin 14t + 0.14147 \sin 18t$$

“polinomu” kullanılmıştır. Ancak h 'nin türevinin k 'nin türeviyle ilişkisi yoktur.

- $[-\pi, \pi]$ aralığında dk/dt 'yi (tanımlı olduğunda) çizin.
- dh/dt 'yi bulun.
- dh/dt 'yi çizip dk/dt 'ye yaklaşımının ne kadar kötü olduğuna bakın. Gördüklerinizi açıklayın.



ŞEKİL 3.35 Bir basamak fonksiyonunun bir trigonometrik “polinom” yaklaşımı (Alıştırma 112).

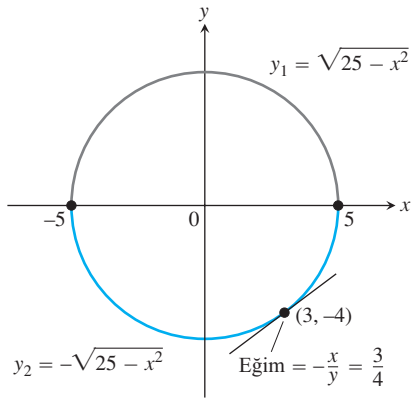
Parametrize Eğriler

113–116 alıştırmalarında aşağıdaki adımları gerçekleştirmek için bir BCS kullanın.

- Verilen t değerleri aralığında eğriyi çizin
 - t_0 noktasında dy/dx ve d^2y/dx^2 'yi bulun.
 - Eğrinin, verilen t_0 değerinin belirttiği noktasındaki teğeti için bir denklem bulun. Eğriyi ve teğeti birlikte bir grafikte çizin
- $x = \frac{1}{3}t^3, y = \frac{1}{2}t^2, 0 \leq t \leq 1, t_0 = 1/2$
 - $x = 2t^3 - 16t^2 + 25t + 5, y = t^2 + t - 3, 0 \leq t \leq 6, t_0 = 3/2$
 - $x = t - \cos t, y = 1 + \sin t, -\pi \leq t \leq \pi, t_0 = \pi/4$
 - $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, 0 \leq t \leq \pi, t_0 = \pi/2$

3.6

Kapalı Türev Alma



ŞEKİL 3.36 Çember iki fonksiyonun grafiklerini birleştirir. y_2 grafiği alt yarı çemberdir ve $(3, -4)$ noktasından geçer.

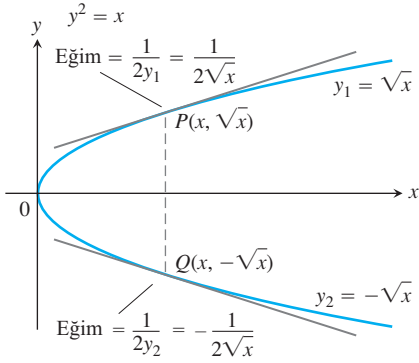
Şimdiye kadar ilgilendiğimiz fonksiyonların bir çoğu, y 'yi x değişkeni cinsinden açıkça ifade eden $y = f(x)$ şeklindeki bir denklemle tanımlanmıştı. Bu şekilde tanımlanan fonksiyonların türevlerini almak için kuralları öğrendik. Bölüm 3.5'te ayrıca, bir eğri $x = x(t)$ ve $y = y(t)$ denklemleriyle parametrik olarak tanımlandığında dy/dx türevinin nasıl bulunacağını öğrendik. Üçüncü bir durum

$$x^2 + y^2 - 25 = 0, \quad y^2 - x = 0 \quad \text{veya} \quad x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

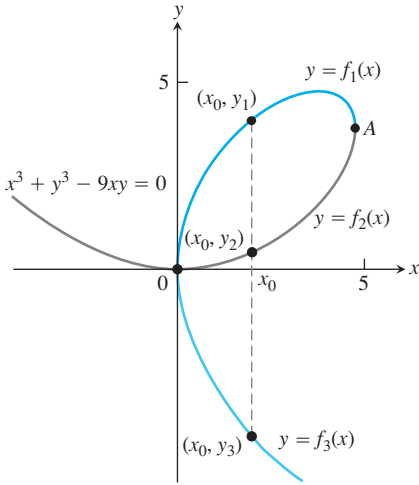
şeklinde denklemlerle karşılaştığımızda ortaya çıkar (bkz. Şekil 3.37 ve 3.38). bu denklemler x ve y değişkenleri arasında kapalı bir bağıntı tanımlarlar. Bazı durumlarda böyle bir denklemden y 'yi x 'in açık bir fonksiyonu olarak (veya belki birkaç fonksiyon) çözebiliriz. Bir $F(x, y) = 0$ denklemini bildiğimiz şekilde türevini alabilmek için $y = f(x)$ haline sokamadığımızda, kapalı türev alma yöntemiyle dy/dx 'i yine de bulabiliriz. Bu, denklemin her iki tarafının da x 'e göre türevini almaktan ve sonra sonuç denklemini y 'ye göre çözmekten ibarettir. Bu bölümde bu yöntem anlatılmakta ve bu yöntem kullanılarak kuvvet kuralı, tüm rasyonel üsleri kapsayacak şekilde genişletilmektedir. Bu bölümdeki örneklerde ve alıştırmalarda verilen denklemlerin, daima y 'yi x 'in türevlenebilir bir fonksiyonu olarak tanımladıkları kabul edilmektedir.

Kapalı Olarak Tanımlı Fonksiyonlar

Bir örnekle başlıyoruz



ŞEKİL 3.37 $y^2 - x = 0$, veya genelde yazıldığı şekliyle $y^2 = x$ denklemi $x \geq 0$ aralığında x 'in türevlenebilir iki fonksiyonunu tanımlar. Örnek 1'de, $y^2 = x$ denklemini y 'ye göre çözmeden bu fonksiyonların türevlerinin nasıl alınacağını göstermektedir.



ŞEKİL 3.38 $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ eğrisi x 'in tek bir fonksiyonunun grafiği değildir. Ancak, eğri x 'in fonksiyonlarının grafikleri olan ayrı yaylara bölünebilir. *Folium* olarak adlandırılan bu özel eğrinin geçmişi 1638'de Descartes'e kadar uzanır.

ÖRNEK 1 Kapalı Olarak Türev Alma

$y^2 = x$ ise dy/dx 'i bulun.

Çözüm $y^2 = x$ denklemi x 'in türevlenebilir ve aslında bulabileceğimiz iki fonksiyonunu tanımlar, yani $y_1 = \sqrt{x}$ ve $y_2 = -\sqrt{x}$ (Şekil 3.37). İkisinin de $x > 0$ için türevlerinin nasıl alınacağını biliyoruz:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ve} \quad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ama sadece $y^2 = x$ denkleminin y 'yi $x > 0$ için x 'in bir veya daha fazla türevlenebilir fonksiyonu olarak tanımladığını bildiğimizi varsayalım (açık olarak bilmesek de). Hala dy/dx 'i bulabilir miyiz?

Yanıt evettir. dy/dx 'i bulmak için, $y = f(x)$ 'e x 'in türevlenebilir bir fonksiyonuymuş gibi davranarak, $y^2 = x$ denkleminin iki tarafının da x 'e göre türevini alırız:

$$\begin{aligned} y^2 &= x & \text{Zincir kuralı } \frac{d}{dx}(y^2) &= \\ 2y \frac{dy}{dx} &= 1 & \frac{d}{dx}[f(x)]^2 &= 2f(x)f'(x) = 2y \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2y}. & \text{verir.} \end{aligned}$$

Bu tek formül, $y_1 = \sqrt{x}$ ve $y_2 = -\sqrt{x}$ açık çözümlerinin *ikisi* için de bulmuş olduğumuz türevleri vermektedir:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ve} \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = \frac{1}{2(-\sqrt{x})} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ÖRNEK 2 Bir Çemberin Bir Noktadaki Eğimi

$x^2 + y^2 = 25$ çemberinin $(3, -4)$ noktasındaki eğimini bulun.

Çözüm Çember x 'in tek bir fonksiyonunun grafiği değildir. İki türevlenebilir fonksiyonun, $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ ve $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ fonksiyonlarının grafiklerinin birleşimidir (Şekil 3.36). $(3, -4)$ noktası y_2 'nin grafiğinde bulunmaktadır, dolayısıyla eğimi açıkça hesaplayarak bulabiliriz:

$$\left. \frac{dy_2}{dx} \right|_{x=3} = -\frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} \Big|_{x=3} = -\frac{-6}{2\sqrt{25 - 9}} = \frac{3}{4}$$

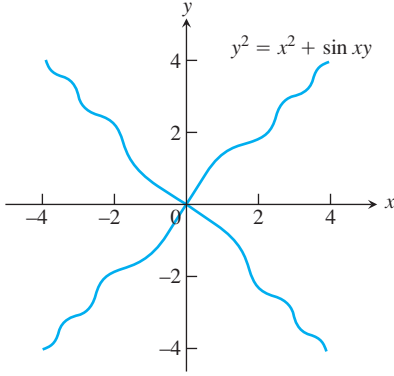
Ancak, verilen çember denkleminin x 'e göre kapalı olarak türevini alırsak, problemi daha kolay çözebiliriz:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(25) \\ 2x + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

$(3, -4)$ noktasındaki eğim $-\frac{x}{y} \Big|_{(3, -4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$ 'tür.

Sadece x ekseninin altındaki noktalarda geçerli olan dy_2/dx formülünün aksine, $dy/dx = -x/y$ formülünün çemberin eğiminin bulunduğu her yerde geçerli olduğuna dikkat edin. Ayrıca, türevin sadece bağımsız değişken x 'i değil, x ve y değişkenlerinin *ikisini* de içerdiğine dikkat edin.

Kapalı olarak tanımlanmış başka fonksiyonların türevlerini hesaplamak için, Örnek 1 ve 2'deki gibi ilerleriz: y 'ye x 'in türevlenebilir kapalı bir fonksiyonu gibi davranır ve bilinen kuralları uygulayarak tanımlayıcı denklemin iki tarafının da türevini alırız. ■



ŞEKİL 3.39 Örnek 3'teki $y^2 = x^2 + \sin xy$ 'nin denklemini. Örnek, kapalı olarak tanımlanmış bu eğri üzerinde eğimlerin nasıl bulunacağını göstermektedir.

ÖRNEK 3 Kapalı Olarak Türev Alma

$y^2 = x^2 + \sin xy$ ise dy/dx 'i bulun (Şekil 3.39).

Çözüm

$$\begin{aligned}
 y^2 &= x^2 + \sin xy \\
 \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin xy) \\
 2y \frac{dy}{dx} &= 2x + (\cos xy) \frac{d}{dx}(xy) \\
 2y \frac{dy}{dx} &= 2x + (\cos xy) \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) \\
 2y \frac{dy}{dx} - (\cos xy) \left(x \frac{dy}{dx} \right) &= 2x + (\cos xy)y \\
 (2y - x \cos xy) \frac{dy}{dx} &= 2x + y \cos xy \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{2x + y \cos xy}{2y - x \cos xy}
 \end{aligned}$$

İki tarafında x 'e göre türevini alın...

... y 'ye x 'in bir fonksiyonu gibi davranın ve zincir kuralını kullanın.

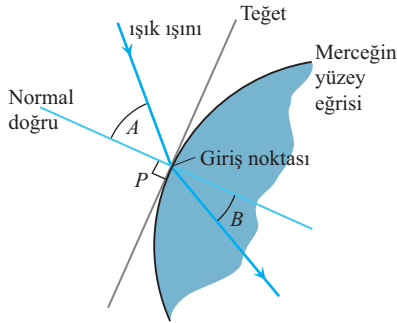
xy 'ye bir çarpı gibi davranın

dy/dx li terimleri bir araya toplayın...

... ve dy/dx 'i ortak paranteze alın.

Bölerek dy/dx 'i bulun..

dy/dx formülünün, kapalı olarak tanımlanmış eğrinin eğiminin tanımlı olduğu her yere geçerli olduğuna dikkat edin. Ayrıca, türevin sadece bağımsız değişken x 'i değil, x ve y değişkenlerinin *ikisini* de içerdiğine tekrar dikkat edin. ■



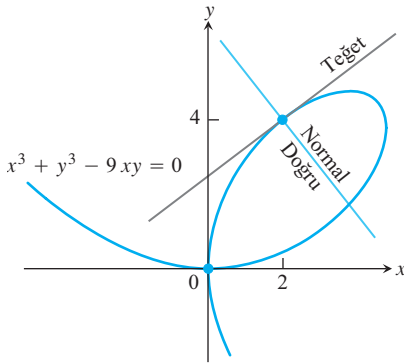
ŞEKİL 3.40 Bir ışık ışınının, merceğin yüzeyinden geçerken kırılmasını gösteren mercek profili.

Kapalı Türev Alma

1. y 'ye x 'in türevlenebilir bir fonksiyonu gibi davranarak, denklemin iki tarafının da x 'e göre türevini alın.
2. dy/dx 'li terimleri eşitliğin bir tarafında toplayın.
3. dy/dx 'i çözün

Mercekler, Teğetler ve Normal Doğrular

Bir merceğe girerken ışığın nasıl yön değiştirdiğini tanımlayan yasada, önemli açılar ışığın merceğe giriş noktasında merceğin yüzeyine dik olan doğruyla yaptığı açılardır (Şekil 3.40'taki A ve B açıları). Bu doğruya giriş noktasında yüzeyin *normali* adı verilir. Şekil 3.40'taki gibi bir merceğin yandan görünüşünde, **normal**, eğrinin ışığın giriş noktasındaki teğetine dik olan doğrudur.



ÖRNEK 4

(2, 4) noktasının $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ eğrisi üzerinde olduğunu gösterin. Sonra, eğrinin buradaki teğetini ve normalini bulun (Şekil 3.41).

Çözüm (2, 4) noktası eğrinin üzerindedir çünkü koordinatları eğrinin denklemini sağlar:
 $2^3 + 4^3 - 9(2)(4) = 8 + 64 - 72 = 0$.

Eğrinin (2, 4)'teki eğimini bulmak için, önce kapalı türev kullanarak dy/dx 'in formülünü buluruz:

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(9xy) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 9 \left(x \frac{dy}{dx} + y \frac{dx}{dx} \right) = 0$$

$$(3y^2 - 9x) \frac{dy}{dx} + 3x^2 - 9y = 0$$

$$3(y^2 - 3x) \frac{dy}{dx} = 9y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x} \quad dy/dx\text{'i çözün.}$$

Sonra $(x, y) = (2, 4)$ noktasında türevi hesaplarız:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(2,4)} = \left. \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x} \right|_{(2,4)} = \frac{3(4) - 2^2}{4^2 - 3(2)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

(2, 4) noktasındaki teğet, (2, 4) noktasından $4/5$ eğimiyle geçen doğrudur:

$$y = 4 + \frac{4}{5}(x - 2)$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$$

Eğrinin $(2, 4)$ noktasındaki normali ise burada teğete dik olan doğru, $(2, 4)$ noktasından $-5/4$ eğimiyle geçen doğrudur:

$$y = 4 - \frac{5}{4}(x - 2)$$

$$y = -\frac{5}{4}x + \frac{13}{2}$$

Kuadratik formül, $y^2 - 2xy + 3x^2 = 0$ şeklindeki ikinci derece bir denklemden y 'yi x cinsinden çözmemizi sağlar. Üçüncü dereceden bir denklemin üç kökünü veren, kuadratik formül gibi bir formül vardır fakat çok daha karmaşıktır. Eğer bu formül $x^3 + y^3 = 9xy$ denkleminde y 'yi x cinsinden çözmek için kullanılsaydı, denklem tarafından tanımlanan üç fonksiyon

$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2}} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3} + \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}}$$

ve

$$y = \frac{1}{2} \left[-f(x) \pm \sqrt{-3} \left(\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}} - \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}} \right) \right]$$

olurdu. Örnek 4'te kapalı türev almak, dy/dx 'i yukarıdaki formüllerden herhangi birinden doğrudan doğruya hesaplamaktan çok daha kolaydır. Daha yüksek dereceden denklemlerin tanımladığı eğriler üzerinde eğim bulmak genellikle kapalı türev alma gerektirir.

Yüksek Mertebe Türevler

Kapalı türev alma daha yüksek mertebeden türevler almak için de kullanılabilir. Aşağıda bir örnek verilmiştir.

ÖRNEK 5 Bir İkinci Mertebe Türevi Kapalı Olarak Bulmak

$2x^3 - 3y^2 = 8$ ise d^2y/dx^2 'yi bulun.

Çözüm Başlangıç olarak, denklemin iki tarafının da x 'e göre türevini alarak, $y' = dy/dx$ 'i buluruz:

$$\frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) = \frac{d}{dx}(8)$$

$$6x^2 - 6yy' = 0$$

y' 'ye x 'in bir fonksiyonu gibi davranın.

$$x^2 - yy' = 0$$

$$y' = \frac{x^2}{y}, \quad y \neq 0$$

y' 'yü çözün

Şimdi y'' 'nü bulmak için Bölüm Kuralını uygulayalım.

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{y} \right) = \frac{2xy - x^2y'}{y^2} = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2} \cdot y'$$

Son olarak y'' 'nü x ve y cinsinden yazabilmek için $y' = x^2/y$ 'yi yerine yazalım.

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2} \left(\frac{x^2}{y} \right) = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3} \quad y \neq 0$$

Türevlenebilir Fonksiyonların Rasyonel Kuvvetleri

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

kuvvet kuralının n bir tamsayı olduğunda geçerli olduğunu biliyoruz. Şimdi bunun her rasyonel n sayısı için de doğru olduğunu göstereceğiz.

TEOREM 4 Rasyonel Üsler İçin Kuvvet Kuralı

p/q bir rasyonel sayıysa, $x^{p/q}$, $x^{(p/q)-1}$ 'in tanım kümesinin her iç noktasında türevlenebilir.

$$\frac{d}{dx} x^{p/q} = \frac{p}{q} x^{(p/q)-1}$$

ÖRNEK 6 Rasyonel Üs Kuralını Kullanmak

$$(a) \quad \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad x > 0 \text{ için}$$

$$(b) \quad \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{-1/3} \quad x \neq 0 \text{ için}$$

$$(c) \quad \frac{d}{dx}(x^{-4/3}) = -\frac{4}{3}x^{-7/3} \quad x \neq 0 \text{ için}$$

Teorem 4'ün İspatı p ve q , $q > 0$ olmak üzere iki tamsayı olsun ve $y = \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}$ olduğunu varsayın. Bu durumda

$$y^q = x^p$$

olur. p ve q 'nin ikisi de tamsayı olduğu için (ki tamsayılar için kuvvet kuralını ispatlamıştık), denklemin iki tarafının da x 'e göre kapalı türevini alabiliriz:

$$qy^{q-1} \frac{dy}{dx} = px^{p-1}$$

$y \neq 0$ ise, denklemin iki tarafını da qy^{q-1} ile bölüp, dy/dx 'i bulabiliriz:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} \\ &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} && y = x^{p/q} \\ &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}} && \frac{p}{q}(q-1) = p - \frac{p}{q} \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{(p-1)-(p-p/q)} && \text{Bir üs kuralı} \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{(p/q)-1} \end{aligned}$$

böylece kural ispatlanır. ■

Kuvvet Kuralı'nın sıfırdan farklı herhangi bir reel üs için ispatlandığı Bölüm 7 de, Teorem 4'ün ispatında kullanılan türevlenebilirlik varsayımını kaldırabileceğiz (Bkz. Bölüm 7.3).

Teorem 4'ün sonucunu Zincir Kuralı ile birleştirince Kuvvet Zincir Kuralının u 'nun rasyonel kuvvetlerine bir genişlemesini elde ederiz: p/q bir rasyonel sayıysa ve $u = x$ 'in türevlenebilen bir fonksiyonu ise $u^{p/q}$ x 'in türevlenebilen bir fonksiyonudur ve

$$\frac{d}{dx} u^{p/q} = \frac{p}{q} u^{(p/q)-1} \frac{du}{dx}$$

dir. $((p/q) < 1$ için $u \neq 0$ olması koşuluyla). Bu kısıtlama zorunludur, zira takip eden örnekte de görüleceği gibi, 0 $u^{p/q}$ 'nin tanım kümesinde olabilir fakat $u^{(p/q)-1}$ 'in tanım kümesinde bulunmayabilir.

ÖRNEK 7 Rasyonel Kuvvet ve Zincir Kurallarını Kullanmak

[−1, 1]'de tanımlı fonksiyon

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \frac{d}{dx} (1 - x^2)^{1/4} &= \frac{1}{4} (1 - x^2)^{-3/4} (-2x) & u = 1 - x^2 \text{ ile Kuvvet Zinciri Kuralı} \\
 &= \frac{-x}{2(1 - x^2)^{3/4}} \\
 &\text{yalnız } (-1, 1) \text{ de tanımlı türev}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \frac{d}{dx} (\cos x)^{-1/5} &= -\frac{1}{5} (\cos x)^{-6/5} \frac{d}{dx} (\cos x) \\
 &= -\frac{1}{5} (\cos x)^{-6/5} (-\sin x) \\
 &= \frac{1}{5} (\sin x)(\cos x)^{-6/5}
 \end{aligned}$$

ALİŞTIRMALAR 3.6**Rasyonel Kuvvetlerin Türevleri**1–10 alıştırmalarında dy/dx 'i bulun.

1. $y = x^{9/4}$
2. $y = x^{-3/5}$
3. $y = \sqrt[3]{2x}$
4. $y = \sqrt[4]{5x}$
5. $y = 7\sqrt{x+6}$
6. $y = -2\sqrt{x-1}$
7. $y = (2x+5)^{-1/2}$
8. $y = (1-6x)^{2/3}$
9. $y = x(x^2+1)^{1/2}$
10. $y = x(x^2+1)^{-1/2}$

11–18 alıştırmalarındaki fonksiyonların ilk türevlerini bulun.

11. $s = \sqrt[4]{t^2}$
12. $r = \sqrt[4]{\theta^{-3}}$
13. $y = \sin[(2t+5)^{-2/3}]$
14. $z = \cos[(1-6t)^{2/3}]$
15. $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$
16. $g(x) = 2(2x^{-1/2}+1)^{-1/3}$
17. $h(\theta) = \sqrt[3]{1+\cos(2\theta)}$
18. $k(\theta) = (\sin(\theta+5))^{5/4}$

Kapalı Türev Alma19–32 alıştırmalarında dy/dx 'i bulmak için kapalı türev alın.

19. $x^2y + xy^2 = 6$
20. $x^3 + y^3 = 18xy$
21. $2xy + y^2 = x + y$
22. $x^3 - xy + y^3 = 1$
23. $x^2(x-y)^2 = x^2 - y^2$
24. $(3xy+7)^2 = 6y$
25. $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$
26. $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$
27. $x = \tan y$
28. $xy = \cot(xy)$
29. $x + \tan(xy) = 0$
30. $x + \sin y = xy$
31. $y \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - xy$
32. $y^2 \cos\left(\frac{1}{y}\right) = 2x + 2y$

33–36 alıştırmalarında $dr/d\theta$ 'yi bulun.

33. $\theta^{1/2} + r^{1/2} = 1$
34. $r - 2\sqrt{\theta} = \frac{3}{2}\theta^{2/3} + \frac{4}{3}\theta^{3/4}$
35. $\sin(r\theta) = \frac{1}{2}$
36. $\cos r + \cot \theta = r\theta$

İkinci Mertebe Türevler37–42 alıştırmalarında, önce dy/dx 'i, sonra da d^2y/dx^2 'yi bulmak için kapalı türev alın.

37. $x^2 + y^2 = 1$
38. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$
39. $y^2 = x^2 + 2x$
40. $y^2 - 2x = 1 - 2y$
41. $2\sqrt{y} = x - y$
42. $xy + y^2 = 1$
43. $x^3 + y^3 = 16$ ise, $(2, 2)$ noktasında d^2y/dx^2 'nin değerini bulun.
44. $xy + y^2 = 1$ ise, $(0, -1)$ noktasında d^2y/dx^2 'nin değerini bulun.

Eğimler, Teğetler ve Normaller

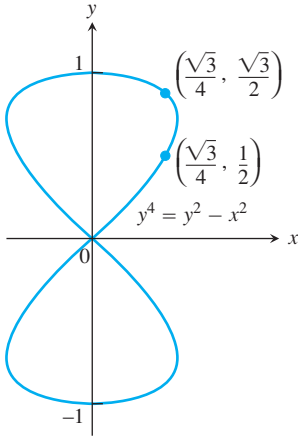
45 ve 46 alıştırmalarında verilen noktalarda eğimi bulun.

45. $y^2 + x^2 = y^4 - 2x$ $(-2, 1)$ ve $(-2, -1)$ de
46. $(x^2 + y^2)^2 = (x-y)^2$ $(1, 0)$ ve $(1, -1)$ de

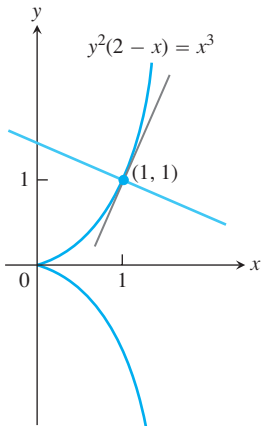
47–56 alıştırmalarında verilen noktanın eğrinin üzerinde olduğunu doğrulayın ve verilen noktada eğrinin (a) teğetini ve (b) normalini bulun.

47. $x^2 + xy - y^2 = 1$, $(2, 3)$
48. $x^2 + y^2 = 25$, $(3, -4)$
49. $x^2y^2 = 9$, $(-1, 3)$

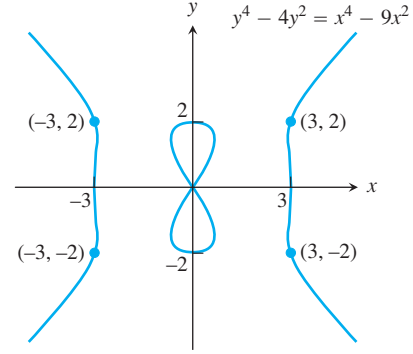
50. $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$, $(-2, 1)$
 51. $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0$, $(-1, 0)$
 52. $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 5$, $(\sqrt{3}, 2)$
 53. $2xy + \pi \sin y = 2\pi$, $(1, \pi/2)$
 54. $x \sin 2y = y \cos 2x$, $(\pi/4, \pi/2)$
 55. $y = 2 \sin(\pi x - y)$, $(1, 0)$
 56. $x^2 \cos^2 y - \sin y = 0$, $(0, \pi)$
 57. **Paralel teğetler** Paralel teğetler $x^2 + xy + y^2 = 7$ eğrisinin x -eksenini kestiği iki noktayı bulun ve bu noktalarındaki teğetlerin paralel olduklarını gösterin. Teğetlerin ortak eğimi nedir?
 58. **Koordinat eksenlerine paralel teğetler** $x^2 + xy + y^2 = 7$ eğrisinin teğetinin (a) x -eksenine paralel olduğu ve (b) y -eksenine paralel olduğu noktaları bulun. İkinci durumda dy/dx tanımlı değildir, fakat dx/dy tanımlıdır. Bu noktalarda dx/dy 'nin değeri nedir?
 59. **Sekiz eğrisi** Aşağıda gösterilen iki noktada $y^4 = y^2 - x^2$ eğrisinin eğimini bulun.



60. **Diocles'in sarmaşık eğrisi** (M.Ö. 200 civarında) Diocles'in sarmaşık eğrisi olarak adlandırılan $y^2(2-x) = x^3$ eğrisinin $(1, 1)$ 'deki teğet ve normalinin denklemlerini bulun.



61. **Şeytan eğrisi (Gabriel Cramer [Cramer Kuralının Cramer'i], 1750)** $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$ denklemiyle verilen şeytan eğrisinin belirtilen dört noktadaki eğimlerini bulun.



62. **Descartes'in folyumu** (Bkz. Şekil 3.38)

- a. $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ denklemiyle verilen Descartes'in folyumunun $(4, 2)$ ve $(2, 4)$ noktalarındaki eğimini bulun.
 b. Folyumun orijinden başka hangi noktada yatay bir teğeti vardır?
 c. Şekil 3.38'de gösterilen ve folyumun dikey bir teğetinin bulunduğu A noktasının koordinatlarını bulun.

Kapalı Olarak Tanımlanan Parametrizasyonlar

63–66 alıştırılmalarındaki denklemlerin x ve y 'yi kapalı olarak, $x = f(t)$, $y = g(t)$ türevlenebilir fonksiyonları olarak tanımladıklarını varsayarak, $x = f(t)$, $y = g(t)$ eğrisinin verilen t değerindeki eğimini bulun.

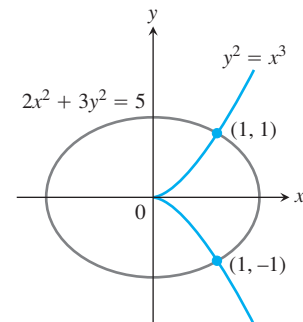
63. $x^2 - 2tx + 2t^2 = 4$, $2y^3 - 3t^2 = 4$, $t = 2$
 64. $x = \sqrt{5 - \sqrt{t}}$, $y(t - 1) = \sqrt{t}$, $t = 4$
 65. $x + 2x^{3/2} = t^2 + t$, $y\sqrt{t+1} + 2t\sqrt{y} = 4$, $t = 0$
 66. $x \sin t + 2x = t$, $t \sin t - 2t = y$, $t = \pi$

Teori ve Örnekler

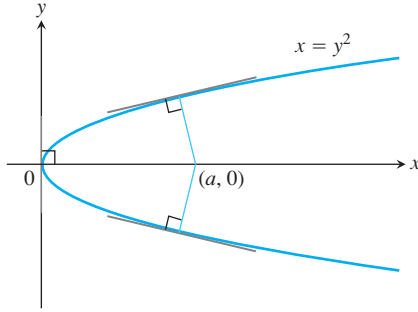
67. $f''(x) = x^{-1/3}$ ise, aşağıdakilerden hangisi doğru olabilir?

- a. $f(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} - 3$ b. $f(x) = \frac{9}{10}x^{5/3} - 7$
 c. $f'''(x) = -\frac{1}{3}x^{-4/3}$ d. $f'(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} + 6$

68. $y^2 = x^3$ ve $2x^2 + 3y^2 = 5$ eğrilerinin $(1, \pm 1)$ noktalarının teğetlerinin bir özellikleri var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.



69. **Normalini kesme** $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ eğrisinin $(1, 1)$ noktasındaki normali eğriyi başka hangi noktada keser?
70. **Bir doğruya paralel normal** $xy + 2x - y = 0$ eğrisinin $2x + y = 0$ doğrusuna paralel olan normallerini bulun.
71. **Bir parabol normal** $x = y^2$ parabolündeki $(a, 0)$ noktasından aşağıda verilen üç normali çizmek mümkünse, a 'nın $1/2$ 'den büyük olması gerektiğini gösterin. Normallerden biri x -eksenidir. Diğer iki normalin dik olması için a ne olmalıdır?



72. Örnek 6(b) ve Örnek 7(a)'daki türevlerin tanım kümeleri üzerindeki kısıtlamaların altında yatan geometri nedir?

T 73 ve 74 alıştırmalarında hem y 'ye x 'in bir fonksiyonuymuş gibi davranarak dy/dx 'i hem de x 'e y 'nin bir fonksiyonuymuş gibi davranarak dx/dy 'yi bulun. dy/dx ve dx/dy arasında ne gibi bir ilişki var gibidir? Bu ilişkiyi grafikler cinsinden geometrik olarak açıklayınız.

73. $xy^3 + x^2y = 6$ 74. $x^3 + y^2 = \sin^2 y$

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

75. a. $x^4 + 4y^2 = 1$ ise, dy/dx 'i iki yoldan bulun: (1) y 'yi çözüp, çıkan fonksiyonların türevlerini her zamanki gibi alarak ve (2) kapalı türev alarak. İki durumda da aynı sonucu buluyor musunuz?
- b. $x^4 + 4y^2 = 1$ denkleminde y 'yi çözün ve çıkan fonksiyonları birlikte çizerek $x^4 + 4y^2 = 1$ denkleminin tam bir grafiğini oluşturun. Şeklinize bu fonksiyonların birinci türevlerinin

grafiklerini de ekleyin. $x^4 + 4y^2 = 1$ grafiğine bakarak türev grafiklerinin genel davranışını tahmin edebilir miydiniz? Türev grafiklerine bakarak $x^4 + 4y^2 = 1$ grafiğinin genel davranışını tahmin edebilir miydiniz? Yanıtınızı açıklayın.

76. a. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ ise, dy/dx 'i iki yoldan bulun: (1) y 'yi çözüp, çıkan fonksiyonların x 'e göre türevlerini alarak ve (2) kapalı türev alarak. İki durumda da aynı sonucu buluyor musunuz?
- b. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ denkleminde y 'yi çözün ve çıkan fonksiyonları birlikte çizerek $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ denkleminin tam bir grafiğini oluşturun. Şeklinize bu fonksiyonların birinci türevlerinin grafiklerini de ekleyin. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ grafiğine bakarak türev grafiklerinin genel davranışını tahmin edebilir miydiniz? Türev grafiklerine bakarak $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ grafiğinin genel davranışını tahmin edebilir miydiniz? Yanıtınızı açıklayın.

77–84 alıştırmalarındaki adımlar için bir BCS kullanın.

- a. Denklemleri BCS'nin kapalı çizim programıyla çizin. Verilen P noktasının denklemleri doğruladığını kontrol edin.
- b. Kapalı türev almayı kullanarak dy/dx türevi için bir formül bulun ve bunu verilen P noktasında hesaplayın.
- c. (b) şıkında bulduğunuz eğimi kullanarak, eğrinin P 'deki teğetinin denklemini bulun. Kapalı eğriyi ve teğeti tek bir grafikte çizin.

77. $x^3 - xy + y^3 = 7$, $P(2, 1)$

78. $x^5 + y^3x + yx^2 + y^4 = 4$, $P(1, 1)$

79. $y^2 + y = \frac{2+x}{1-x}$, $P(0, 1)$

80. $y^3 + \cos xy = x^2$, $P(1, 0)$

81. $x + \tan\left(\frac{y}{x}\right) = 2$, $P\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$

82. $xy^3 + \tan(x + y) = 1$, $P\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

83. $2y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 2$, $P(1, 1)$

84. $x\sqrt{1 + 2y} + y = x^2$, $P(1, 0)$

3.7

İlişkili Oranları

Bu bölümde, bazı değişkenlerin değişim oranlarının sorulduğu problemlere bakacağız. Her durumda oran, değiştiği bilinen başka bir değişkenin (belki birkaç değişkenin) değişim oranından hesaplanması gereken bir türevdir. Bunu bulmak için, ilgili değişkenleri birbirine bağlayan bir denklem yazar ve aradığımız oranı bildiğimiz oranlara bağlayan bir denklem elde etmek için türevini alırız. Değişimini ölçebildiğiniz bazı oranlardan kolayca elde edemediğiniz bir oran bulma problemine *ilişkili oranlar problemi* denir.

İlişkili Oranlar Denklemleri

Küresel bir balon içine hava pompaladığımızı varsayın. Balonun hem hacmi ve hem de yarıçapı zamanla artar. Belirli bir anda balonun hacmi V ve yarıçapı r ise

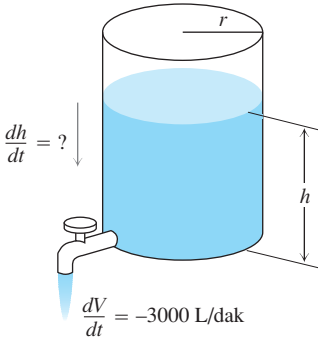
$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

olur. Zincir Kuralını kullanarak, ilişkili oranlar denklemi bulmak için türev alırsız:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Dolayısıyla, verilen belirli bir zaman anında balonun yarıçapını ve hacmin dV/dt artış oranını biliyorsak, son denklemden dr/dt 'yi çözebilir ve verilen anda yarıçapın ne kadar hızlı arttığını bulabiliriz. Hacmin artış oranının doğrudan ölçümünün, yarıçapın artış oranının doğrudan ölçümünden daha kolay olduğuna dikkat edin. İlişkili oranlar denklemi dr/dt 'yi dV/dt 'den hesaplamamızı sağlar.

Aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi, çoğu zaman, bir ilişkili oranlar problemindeki değişkenleri ilişkilendirmenin anahtarı, değişkenler arasındaki geometrik ilişkileri gösteren bir şekil çizmektir.



ŞEKİL 3.42 Bir silindirik tank içindeki sıvı hacminin değişim oranı, tank içindeki sıvı seviyesinin değişim oranına bağlıdır (Örnek 1).

ÖRNEK 1 Bir Tanktan Dışarı Sıvı Pompalamak

Dikey bir depolama tankının içindeki sıvı seviyesi, sıvıyı 3000 L/dak hızla pompalarsak ne hızla düşecektir?

Çözüm Bir kısmı dolu dik bir silindir tank çizer ve yarıçapını r , sıvının yüksekliğini ise h ile belirtiriz (Şekil 3.42). Sıvının hacmini ise V ile gösteririz.

Zaman geçtikçe, yarıçap sabit kalır, fakat V ve h değişir. V ve h 'yı zamanın türevlenebilir fonksiyonları olarak kabul eder ve zamanı t ile gösteririz. Bize

$$\frac{dV}{dt} = -3000$$

Sıvıyı dışarı 3000 L/dak hızla pompalarız. Oran negatiftir, çünkü hacim azalmaktadır.

olduğu verilmiştir ve bulmamız istenen

$$\frac{dh}{dt}$$

Sıvı seviyesi ne hızla düşecektir?

dir. dh/dt 'yi bulmak için önce h 'yi V 'ye bağlayan bir denklem yazarız. Denklem V , r ve h için seçilen birimlere bağlıdır. V litre ve r ile h metre ise, silindirin hacmi için uygun denklem

$$V = 1000\pi r^2 h$$

olacaktır, çünkü bir metreküp'te 1000 litre bulunur.

V ve h t 'nin türevlenebilir fonksiyonları oldukları için, $V = 1000\pi r^2 h$ denkleminin iki tarafının da t 'ye göre türevini alarak, dh/dt 'yi dV/dt ile ilişkilendiren bir denklem bulabiliriz:

$$\frac{dV}{dt} = 1000\pi r^2 \frac{dh}{dt} \quad r \text{ bir sabittir.}$$

Bilinen $dV/dt = -3000$ değerini yerine koyar ve dh/dt 'yi çözeriz:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-3000}{1000\pi r^2} = -\frac{3}{\pi r^2}$$

Sıvı seviyesi $3/(\pi r^2)$ m/dak. hızla düşecektir.

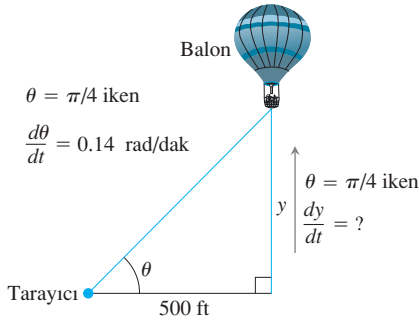
$dh/dt = -3/\pi r^2$ denklemi sıvı seviyesinin düşüş oranının tankın yarıçapına nasıl bağlı olduğunu göstermektedir. r küçükse, dh/dt büyük olacaktır; r büyükse, dh/dt küçük olur.

$$r = 1 \text{ m: } \frac{dh}{dt} = -\frac{3}{\pi} \approx -0.95 \text{ m/dak} = -95 \text{ m/dak}$$

$$r = 10 \text{ m: } \frac{dh}{dt} = -\frac{3}{100\pi} \approx -0.0095 \text{ m/dak} = -0.95 \text{ m/dak}$$

İlişkili Oranlar Problemlerini Çözme Stratejisi

1. Bir resim çizin ve değişkenlerle sabitleri isimlendirin. t 'yi zaman için kullanın. Bütün değişkenlerin zamanın fonksiyonu olduklarını varsayın.
2. Sayısal bilgileri yazın (seçtiğiniz sembolleri kullanarak).
3. Neyi bulmak istediğinizi yazın (genellikle bir türev olarak ifade edilen bir orandır).
4. Değişkenleri birbirine bağlayan bir denklem yazın. Bilmek istediğiniz oranı bildiğiniz oranlarla birleştirecek tek bir denklem yazmak için iki veya daha fazla denklemi birleştirmeniz gerekebilir.
5. t 'ye göre türev alın. Bilmek istediğiniz oranı değerini bildiğiniz oran ve değişkenler cinsinden ifade edin.
6. Hesaplayın. Bilinen değerleri kullanarak bilinmeyen oranı bulun.



ŞEKİL 3.43 Balon yüksekliğinin değişim oranı telemetrenin yer ile yaptığı açının değişim oranına bağlıdır (Örnek 2).

ÖRNEK 2 Yükselen Bir Balon

Yerden yukarı doğru yükselen bir sıcak hava balonu kalkış noktasından 500 ft uzaktaki bir tarayıcı ile izlenmektedir. Tarayıcının balonla yaptığı açı $\pi/4$ olduğu anda, açı 0.14 rad/dak. hızıyla artmaktadır. Balon o anda ne hızla yükselmektedir?

Çözüm Soruyu altı adımda yanıtlatırız.

1. Bir resim çizin ve sabitlerle değişkenleri isimlendirin (Şekil 3.43). Resimdeki değişkenler

θ = tarayıcının yer ile yaptığı açı (radyan),

y = balonun feet olarak yüksekliği

dir. t zamanı temsil eder ve θ ile y 'nin t 'nin türevlenebilir fonksiyonları olduğunu varsayarız.

Resimdeki tek sabit tarayıcının kalkış noktasına olan uzaklığıdır (500 ft). Buna özel bir sembol atamanın gereği yoktur.

2. Diğer sayısal bilgileri yazın.

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ iken } \frac{d\theta}{dt} = 0.14 \text{ rad/dak.}$$

3. Neyi bulmamız gerektiğini yazın. $\theta = \pi/4$ iken dy/dt 'yi istiyoruz.

4. y ve θ değişkenlerini ilişkilendiren bir denklem yazın..

$$\frac{y}{500} = \tan \theta \quad \text{veya} \quad y = 500 \tan \theta$$

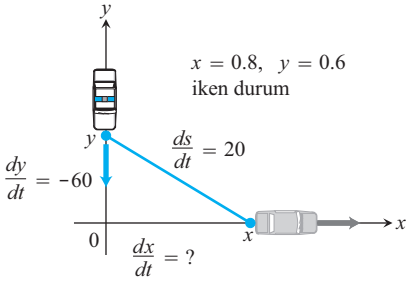
5. Zincir kuralını kullanarak t 'ye göre türev alın. Sonuç (aradığımız) dy/dt 'nin (bildiğimiz) $d\theta/dt$ ile ilişkisinin nasıl olduğunu gösterir.

$$\frac{dy}{dt} = 500 (\sec^2 \theta) \frac{d\theta}{dt}$$

6. $\theta = \pi/4$ ve $d\theta/dt = 0.14$ değerlerini yerine koyup dy/dt 'yi bulun.

$$\frac{dy}{dt} = 500 (\sqrt{2})^2 (0.14) = 140 \quad \text{sn } \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

Söz konusu anda, balon 140 ft/dak hızıyla yükselmektedir. ■



ŞEKİL 3.44 Arabanın hızı, polis ekibinin hızına ve aralarındaki uzaklığın değişim oranına bağlıdır (Örnek 3).

ÖRNEK 3 Otoyolda Takip

Kuzeyden dik açılı bir kesişime yaklaşan bir polis ekibi fazla hız yaparak köşeyi dönen ve doğuya doğru giden bir arabayı izlemektedir. Ekip kesişimin 0.6 mil kuzeyinde ve araba 0.8 mil doğusundayken, polis radarla kendileri ile araba arasındaki mesafenin 20 mil/saat ile artmakta olduğunu tespit eder. Ekip ölçüm anında 60 mil/saat ile ilerliyorsa, arabanın hızı nedir?

Çözüm Pozitif x-eksenini doğuya giden otoyol ve pozitif y eksenini de güneye giden otoyol olarak seçip, koordinat düzleminde arabayı ve ekibi çizeriz (Şekil 3.44). t 'yi zamanı belirtmesi için seçer ve

$x = t$ zamanında arabanın konumu,

$y = t$ zamanında ekibin konumu,

$s = t$ zamanında ekip ile araba arasındaki mesafe

olarak tanımlarız. x , y ve s 'nin t 'nin türevlenebilir fonksiyonları olduklarını varsayalım.

$$x = 0.8 \text{ mil}, \quad y = 0.6 \text{ mil}, \quad \frac{dy}{dt} = -60 \text{ mil/saat} \quad \frac{ds}{dt} = 20 \text{ mil/saat}$$

iken dx/dt 'yi bulmak istiyoruz (dy/dt negatiftir, çünkü y azalmaktadır).

$$s^2 = x^2 + y^2$$

Uzaklık denkleminin türevini alırız ($s = \sqrt{x^2 + y^2}$ denklemi de kullanılabilir).

$$\begin{aligned} 2s \frac{ds}{dt} &= 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{s} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned}$$

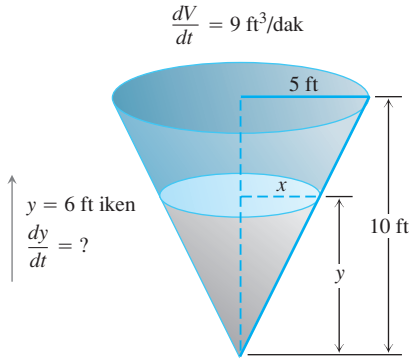
elde ederiz.

Son olarak, $x = 0.8$, $y = 0.6$, $dy/dt = -60$, $ds/dt = 20$ değerlerini kullanın ve dx/dt 'yi bulun.

$$20 = \frac{1}{\sqrt{(0.8)^2 + (0.6)^2}} \left(0.8 \frac{dx}{dt} + (0.6)(-60) \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20\sqrt{(0.8)^2 + (0.6)^2} + (0.6)(60)}{0.8} = 70$$

Söz konusu anda, arabanın hızı 70 mil/saat'tir. ■



ŞEKİL 3.45 Konik tankın geometrisi ve suyun tankı doldurma oranı, su seviyesinin ne hızda yükseldiğini belirler (Örnek 4).

ÖRNEK 4 Konik Bir Tankı Doldurmak

Konik bir tanka $9 \text{ ft}^3/\text{dak}$ hızla su akmaktadır. Tankın ucu yere doğru bakmaktadır ve yüksekliği 10 ft ve taban yarıçapı 5 ft'tir. Su derinliği 6 ft olduğunda, su seviyesi ne hızla artmaktadır?

Çözüm Şekil 3.45 te kısmen dolu bir konik tank görülmektedir. Problemdeki değişkenler

$V = t$ (dakika) zamanında tanktaki suyun hacmi (ft^3)

$x = t$ zamanında suyun yüzeyinin yarıçapı (ft)

$y = t$ zamanında tanktaki suyun yüksekliği (ft)

olarak verilmiştir. V , x ve y 'nin t 'nin türevlenebilir fonksiyonları olduklarını varsayınız. Sabitler tankın boyutlarıdır.

$$y = 6 \text{ ft} \quad \text{ve} \quad \frac{dV}{dt} = 9 \text{ ft}^3/\text{dak}.$$

iken dy/dt sorulmaktadır.
Su, hacmi

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 y.$$

olan bir koni şeklindedir.

Bu denklemde V ve y 'nin yanısıra x de bulunmaktadır. Söz konusu anda x ve dx/dt hakkında bir bilgi verilmediği için, x 'i ortadan kaldırmamız gerekir. Benzer üçgenleri kullanarak (Şekil 3.45) x 'i y cinsinden yazabiliriz:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \quad \text{veya} \quad x = \frac{y}{2}.$$

Dolayısıyla,

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{y}{2} \right)^2 y = \frac{\pi}{12} y^3$$

ve

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3y^2 \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4} y^2 \frac{dy}{dt}$$

türevini buluruz.

Son olarak, dy/dt 'yi bulmak için $y = 6$ ve $dV/dt = 9$ değerlerini kullanın.

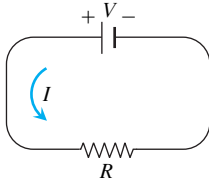
$$9 = \frac{\pi}{4} (6)^2 \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\pi} \approx 0.32$$

Söz konusu anda, su seviyesi yaklaşık olarak $0.32 \text{ ft}/\text{dak}$. gibi bir hızla artmaktadır. ■

ALİŞTIRMALAR 3.7

- Alan** Bir dairenin yarıçapı r ve alanı $A = \pi r^2$ 'nin t 'nin türevlenebilir fonksiyonları olduğunu varsayın. dA/dt 'yi dr/dt 'ye bağlayan bir denklem yazın.
- Yüzey Alanı** Bir kürenin yarıçapı r ve yüzey alanı $S = 4\pi r^2$ 'nin t 'nin türevlenebilir fonksiyonları olduğunu varsayın. dS/dt 'yi dr/dt 'ye bağlayan bir denklem yazın.
- Hacim** Dik bir silindirin yarıçapı r ve yüksekliği h silindirin hacmi V 'ye $V = \pi r^2 h$ formülüyle bağlıdır.
 - r sabitse, dV/dt dh/dt 'ye nasıl bağlıdır?
 - h sabitse, dV/dt dr/dt 'ye nasıl bağlıdır?
 - Ne h ne de r sabit değilse, dV/dt dr/dt ve dh/dt 'ye nasıl bağlıdır?
- Hacim** Dik bir koninin yarıçapı r ve yüksekliği h koninin hacmi V 'ye $V = (1/3)\pi r^2 h$ formülüyle bağlıdır.
 - r sabitse, dV/dt dh/dt 'ye nasıl bağlıdır?
 - h sabitse, dV/dt dr/dt 'ye nasıl bağlıdır?
 - Ne h ne de r sabit değilse, dV/dt dr/dt ve dh/dt 'ye nasıl bağlıdır?
- Gerilim değiştirme** Şekildeki gibi bir elektrik devresinin V gerilimi (volt), I akımı (amper) ve R direnci (ohm) arasındaki ilişki $V = IR$ denklemi ile verilmektedir. I 1/3 Amper/sn hızıyla azalırken, V 'nin 1 V/sn hızıyla arttığını varsayın. t saniye olarak zamanı gösterebilir.



- dV/dt 'nin değeri nedir?
 - dI/dt 'nin değeri nedir?
 - dR/dt 'nin dV/dt ve dI/dt ile ilişkisi nedir?
 - $V = 12$ V ve $I = 2$ Amper iken R 'nin değişim oranını bulun. R artar mı, azalır mı?
- Elektrik gücü** Bir elektrik devresinin gücü P (watt) devrenin direnci R 'ye (ohm) ve akımı I 'ya (amper) $P = R^2 I$ denklemi ile bağlıdır.
 - Ne P R ve I 'nin hiçbiri sabit değilse, dP/dt ne de I sabit değilse, dP/dt , dR/dt ve dI/dt arasındaki ilişki nedir?
 - P sabitse, dR/dt dI/dt 'ye nasıl bağlıdır?
 - Uzaklık** x ve y t 'nin türevlenebilir fonksiyonları ve $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ de xy düzleminde $(x, 0)$ ve $(0, y)$ noktaları arasındaki uzaklık olsun.
 - y sabitse, ds/dt dx/dt 'ye nasıl bağlıdır?

- Ne x ne de y sabit değilse, ds/dt , dx/dt ve dy/dt 'ye nasıl bağlıdır?
 - s sabitse, dx/dt , dy/dt 'ye nasıl bağlıdır?
- Köşegenler** x , y ve z dikdörtgen bir kutunun kenar uzunluklarıysa, kutunun köşegenlerinin uzunlukları $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 'dir.
 - x , y ve z 'nin t 'nin türevlenebilir fonksiyonları olduklarını varsayarak, ds/dt , dx/dt , dy/dt ve dz/dt 'ye nasıl bağlıdır?
 - x sabitse, ds/dt , dy/dt ve dz/dt 'ye nasıl bağlıdır?
 - s sabitse, dx/dt , dy/dt ve dz/dt arasındaki ilişki nedir??
 - Alan** Kenar uzunlukları, aralarındaki θ açısı ile a ve b olan bir üçgenin alanı şu şekilde verilir:

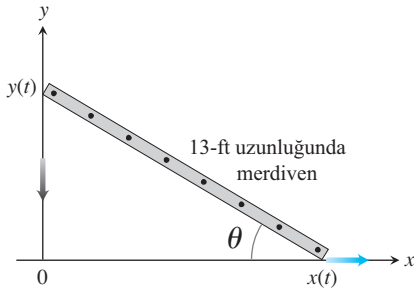
$$A = \frac{1}{2} ab \sin \theta$$

- a ve b sabitse, dA/dt $d\theta/dt$ 'ye nasıl bağlıdır?
 - Sadece b sabitse, dA/dt $d\theta/dt$ ve da/dt 'ye nasıl bağlıdır?
 - e , a , b , ve θ 'nin hiçbiri sabit değilse θ sabit değilse, dA/dt $d\theta/dt$, da/dt ve db/dt 'ye nasıl bağlıdır?
- Bir tabağı ısıtmak** Dairesel bir metal tabak bir fırında ısıtıldığında, yarıçapı 0.01 cm/dak. hızıyla artmaktadır. Yarıçap 50 cm olduğunda, tabağın alanı hangi oranda artar?
 - Bir dikdörtgenin boyutlarını değiştirmek** Bir dikdörtgenin uzunluğu l 2 cm/sn hızla azalırken, genişliği w 2 cm/sn hızla artmaktadır. $l = 12$ cm ve $w = 5$ cm iken, dikdörtgenin (a) alanının, (b) çevresinin ve (c) köşegenlerinin uzunluklarının değişim oranlarını bulun. Hangi büyüklükler artmakta, hangileri azalmaktadır?
 - Dikdörtgen bir kutunun boyutlarını değiştirme** Kapalı bir dikdörtgen kutunun kenar uzunlukları x , y ve z 'nin aşağıdaki şekilde değiştiklerini varsayın.

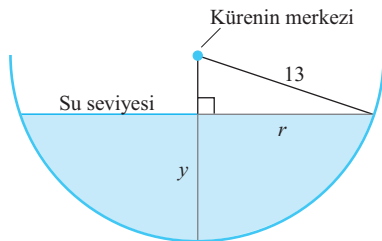
$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ m/sn} \quad \frac{dy}{dt} = -2 \text{ m/sn} \quad \frac{dz}{dt} = 1 \text{ m/sn}$$

$x = 4$, $y = 3$ ve $z = 2$ iken, kutunun (a) hacminin, (b) yüzey alanının ve (c) $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ köşegen uzunluklarının hangi oranda değiştiklerini bulun.

- Kayan bir merdiven** 13-ft uzunluğunda bir merdiven, tabanı kaymaya başladığında bir eve dayanmaktadır. Taban evden 12 ft uzaklığa geldiğinde, taban 5 ft/sn hızla kaymaktadır.
 - O anda merdivenin üst tarafı ne hızla kaymaktadır?
 - Yer, duvar ve merdivenin oluşturduğu üçgenin alanı aynı anda ne oranda değişir?
 - Merdivenle yer arasındaki θ açısı aynı anda ne oranda değişir?



- 14. Ticari hava trafiği** İki ticari uçak yerden 40.000 ft yukarıda dik bir açıyla kesişen düz rotalar izlemektedirler. A uçağı kesişim noktasına 442 notluk (bir saatte deniz mili, bir deniz mili 2000 yarddır) bir hızla yaklaşmaktadır. B uçağı ise kesişim noktasına doğru 481 notla uçmaktadır. A kesişim noktasına 5 hava mili, B ise 12 deniz mili uzaktayken iki uçak arasındaki uzaklık hangi hızla değişir?
- 15. Uçurtma uçurmak** Bir kız 300 ft yükseklikte bir uçurtma uçurmakta ve rüzgar uçurtmayı kızdan yatay olarak 25 ft/sn hızla uzaklaştırmaktadır. Uçurtma kızdan 500 ft uzaktayken, kız uçurtmanın ipini hangi hızla bırakmalıdır?
- 16. Bir silindirin çapını değiştirmek** Lincoln Otomotiv'deki tamirciler yeni bir pistonu uyması için 6 inç derinliğinde bir silindirin çapını değiştirmek istiyorlar. Kullandıkları makine her 3 dakikada bir silindirin yarıçapını bir inçin binde biri kadar arttırmaktadır. Silindirin çapı 3.800 inç olduğunda hacmi ne oranda artar?
- 17. Büyüyen bir kum torbası** Konik bir tepenin üzerine kayan bir kemerden $10 \text{ m}^3/\text{dak.}$ hızla kum düşmektedir. Tepenin yüksekliği her zaman taban yarıçapının sekizde üçüdür. Tepe 4 metreye ulaştığında (a) yükseklik, (b) yarıçap hangi hızla değişmektedir?
- 18. Konik bir depoyu boşaltmak** Taban yarıçapı 45 m ve yüksekliği 6 m olan, ucu aşağı bakan bir konik depodan su $50 \text{ m}^3/\text{dak}$ hızla dışarı akmaktadır.
- Su 5 m derinliğindeyken, su seviyesi hangi hızla (dakikada santimetre) düşmektedir?
 - Suyun yüzeyinin yarıçapı ne hızla değişmektedir? Cevabınızı cm/dak. olarak verin.
- 19. Yarım küre şeklinde bir depoyu boşaltmak** Yan kesidi aşağıda gösterilen, 13 m yarıçapında yarım küre şeklinde bir depodan $6\text{m}^3/\text{dak}$ hızla su akmaktadır. Yarıçapı R olan yarım küre şeklindeki bir depoda bulunan suyun derinliği y iken hacmi $V = (\pi/3)y^2(3R - y)$ dir. Aşağıdaki soruları cevaplayın.



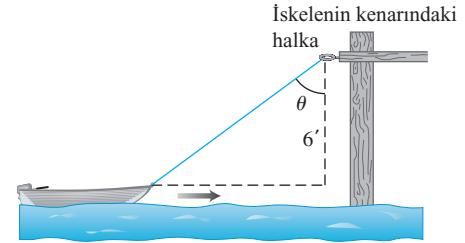
- Suyun derinliği 8 m iken, su seviyesi hangi oranda değişmektedir?
- Suyun derinliği y m ise, su yüzeyinin yarıçapı r nedir?
- Suyun derinliği 8 m iken, r yarıçapı ne oranda değişir?

20. Büyüyen bir yağmur damlası Bir sis damlasının mükemmel bir küre olduğunu ve sıkışmayla damlanın yüzeyiyle orantılı bir hızla nem topladığını varsayın. Bu koşullar altında damlanın yarıçapının sabit bir oranla arttığını gösterin.

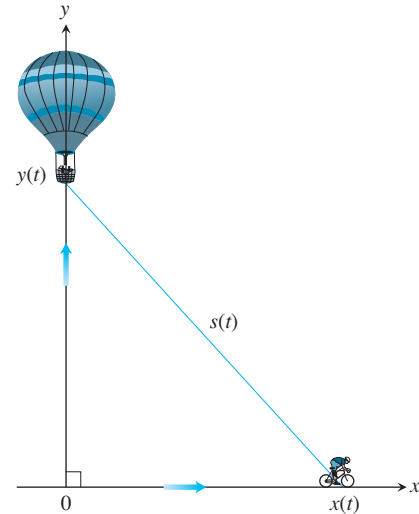
21. Şişen bir balonun yarıçapı Küresel bir balon $100\pi \text{ ft}^3/\text{dak.}$ hızla helyumla doldurulmaktadır. Yarıçap 5 ft olduğunda, balonun yarıçapı ne hızla artmaktadır? Yüzey alanı ne hızla artmaktadır?

22. Bir sandalı çekmek Bir sandal, iskelede bulunan ve sandaldan 6 ft yukarıdaki bir makaraya bağlı bir ip ile çekilmektedir. İp 2 ft/sn hızla çekilmektedir.

- İpin uzunluğu 10 ft iken kayık hangi hızla iskeleye yaklaşmaktadır?
- θ açısı ne oranda değişmektedir (şekle bakın)?

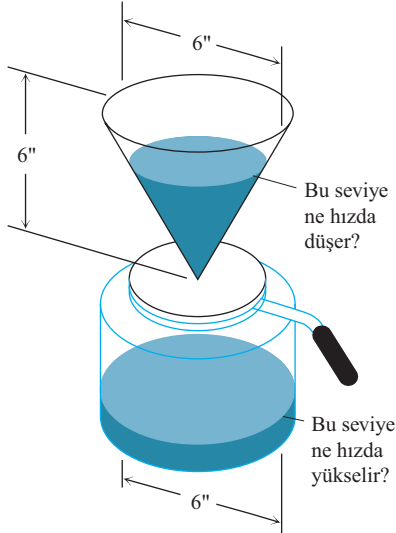


23. Bir balon ve bir bisiklet Bir balon düz bir yolun üzerinde dik olarak $1 \text{ ft}/\text{sn}$ sabit hızla yükselmektedir. Balon yerden tam 65 ft yüksekteyken, altından $17 \text{ ft}/\text{sn}$ sabit hızla bir bisiklet geçmektedir. Bisikletle balon arasındaki mesafesi 3 sn sonra ne hızla artar?



24. Kahve yapmak Koni şeklinde bir filtreden silindirik bir çaydanlığa 10 inç³/dak. hızla kahve damlamaktadır.

- Konideki kahve 5 inç yüksekliğindeyken çaydanlıktaki kahve seviyesi ne hızla yükselir?
- Konideki kahve seviyesi ne hızla azalır?



25. Kan pompalanması 1860'ların sonunda, Würzburg, Almanya'daki Tıp Fakültesinde bir fizyoloji profesörü olan Adolf Fick, günümüzde de kalbin dakikada ne kadar kan pompaladığını ölçmek için kullanılan bir yöntem geliştirmiştir. Bu cümleyi okurken kalbiniz ortalama dakikada 7 litre kan pompalamaktadır. Dinlenirken ise kan pompalanması ortalama 6 L/dak. dir. Eğitimli bir maraton koşucusuysanız, koşarken kalbinizin kan pompalaması dakikada 30 litreye kadar çıkacaktır.

Kalbinizin kan pompalayış oranı

$$y = \frac{Q}{D}.$$

gibi bir formülle verilir. Burada Q dakikada soluduğunuz CO_2 miktarının mililitre sayısı, D ise kalbin ciğerlere pompaladığı kandaki CO_2 konsantrasyonu ile ciğerlerden geri dönen kandaki CO_2 konsantrasyonu (ml/l) arasındaki farktır. $Q = 233$ ml/dak. ve $D = 97 - 56 = 41$ ml/L iken,

$$y = \frac{233 \text{ ml/dak.}}{41 \text{ ml/L}} \approx 5.68 \text{ L/dak.}$$

çoğu kişinin sahip olduğu taban (dinlenme sırasındaki) oranı 6 L/dak'ya çok yakındır. (Veriler: J. Kenneth Herd, M.D., Quillan Tıp Fakültesi, East Tennessee State University.)

$Q = 233$ ve $D = 41$ iken, D 'nin dakikada 2 birim hızla azaldığını, fakat Q 'nun sabit kaldığını bildiğimizi varsayalım. Kan pompalama oranına ne olur?

26. Maliyet, kazanç ve kâr Bir şirket x adet malı $c(x)$ dolar maliyet, $r(x)$ dolar satış kazancı ve $p(x) = r(x) - c(x)$ dolar kâr marjıyla üretebilmektedir (her şey binle çarpılacak). Aşağıdaki x ve dx/dt değerleri için, dc/dt , dr/dt ve dp/dt 'yi bulun.

a. $x = 2$ ise $r(x) = 9x$, $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ ve $dx/dt = 0.1$

b. $x = 1.5$ ise, $r(x) = 70x$, $c(x) = x^3 - 6x^2 + 45/x$ ve $dx/dt = 0.05$

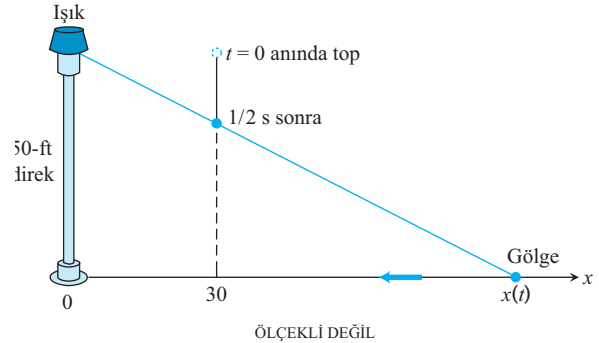
27. Bir parabol üzerinde ilerlemek Bir parçacık, birinci dördte bir bölgede $y = x^2$ parabolü üzerinde, x -koordinatı (metre) 10 m/sn sabit hızla artacak şekilde ilerlemektedir. $x = 3$ m iken, parçacığı orijine bağlayan doğrunun eğim açısı θ ne hızla değişir?

28. Başka bir parabol üzerine ilerlemek Bir parçacık $y = \sqrt{-x}$ parabolü üzerinde x koordinatı (metre) 8 m/sn hızla azalacak şekilde sağdan sola doğru ilerlemektedir. $x = -4$ ise, parçacığı orijine bağlayan eğim açısı θ nasıl değişir?

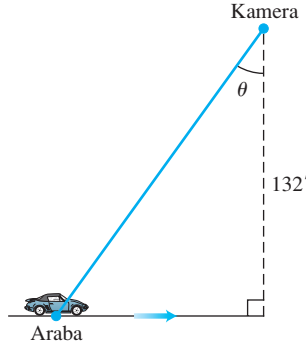
29. Düzlemde hareket Metrik xy düzlemindeki bir parçacığın koordinatları, $dx/dt = -1$ m/sn ve $dy/dt = -5$ m/sn ile, zamanın türevlenebilir fonksiyonlarıdır. Parçacık (5, 12) noktasından geçerken orijinden uzaklığı nasıl değişir?

30. Hareket eden bir gölge 6 ft boyunda bir adam yerden 16 ft yüksekte olan bir sokak lambasına doğru 5 ft/sn hızla yürümektedir. Gölgesinin ucu hangi hızda ilerler? Adam ışıktan 10 ft uzakta-yken gölgesinin boyu ne hızla değişir?

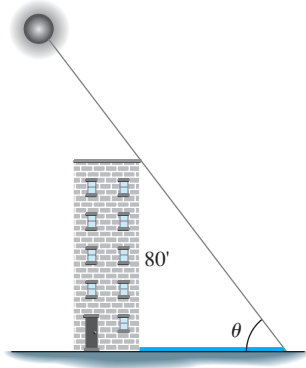
31. Başka bir hareket eden gölge 50 ft yüksekliğinde bir direğin tepesinden bir ışık parlamaktadır. 30 ft uzaklıktaki bir noktadan, ışıktan aynı yüksekten aşağı bir top bırakılır (şekle bakınız). $1/2$ sn sonra topun yerdeki gölgesi ne hızla ilerler? (Topun t saniyede $s = 16t^2$ gibi bir mesafe düştüğünü varsayın.)



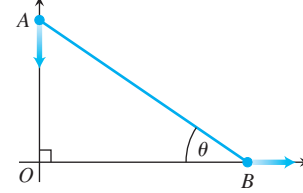
32. Videoya kaydetmek Pistten 132 ft uzakdaki bir tribünden, 180 mil/sa (264 ft/sn) hızla ilerleyen bir arabayı izleyerek yarıyı videoya aldığınızı varsayın. Araba tam önünüzden geçerken kamera açınız θ hangi hızla değişir? Ya yarım saniye sonra?



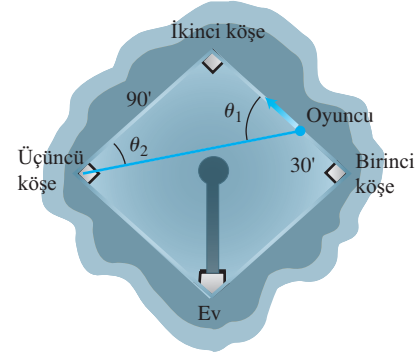
33. **Bir buz tabakasını eritmek** 8 inç çaplı küresel bir demir top her yerinde aynı kalınlıkta bir buz tabakasıyla kaplıdır. Buz $10 \text{ in}^3/\text{dak}$ hızla eriyorsa, buzun kalınlığı 2 inç iken kalınlık ne hızla azalır? Buzun dış yüzey alanı hangi hızla azalır?
34. **Otoyol devriyesi** Bir otoyol devriye uçağı düz bir yolun 3 mil yukarısında 120 mil/sa hızla uçmaktadır. Pilot gelen bir araba görür ve radarla arabayla uçak arasındaki mesafe 5 mil iken, bu mesafenin 160 mil/saat hızla azaldığını belirler. Arabanın otoyoldaki hızını bulun.
35. **Bir binanın gölgesi** Güneşin doğrudan binanın üzerinden geçeceği bir günün sabahında, 80 ft yüksekliğinde bir binanın gölgesi 60 ft uzunluğundadır. Söz konusu anda, güneşin yerle yaptığı θ açısı $0.27^\circ/\text{dak}$ hızla artmaktadır. Gölgenin kısalma hızı nedir? (Radyan kullanmayı unutmayın. Cevabınızı inç bölü dakika olarak verin.)



36. **Yürüyüşçüler** A ve B dik açıyla birleşen düz sokaklarda yürümektedir. A köşeye 2 m/sn hızla yaklaşırken, B köşeden 1 m/sn hızla uzaklaşmaktadır. A köşeden 10 , B ise 20 m uzakta iken θ açısı hangi hızla değişir? Cevabınızı derece bölü saniye olarak ifade edin.



37. **Beyzbol oyuncuları** Bir Beyzbol alanı bir kenarı 90 ft olan bir karedir. Bir oyuncu birinci köşeden ikinci köşeye 16 ft/sn hızla koşmaktadır.
- Oyuncu birinci köşeden 30 ft uzaktayken, oyuncunun üçüncü köşeye olan uzaklığı ne hızla değişmektedir?
 - Aynı anda θ_1 ve θ_2 açıları (şekle bakın) hangi hızla değişir?
 - Oyuncu ikinci köşeden 15 ft/sn hızla geçer. Oyuncu köşeye ayak bastığında, θ_1 ve θ_2 açıları nasıl değişir?



38. **Gemiler** İki gemi birbirleriyle 120° açı yapacak şekilde bir O noktasından uzaklaşmaktadırlar. A gemisi 14 not (deniz mili bölü saat, bir deniz mili 2000 yaddır) hızla, B gemisi ise 21 not hızla ilerlemektedir. $OA = 5$ ve $OB = 3$ deniz mili iken gemiler birbirlerinden ne hızla uzaklaşmaktadır?

3.8

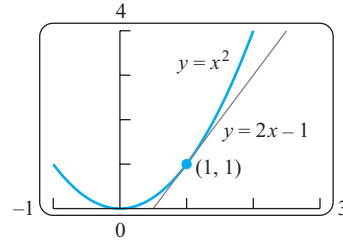
Lineerizasyon ve Diferansiyeller

Bazen karmaşık fonksiyonlara, özel uygulamalar için istediğimiz hassaslığı veren ve çalışılması daha kolay olan fonksiyonlarla yaklaşımda bulunuruz. Bu bölümde tartışılan yaklaşım fonksiyonlarına *lineerizasyonlar* denir ve teğet doğrularını temel alırlar. Polinomlar gibi, başka yaklaşım fonksiyonları Bölüm 11 de tartışılacaktır.

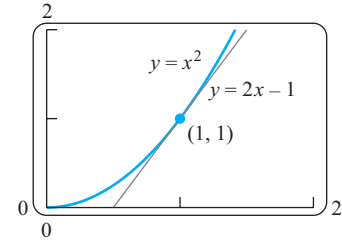
Diferansiyeller adı verilen yeni dx ve dy değişkenlerini tanıttak ve bunları, türevin dy/dx Leibniz gösterimine gerçek bir oran anlamı verecek şekilde tanımlayacağız. dy 'yi ölçümlerdeki hatayı ve bir fonksiyonun değişikliklere karşı duyarlılığı ölçmekte kullanacağız. Bu fikirlerin uygulamaları Zincir Kuralını tam ispatını sağlayacaktır (Bölüm 3.5).

Lineerizasyon

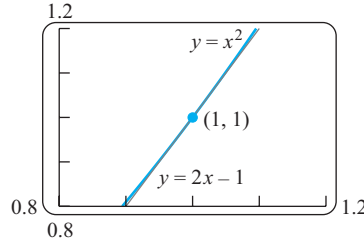
Şekil 3.46'da göreceğiniz gibi, $y = x^2$ eğrisinin teğeti değme noktası civarında eğriye yakın bulunur. İki tarafta da kısa bir aralıkta, teğet doğrusu üzerindeki y değerleri eğri üzerindeki y değerlerinin oldukça iyi bir yaklaşımını verir. Bu olayı, her iki grafik üzerinde değme noktasına yakından bakarak veya değme noktasının x -koordinatı yakınlarında $f(x)$ ile teğeti arasındaki değer farkları tablosuna bakarak görebiliriz. Yerel olarak her türevlenebilir eğri bir doğru gibi davranır.



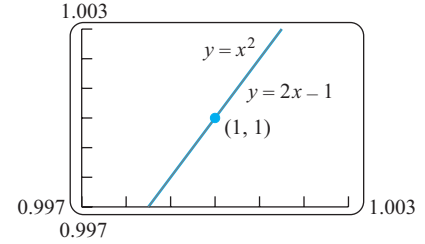
(1, 1) de $y = x^2$ ve teğeti $y = 2x - 1$.



(1, 1)'in çok yakınında teğet ve eğri

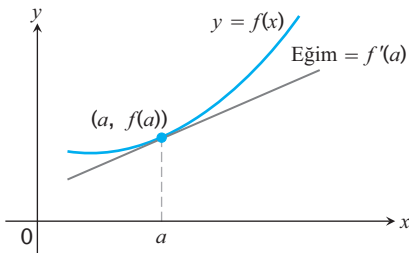


Teğet ve eğri gösterilen x -aralığının tamamında çok yakındır



Teğet ve eğri hala yakın. Bilgisayar ekranı bu x -aralığı üzerinde teğeti eğriden ayırt edemiyor.

ŞEKİL 3.46 Bir fonksiyonun türevlenebilir olduğu bir noktadaki grafiğini büyüttükçe grafik düzleşir ve teğetine benzerliği artar.



ŞEKİL 3.47 $y = f(x)$ eğrisinin $x = a$ daki teğet doğrusunun denklemi $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ 'dır.

Genel olarak, $y = f(x)$ 'in türevlenebilir olduğu bir $x = a$ noktasındaki teğeti (Şekil 3.47) $(a, f(a))$ noktasından geçer, dolayısıyla nokta-eğim denklemi şu şekildedir:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Yani, teğet

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

lineer fonksiyonunun grafiğidir. Doğru f 'nin grafiğine yakın kaldığı sürece, $L(x)$ $f(x)$ 'e iyi bir yaklaşım verecektir.

TANIMLAR Lineerizasyon, Standart Linear Yaklaşım

f fonksiyonu $x = a$ 'da türevlenebilirse,

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

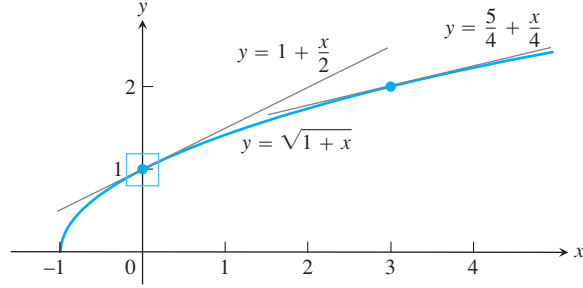
yaklaşırma fonksiyonu, f 'nin a 'daki **lineerizasyonudur**. f 'ye L tarafından yapılan

$$f(x) \approx L(x)$$

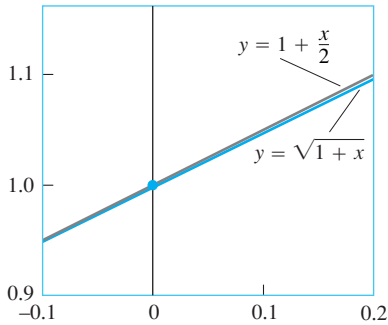
yaklaşımı f 'nin a 'daki **standart linear yaklaşımdır**. $x = a$ noktası yaklaşımın **merkezidir**.

ÖRNEK 1 Bir Lineerizasyon Bulmak

$f(x) = \sqrt{1+x}$ 'in $x=0$ 'daki lineerizasyonunu bulun (Şekil 3.48).



ŞEKİL 3.48 $y = \sqrt{1+x}$ 'in grafiği ve $x=0$ ve $x=3$ 'teki lineerizasyonları. Şekil 3.49 da y -eksenindeki 1 civarında küçük bir çerçevenin büyütülmüş görüntüsü verilmiştir



ŞEKİL 3.49 Şekil 3.48'deki çerçevenin büyütülmüş görüntüsü.

Çözüm

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$$

olduğu için, $f(0) = 1$ ve $f'(0) = 1/2$ 'dir. Buradan

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}(x - 0) = 1 + \frac{x}{2}$$

bulunur. Şekil 3.49'a bakın

Örnek 1'deki $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ yaklaşımının 0 'a yakın x 'ler için ne kadar doğru olduğuna bakın.

Sıfırdan uzaklaştıkça doğruluğu kaybederiz. Örneğin, $x = 2$ için, lineerizasyon $\sqrt{3}$ için yaklaşım olarak 2 'yi verir ki, bir ondalık basamağa kadar bile doğru değildir.

Bu hesaplamalarla lineerizasyonla bütün yapacaklarımızın bir hesap makinesiyle yapılmasının daha iyi olacağı fikrine kapılmayın. Pratikte, asla belirli bir karekökü bulmak için bir lineerizasyon kullanmayız. Bir lineerizasyonun yararı karmaşık bir fonksiyonu bütün bir değer aralığında daha basitiyle değiştirme becerisidir. 0 'a yakın x değerlerinde $\sqrt{1+x}$ ile çalışmak zorundaysak ve ortaya çıkacak küçük bir hataya göz yumabilecek

Yaklaşım	Gerçek değer	Gerçek değer-Yaklaşım
$\sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.10$	1.095445	$< 10^{-2}$
$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$	1.024695	$< 10^{-3}$
$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.00250$	1.002497	$< 10^{-5}$

durumdaysak, $1 + (x/2)$ ile çalışabiliriz. Elbette, bu durumda da hatanın ne kadar olduğunu bilmemiz gerekir. Bölüm 11'de hata tahmini üzerine daha söyleyeceklerimiz var.

Normalde bir lineer yaklaşım merkezinden uzakta hassaslığını yitirir. Şekil 3.48'in gösterdiği gibi, $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ yaklaşımı büyük olasılıkla $x = 3$ civarında yararlı olamayacak kadar kaba olacaktır. O noktada, $x = 3$ 'teki lineerizasyona ihtiyacımız vardır.

ÖRNEK 2 Başka Bir Noktada Bir Lineerizasyon Bulmak

$f(x) = \sqrt{1+x}$ 'in $x = 3$ 'teki lineerizasyonunu bulun.

Çözüm $L(x)$ 'i tanımlayan denklemi $a = 3$ 'te hesaplarız.

$$f(3) = 2, \quad f'(3) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \Big|_{x=3} = \frac{1}{4}.$$

olduğu için,

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}$$

$x = 3.2$ 'de, Örnek 2'deki lineerizasyon

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3.2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3.2}{4} = 1.250 + 0.800 = 2.050$$

verir, ki bu da gerçek değer $\sqrt{4.2} \approx 2.04939$ 'dan binde birden daha az bir oranda değişir. Örnek 1'deki lineerizasyon

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3.2} \approx 1 + \frac{3.2}{2} = 1 + 1.6 = 2.6,$$

ise gerçek değerden %25'ten daha fazla fark gösteren bir sonuçtur.

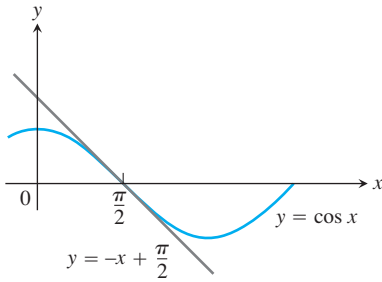
ÖRNEK 3 Kosinüs Fonksiyonu İçin Bir Lineerizasyon Bulmak

$f(x) = \cos x$ 'in $x = \pi/2$ 'deki lineerizasyonunu bulun (Şekil 3.50).

Çözüm $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, $f'(x) = -\sin x$, ve $f'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$, olduğundan,

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) \\ &= 0 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -x + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

buluruz.



ŞEKİL 3.50 $f(x) = \cos x$ 'in grafiği ve $x = \pi/2$ 'deki lineerizasyonu. $x = \pi/2$ yakınında $\cos x \approx -x + (\pi/2)$ (Örnek 3).

Kökler ve kuvvetler için önemli bir lineer yaklaşım şudur:

$$(1 + x)^k \approx 1 + kx \quad (x \text{ 0'a yakın, } k \text{ herhangi bir sayı})$$

(Alıştırma 15). Sıfıra yeterince yakın x değerlerinde iyi sonuç veren bu yaklaşımın geniş uygulamaları vardır. Örneğin, x küçük ise,

$$\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad k = 1/2$$

$$\frac{1}{1 - x} = (1 - x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1 + x \quad k = -1; x \text{ yerine } -x$$

$$\sqrt[3]{1 + 5x^4} = (1 + 5x^4)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}(5x^4) = 1 + \frac{5}{3}x^4 \quad k = 1/3; x \text{ yerine } 5x^4$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-1/2} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 \quad k = -1/2; x \text{ yerine } -x^2$$

Diferansiyeller

Bazen y 'nin x 'e göre türevini göstermek için dy/dx Liebniz notasyonunu kullanırız. Görünüşünün tersine, bu bir oran değildir. Şimdi, oranları tanımlı olduğunda türeve eşit olacak olan iki yeni değişken, dx ve dy tanıtacağız.

TANIM Diferansiyeller

$y = f(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. **dx diferansiyeli** bağımsız bir değişkendir. **dy diferansiyeli**

$$dy = f'(x) dx$$

olarak tanımlanır.

Bağımsız değişken dx 'in aksine, dy değişkeni her zaman bağımlı bir değişkendir. Hem x 'e hem de dx 'e bağlıdır. dx belirli bir değerse ve x , f fonksiyonunu tanım kümesinde özel bir sayı ise dy 'nin sayısal değeri tanımlıdır.

ÖRNEK 4 dy Diferansiyelini Bulmak

(a) $y = x^5 + 37x$ ise dy 'yi bulun.

(b) $x = 1$ ve $dx = 0.2$ ise, dy 'nin değerini bulun.

Çözüm

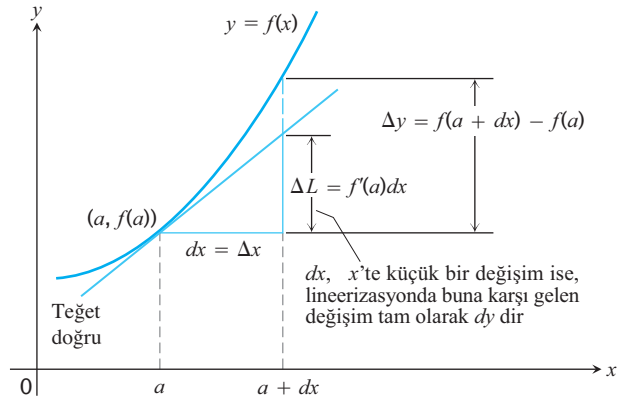
(a) $dy = (5x^4 + 37) dx$

(b) dy 'nin ifadesinde $x = 1$ ve $dx = 0.2$ yazarsak;

$$dy = (5 \cdot 1^4 + 37)0.2 = 8.4. \quad \blacksquare$$

buluruz.

Diferansiyellerin geometrik anlamları Şekil 3.51 de gösterilmiştir. $x = a$ olsun ve $dx = \Delta x$ koyun. Buna karşılık $y = f(x)$ 'teki değişme



ŞEKİL 3.51 Geometrik olarak, dy diferansiyeli f 'nin $x = a$ 'daki lineerizasyonunun $dx = \Delta x$ değişimine karşı gelen ΔL değişimidir.

$$\Delta y = f(a + dx) - f(a).$$

Buna karşılık L teğet doğrusundaki değişim

$$\begin{aligned} \Delta L &= L(a + dx) - L(a) \\ &= \underbrace{f(a) + f'(a)[(a + dx) - a]}_{L(a + dx)} - \underbrace{f(a)}_{L(a)} \\ &= f'(a) dx \end{aligned}$$

dir. Yani, $x = a$ ve $dx = \Delta x$ olduğunda f 'nin lineerizasyonundaki değişim tam olarak dy diferansiyelinin değeridir. Bu nedenle dy , x 'te $dx = \Delta x$ kadar bir değişim meydana geldiğinde, teğet doğrunun buna karşı gelen yükselmesini veya alçalmasını gösterir.

$dx \neq 0$ ise, dy diferansiyelinin dx diferansiyeline oranı $f'(x)$ türevine eşittir çünkü:

$$dy \div dx = \frac{f'(x) dx}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

olur. Bazen $dy = f'(x) dx$ yerine df 'e **f 'nin diferansiyeli** diyerek

$$df = f'(x) dx$$

yazarız. Örneğin, $f(x) = 3x^2 - 6$ ise

$$df = d(3x^2 - 6) = 6x dx.$$

gibi

$$\frac{d(u + v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \text{veya} \quad \frac{d(\sin u)}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

gibi her türev formülüne karşılık,

$$d(u + v) = du + dv \quad \text{veya} \quad d(\sin u) = \cos u du$$

şeklinde bir diferansiyel form karşılık gelir.

ÖRNEK 5 Fonksiyonların Diferansiyellerini Bulmak

$$(a) \quad d(\tan 2x) = \sec^2(2x) d(2x) = 2 \sec^2 2x dx$$

$$(b) \quad d\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{(x+1)dx - x d(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x dx + dx - x dx}{(x+1)^2} = \frac{dx}{(x+1)^2}$$

Diferansiyellerle Tahmin Etme

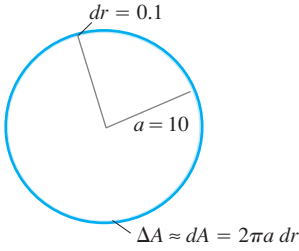
Türevlenebilir $f(x)$ fonksiyonunun bir a noktasındaki değerini bildiğimizi ve bu değer in çok yakındaki bir $a + dx$ noktasına gittiğimizde nasıl değiştiğini tahmin etmek istediğimizi varsayalım. dx küçükse, Şekil 3.51den Δy 'nin yaklaşık olarak dy diferansiyeline eşit olduğunu görebiliriz, çünkü

$$f(a + dx) = f(a) + \Delta y,$$

olduğundan diferansiyel yaklaşımı $dx = \Delta x$ olmak üzere

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

verir. Böylece, $\Delta y \approx dy$ yaklaşımı, $f(a)$ biliniyorsa ve dx küçükse $f(a + dx)$ 'i hesaplamak için kullanılabilir.



ŞEKİL 3.52 $dr = 0.1$ ve $a = 10$ iken olduğu gibi, dr a ile karşılaştırıldığında küçükse, $dA = 2\pi a dr$ diferansiyeli $r = a + dr$ yarıçaplı çemberin alanını tahmin için bir yol verir (Örnek 6).

ÖRNEK 6 Diferansiyellerle Tahmin Etme

Bir çemberin yarıçapı r , $a = 10$ m'den 10.1 m'ye artıyor (Şekil 3.52). Çemberin alanı A 'daki artışı tahmin etmek için dA 'yı kullanın. Genişletilmiş çemberin alanını tahmin edin ve bunu gerçek alanla karşılaştırın.

Çözüm $A = \pi r^2$ olduğu için, tahmin edilen artış

$$dA = A'(a) dr = 2\pi a dr = 2\pi(10)(0.1) = 2\pi \text{ m}^2.$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} A(10 + 0.1) &\approx A(10) + 2\pi \\ &= \pi(10)^2 + 2\pi = 102\pi. \end{aligned}$$

dir. Yarıçapı 10.1 m olan çemberin alanı yaklaşık olarak $102\pi \text{ m}^2$ dir.

Gerçek alan

$$\begin{aligned} A(10.1) &= \pi(10.1)^2 \\ &= 102.01\pi \text{ m}^2 \end{aligned}$$

dir. Tahminimizdeki hata $\Delta A - dA$ farkı olan $0.01\pi \text{ m}^2$ dir.

Diferansiyel Yaklaşımındaki Hata

$f(x)$ fonksiyonu $x = a$ da türevlenebilir olsun ve x 'teki bir artma $dx = \Delta x$ olsun. $x = a$ 'dan $a + \Delta x$ 'e değişirken f 'deki değişimi tanımlamanın iki yolu vardır:

$$\text{Gerçek değişim:} \quad \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$$

$$\text{Diferansiyel tahmin:} \quad df = f'(a) \Delta x$$

df 'nin Δf 'e yaklaşımı ne kadar iyidir?

Yaklaşımındaki hatayı Δf 'ten df 'i çıkararak buluruz:

$$\begin{aligned}
 \text{Yaklaşım hatası} &= \Delta f - df \\
 &= \Delta f - f'(a)\Delta x \\
 &= \underbrace{f(a + \Delta x) - f(a)}_{\Delta f} - f'(a)\Delta x \\
 &= \underbrace{\left(\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a) \right)}_{\text{buna } \epsilon \text{ deyin}} \cdot \Delta x \\
 &= \epsilon \cdot \Delta x.
 \end{aligned}$$

$\Delta x \rightarrow 0$ iken

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

fark oranı $f'(a)$ 'ya yaklaşır ($f'(a)$ 'nın tanımını hatırlayın), dolayısıyla parantez içindeki değer çok küçük bir sayı haline gelir (bu yüzden ona ϵ dedik). Aslında, $\Delta x \rightarrow 0$ iken $\epsilon \rightarrow 0$ 'dır. Δx küçük ise $\epsilon \Delta x$ yaklaşım hatası daha küçüktür.

$$\Delta f = \underbrace{f'(a)\Delta x}_{\text{gerçek değişim}} + \underbrace{\epsilon \Delta x}_{\text{tahmini değişim}}$$

Hatanın tam olarak ne kadar küçük olduğunu bilmememize ve Bölüm 11'den önce bunun üzerine fazla ilerleme yapmayacak olmamıza rağmen, burada bahsedilmeye değer bir şey vardır, yani denklemin aldığı *form*.

$x = a$ yakınında $y = f(x)$ 'teki değişim

$y = f(x)$ $x = a$ 'da türevlenebiliyor ve x a 'dan $a + \Delta x$ 'e değişiyorsa, f 'deki Δy değişimi

$$\Delta y = f'(a) \Delta x + \epsilon \Delta x \quad (1)$$

formunda bir denklemlerle verilir. Burada $\Delta x \rightarrow 0$ iken $\epsilon \rightarrow 0$ olur.

Örnek 6'da

$$\Delta A = \pi(10.1)^2 - \pi(10)^2 = (102.01 - 100)\pi = \underbrace{(2\pi)}_{dA} + \underbrace{(0.01\pi)}_{\text{hata}} \text{ m}^2$$

bulduk, dolayısıyla yaklaşım hatası $\Delta A - dA = \epsilon \Delta r = 0.01\pi$ ve $\epsilon = 0.01\pi/\Delta r = 0.01\pi/0.1 = 0.1\pi$ m'dir.

(1) denklemini Zincir Kuralının ispatını başarılı bir şekilde sonlandırmamızı sağlar.

Zincir Kuralının İspatı

Amacımız $f(u)$ u 'nun türevlenebilir bir fonksiyonu ve $u = g(x)$ de x 'in türevlenebilir bir fonksiyonu ise, $y = f(g(x))$ bileşkesi x 'in türevlenebilir bir fonksiyonudur.

Daha açık olarak, g x_0 'da türevlenebiliyorsa ve f de $g(x_0)$ 'da türevlenebiliyorsa, bileşke x_0 'da türevlenebilir:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Δx x 'in bir artımı ve Δu ve Δy de u ve y 'de buna karşılık gelen artımlar olsun. Denklem (1) i uygulamakla

$$\Delta u = g'(x_0)\Delta x + \epsilon_1 \Delta x = (g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

elde ederiz. Burada $\Delta x \rightarrow 0$ iken $\epsilon_1 \rightarrow 0$ olur. Aynı şekilde,

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \epsilon_2 \Delta u = (f'(u_0) + \epsilon_2)\Delta u$$

olur ve yine $\Delta u \rightarrow 0$ iken $\epsilon_2 \rightarrow 0$ 'dır. Ayrıca $\Delta x \rightarrow 0$ iken $\Delta u \rightarrow 0$ olduğuna dikkat edin. Δu ve Δy denklemlerini birleştirmek

$$\Delta y = (f'(u_0) + \epsilon_2)(g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

verir, dolayısıyla

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) + \epsilon_2 g'(x_0) + f'(u_0)\epsilon_1 + \epsilon_2\epsilon_1$$

olur. Δx sıfıra giderken ϵ_1 ve ϵ_2 de sıfıra gittiği için, denklemin sağ tarafındaki dört terimin üçü limitte sıfır olur ve

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

kalır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Değişime Karşı Duyarlılık

$df = f'(x) dx$ denklemi f 'nin çıktısının farklı x değerleri için girdilerdeki değişikliklere ne kadar duyarlı olduğunu göstermektedir. f' 'nin x 'teki değeri ne kadar büyükse, dx 'e verilen bir değişikliğin etkisi de o kadar büyüktür. Bir a noktasından yakınındaki bir $a + dx$ noktasına giderken f 'deki değişimi üç şekilde tanımlayabiliriz.

	Gerçek	Tahmin edilen
Mutlak değişim	$\Delta f = f(a + dx) - f(a)$	$df = f'(a) dx$
Bağıl değişim	$\frac{\Delta f}{f(a)}$	$\frac{df}{f(a)}$
Yüzde değişim	$\frac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\frac{df}{f(a)} \times 100$

ÖRNEK 7 Bir Kuyunun Derinliğini Hesaplamak

$s = 16t^2$ denkleminde, attığınız ağır bir taşın suya ne kadar zamanda düştüğünü ölçerek bir kuyunun derinliğini hesaplamak istiyorsunuz. Hesabınız zamanı ölçerken yapacağınız 0.1 sn'lik bir hataya ne kadar duyarlıdır?

Çözüm

$$ds = 32t dt$$

denkleminde ds 'nin boyutu t 'nin ne kadar büyük olduğuna bağlıdır.

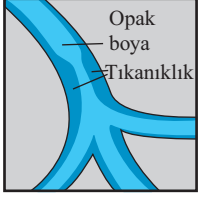
Eğer $t = 2$ sn ise, $dt = 0.1$ 'in yol açacağı hata sadece

$$ds = 32(2)(0.1) = 6.4 \text{ ft.}$$

olacaktır. Üç saniye sonra, $t = 5$ sn iken, aynı dt 'nin yol açtığı hata

$$ds = 32(5)(0.1) = 16 \text{ ft.}$$

olacaktır. Kuyunun tahmin edilen derinliğinin gerçek derinliğinden farkı, zaman ölçümündeki verilen bir hata için, atılan taşın aşağıdaki suya çarpmasına kadar geçen süre arttıkça büyür. ■



Anjiyografi

Opak bir boya, içerisinde x -ışınları altında görülebilmesi amacıyla kısmen tıkalı bir atardamara enjekte edilir. Bu tıkanıklığın yerini ve ciddiliğini ortaya çıkarır.



Anjioplasti

Üzerine balon takılmış bir kateter tıkanık noktada damarı genişletmek için atardamar içinde şişirilir.

ÖRNEK 8 Tıkanmış Damarları Açmak

1830'ların sonunda, Fransız fizyolog Jean Poiseuille ("puasoy") günümüzde normal akışına geri dönebilmesi için kısmen tıkalı bir atardamarın yarıçapının ne kadar genişletilmesi gerektiğini tahmin etmek için kullandığımız formülü keşfetmiştir. Formülü,

$$V = kr^4$$

sabit basınçta birim zamanda küçük bir boru veya tüpten akan akışkanın hacmi V 'nin, bir sabit kere tübün yarıçapı r 'nin dördüncü kuvveti olduğunu söyler. r 'deki %10'luk bir artış V 'yi nasıl etkileyecektir?

Çözüm r ve V 'nin diferansiyelleri arasındaki ilişki şu formülle verilir:

$$dV = \frac{dV}{dr} dr = 4kr^3 dr.$$

Dolayısıyla, V 'deki bağıl değişim

$$\frac{dV}{V} = \frac{4kr^3 dr}{kr^4} = 4 \frac{dr}{r}$$

bulunur. V 'deki bağıl değişim r 'deki bağıl değişimin 4 katıdır, dolayısıyla r 'deki %10'luk bir artış, akışta %40'luk bir artış yaratacaktır. ■

ÖRNEK 9 Kütlein Enerjiye Dönüşümü

Newton'un ikinci yasası,

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m \frac{dv}{dt} = ma$$

kütlein sabit olduğu varsayımına dayanarak kurulmuştur, ancak bunun tamamen doğru olmadığını biliyoruz, çünkü bir cismin kütlesi hızla birlikte artar. Einstein'ın düzeltilmiş formülünde, kütlein değeri

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

olarak verilir. Burada "durgun kütle" m_0 hareket etmeyen bir cismin kütleini temsil eder ve c 300.000 km/sn civarında olan ışık hızıdır. Eklenen v hızından kaynaklanan, kütledeki Δm artışını tahmin etmek için

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 \quad (2)$$

yaklaşımını kullanın.

Çözüm v , c ile karşılaştırıldığında çok küçükse, c , v^2/c^2 sıfıra yakın olur ve

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \quad x = \frac{v}{c} \text{ ile Denklem (2)}$$

yaklaşımını kullanmak güvenlidir. Buradan,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx m_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \right] = m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \left(\frac{1}{c^2} \right)$$

veya

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \left(\frac{1}{c^2} \right) \quad (3)$$

(3) denklemi küttelede, eklenen v hızından kaynaklanan artışı ifade eder.

Enerji Yorumu

Newton fiziğinde $(1/2)m_0v^2$ cismin kinetik enerjisidir (KE), ve (3) denklemi

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$$

şeklinde yeniden yazarsak,

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 - \frac{1}{2} m_0 (0)^2 = \Delta(\text{KE})$$

veya

$$(\Delta m)c^2 \approx \Delta(\text{KE})$$

olduğunu görürüz. Başka bir deyişle, 0 hızından v hızına giderken kinetik enerjideki değişim $\Delta(\text{KE})$ yaklaşık olarak $(\Delta m)c^2$ 'ye eşittir, kütledeki değişim kere ışık hızının karesi. $c \approx 3 \times 10^8$ m/sn'yi kullanarak, kütledeki küçük bir değişikliğin enerjide büyük bir değişiklik yarattığını görürüz. ■

ALİŞTIRMALAR 3.8

Lineerizasyonları Bulmak

1–4 alıştırmalarında $f(x)$ 'in $x = a$ 'daki $L(x)$ lineerizasyonunu bulun.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 3$, $a = 2$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$, $a = -4$
3. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $a = 1$
4. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = -8$

Yaklaşım İçin Lineerizasyon

Verilen x_0 noktalarını içeren aralıklarda, 5–10 alıştırmalarındaki fonksiyonların yerine geçecek lineerizasyonlar istiyorsunuz. İşinizi

mümkün olduğunca basitleştirmek için de, her lineerizasyonun merkezini x_0 'da değil de, verilen fonksiyon ve birinci türevinin kolayca hesaplanabileceği yakındaki bir $x = a$ tamsayısında almak istiyorsunuz. Her durumda hangi lineerizasyonu kullanırsınız?

5. $f(x) = x^2 + 2x$, $x_0 = 0.1$
6. $f(x) = x^{-1}$, $x_0 = 0.9$
7. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$, $x_0 = -0.9$
8. $f(x) = 1 + x$, $x_0 = 8.1$
9. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8.5$
10. $f(x) = \frac{x}{x + 1}$, $x_0 = 1.3$

Trigonometrik Fonksiyonların Lineerleştirilmesi

11–14 alıştırmalarında, f' 'nin $x = a$ 'daki lineerizasyonunu bulun. Lineerizasyonu ve f' 'yi birlikte çizin.

11. $f(x) = \sin x$ (a) $x = 0$, (b) $x = \pi$
12. $f(x) = \cos x$ (a) $x = 0$, (b) $x = -\pi/2$
13. $f(x) = \sec x$ (a) $x = 0$, (b) $x = -\pi/3$
14. $f(x) = \tan x$ (a) $x = 0$, (b) $x = \pi/4$

$(1 + x)^k \approx 1 + kx$ Yaklaşımı

15. $f(x) = (1 + x)^k$ 'nin $x = 0$ 'daki lineerizasyonunun $L(x) = 1 + kx$ olduğunu gösterin.
16. 0'a yakın x değerlerinde $f(x)$ fonksiyonuna bir yaklaşım bulmak için $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ formülünü kullanın.
 - a. $f(x) = (1 - x)^6$
 - b. $f(x) = \frac{2}{1 - x}$
 - c. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x}}$
 - d. $f(x) = \sqrt{2 + x^2}$
 - e. $f(x) = (4 + 3x)^{1/3}$
 - f. $f(x) = \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{2 + x}\right)^2}$
17. **Hesap makinesinden daha hızlı** $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ formülünü kullanarak aşağıdakileri tahmin edin.
 - a. $(1.0002)^{50}$
 - b. $\sqrt[3]{1.009}$
18. $x = 0$ 'da $f(x) = \sqrt{x + 1} + \sin x$ 'in lineerizasyonunu bulun. $\sqrt{x + 1}$ ve $\sin x$ 'in tek tek lineerizasyonlarına nasıl bağlıdır?

Diferansiyel Formda Türevler

19–30 alıştırmalarında, dy 'yi bulun.

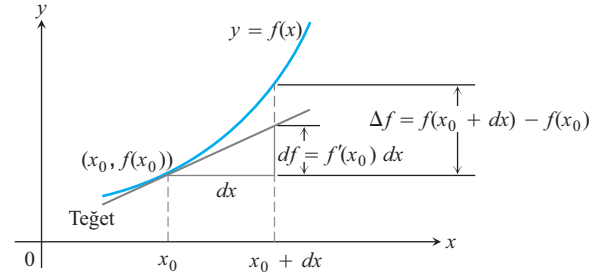
19. $y = x^3 - 3\sqrt{x}$
20. $y = x\sqrt{1 - x^2}$
21. $y = \frac{2x}{1 + x^2}$
22. $y = \frac{2\sqrt{x}}{3(1 + \sqrt{x})}$
23. $2y^{3/2} + xy - x = 0$
24. $xy^2 - 4x^{3/2} - y = 0$
25. $y = \sin(5\sqrt{x})$
26. $y = \cos(x^2)$
27. $y = 4 \tan(x^3/3)$
28. $y = \sec(x^2 - 1)$
29. $y = 3 \csc(1 - 2\sqrt{x})$
30. $y = 2 \cot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Yaklaşım Hatası

31–36 alıştırmalarında, x x_0 'dan $x_0 + dx$ 'e değişirken her $f(x)$ fonksiyonu değer değiştirir.

- a. $\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$ değişimini;
- b. $df = f'(x_0) dx$ tahmininin değerini; ve
- c. $|\Delta f - df|$ yaklaştırma atasını

bulun.



31. $f(x) = x^2 + 2x$, $x_0 = 1$, $dx = 0.1$
32. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$, $x_0 = -1$, $dx = 0.1$
33. $f(x) = x^3 - x$, $x_0 = 1$, $dx = 0.1$
34. $f(x) = x^4$, $x_0 = 1$, $dx = 0.1$
35. $f(x) = x^{-1}$, $x_0 = 0.5$, $dx = 0.1$
36. $f(x) = x^3 - 2x + 3$, $x_0 = 2$, $dx = 0.1$

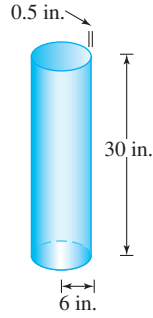
Değişimlerin Diferansiyel Tahminleri

37–42 alıştırmalarında, hacim veya yüzey alanında verilen değişimi tahmin eden bir diferansiyel formül yazın.

37. Yarıçap r_0 'dan $r_0 + dr$ 'ye değişirken bir kürenin hacmi $V = (4/3)\pi r^3$ 'teki değişim.
38. Kenar uzunlukları x_0 'dan $x_0 + dx$ 'e değişirken bir kübün hacmi $V = x^3$ 'teki değişim.
39. Kenar uzunlukları x_0 'dan $x_0 + dx$ 'e değişirken bir kübün yüzey alanı $S = 6x^2$ 'deki değişim.
40. Yarıçap r_0 'dan $r_0 + dr$ 'ye değişir ve yükseklik aynı kalırken dik bir koninin yan yüzey alanı $S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ 'deki değişiklik.
41. Yarıçap r_0 'dan $r_0 + dr$ 'ye değişir ve yükseklik aynı kalırken dik bir silindirin hacmi $V = \pi r^2 h$ 'deki değişiklik.
42. Yükseklik h_0 'dan $h_0 + dh$ 'ye değişir ve yarıçap aynı kalırken dik bir silindirin yan yüzey alanı $S = 2\pi r h$ 'deki değişiklik.

Uygulamalar

43. Bir çemberin yarıçapı 2.00'den 2.02 m'ye çıkarılmaktadır.
 - a. Alanda meydana gelen değişikliği tahmin edin.
 - b. (a)'daki tahmini çemberin esas alanının yüzdesi olarak ifade edin.
44. Bir ağacın çapı 10 inçtir. Bir yıl içinde, çevresi 2 inç büyür. Ağacın çapı ve kesit alanı yaklaşık olarak ne kadar büyümüştür?
45. **Hacim tahmin etmek** Yüksekliği 30 inç, yarıçapı 6 inç ve kalınlığı 0.5 inç olan silindir şeklindeki bir malzemenin hacmini tahmin edin.



- 46. Bir binanın yüksekliğini tahmin etmek** Bir binanın tabanından 30 ft uzakta duran bir ölçümcü, binanın tepesine olan yükselme açısını 75° olarak ölçüyor. Bina tahmin edilen yüksekliğindeki hatanın %4'ten az olması için açı ne kadar hassasiyetle ölçülmelidir?
- 47. Tolerans** Dik bir silindirin yüksekliği ve yarıçapı aynıdır, dolayısıyla silindirin hacmi $V = \pi h^3$ olur. Hacim, gerçek değerinden en fazla %1 hata ile hesaplanacaktır. h 'de izin verilebilecek en büyük hatayı yaklaşık olarak bulun ve h 'nin bir yüzdesi olarak ifade edin.
- 48. Tolerans**
- 10 m yüksekliğinde silindirik bir tankın iç çapı tankın hacminin %1 hatayla hesaplanabilmesi için hangi hatayla ölçülmelidir?
 - Tankın dış çapı tankı boyamak için gereken boya miktarının %5 hatayla hesaplanabilmesi için hangi hatayla ölçülmelidir?
- 49. Bozuk para üretmek** Bir üretici federal hükümet için bozuk para yapmak üzere anlaşılmıştır. Paraların ideal ağırlıklarından en fazla $1/1000$ kadar farklı olmaları gerekiyorsa, paraların yarıçapı r 'de ne kadar bir hataya göz yumulabilir? Kalınlığın değişmediğini varsayın.
- 50. Bir kübün hacmindeki değişikliği çözmek.** Kenarlarının uzunluğu x olan bir kübün hacmi $V = x^3$, x 'teki Δx kadar artışla ΔV kadar değişiyor. Bir resim çizerek ΔV 'yi geometrik açıdan, aşağıda verilen hacimlerin toplamı olarak nasıl ifade edilebileceğini gösterin.
- Boyutları $x \times x \times \Delta x$ olan üç dilim.
 - Boyutları $x \times \Delta x \times \Delta x$ olan üç çubuk.
 - Boyutları $\Delta x \times \Delta x \times \Delta x$ olan bir küp.
- $dV = 3x^2 dx$ diferansiyel formülü V 'deki değişimi üç dilimi kullanarak hesaplar.
- 51. Uçuş manevralarının kalbe etkisi.** Kalbin ana pompalama odacığı, sol karıncık, tarafından birim zamanda yapılan iş

$$W = PV + \frac{V\delta v^2}{2g}$$

denklemleriyle verilir. Burada W iş, P ortalama kan basıncı, V birim zamanda pompalanan kanın hacmi, δ kanın yoğunluğu, v çıkan kanın ortalama hızı ve g de yerçekimi ivmesidir.

P , V , δ ve v sabitseler, W sadece g 'nin bir fonksiyonu olur ve denklem

$$W = a + \frac{b}{g} \quad (a, b \text{ sabit})$$

haline gelir. NASA'nın tıp ekibinin bir üyesi olarak, g 'de uçuş manevraları dolayısıyla oluşacak belirgin değişikliklere W 'nin ne kadar duyarlı olduğunu bilmek istiyorsunuz ve bu da g 'nin başlangıç değerine bağlıdır. Araştırmanızın bir parçası olarak, verilen bir dg değişiminin $g = 5.2 \text{ ft/sn}^2$ olan aydaki etkisini aynı değişimin $g = 32 \text{ ft/sn}^2$ olan dünyadaki etkisiyle karşılaştırmaya karar veriyorsunuz. dW_{ay} 'in $dW_{dünya}$ 'ya oranını bulmak için yukarıdaki basitleştirilmiş denklemi kullanın.

- 52. Yerçekimi ivmesini ölçmek** Bir saat sarkacının uzunluğu L sıcaklığı kontrol edilerek sabit tutulduğunda, sarkacın periyodu T yerçekimi ivmesi g 'ye bağlıdır. Dolayısıyla periyot, saat dünya üzerinde bir yerden diğerine götürülürken g 'deki değişime bağlı olarak biraz değişecektir. ΔT 'yi izleyerek, T , g ve L 'yi birbirine bağlayan $T = 2\pi(L/g)^{1/2}$ denkleminde g 'deki değişimi tahmin edebiliriz.
- L sabit ve g serbest değişken olmak üzere, dT 'yi hesaplayın ve bunu (b) ile (c)'de soruları yanıtlamakta kullanın.
 - g artıyorsa, T artar mı, azalır mı? Sarkaçlı bir saat ileri mi geri mi gider? Açıklayın.
 - 100 cm uzunluğunda sarkacı olan bir saat $g = 980 \text{ cm/sn}^2$ olan bir yerden başka bir yere götürülüyor. Bu periyodu $dT = 0.001 \text{ sn}$ kadar arttırıyor. dg 'yi bulun ve yeni yerde g 'nin değerini belirleyin.
- 53.** Bir kübün kenarı %1'lik bir hatayla 10 cm olarak ölçülmektedir. Kübün hacmi bu ölçümle hesaplanacaktır. Hacim hesabındaki yüzde hatayı bulun.
- 54.** Alanı, gerçek değerinin %2'si kadar bir hatayla bulduğunuzdan emin olmak için, bir karenin kenarını ne hassaslıkla ölçmelisiniz?
- 55.** Bir kürenin çapı $100 \pm 1 \text{ cm}$ olarak ölçülüyor ve hacmi de bu ölçümle hesaplanıyor. Hacim hesabındaki yüzde hatayı bulun.
- 56.** Hacim hesaplanırken en fazla %3 hata yapılabilecekse, bir kürenin çapı D 'yi ölçerken izin verilebilecek yüzde hatayı bulun.
- 57. (Örnek 7'nin devamı)** t 'yi ölçerken yapılacak %5'lik bir hatanın $s = 16t^2$ denkleminde s bulunurken %10'luk bir hataya neden olacağını gösterin.
- 58. (Örnek 8'in devamı)** V 'yi %50 arttırmak için r hangi yüzdeyle arttırılmalıdır?

Teori ve Örnekler

- 59.** Orijindeki lineerizasyonu ile $\sqrt{1+x}$ 'e yapılan yaklaşımı $x \rightarrow 0$ iken iyileşmesi gerektiğini

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}}{1 + (x/2)} = 1$$

limitini hesaplayarak gösterin.

60. Orijindeki lineerizasyonu ile $\tan x$ 'e yapılan yaklaşımın $x \rightarrow 0$ iken iyileşmesi gerektiğini

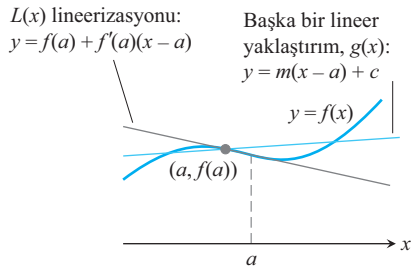
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

limitini hesaplayarak gösterin.

61. **Lineerizasyon en iyi lineer yaklaşımdır.** (Lineerizasyonu kullanmamızın nedeni budur.) $y = f(x)$ 'in $x = a$ 'da türevlenebildiğini ve $g(x) = m(x - a) + c$ 'nin de, m ve c sabit olmak üzere, lineer bir fonksiyon olduğunu varsayın. Eğer $E(x) = f(x) - g(x)$ hatası $x = a$ civarında yeterince küçükse, $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ lineerizasyonu yerine f' 'ye lineer yaklaşım olarak g 'yi kullanabiliriz. g üzerine aşağıdaki koşulları koyarsak,

1. $E(a) = 0$ $x = a$ 'da yaklaşım hatası sıfırdır.
2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{E(x)}{x - a} = 0$ $x = a$ ile karşılaştırıldığında hata ihmal edilebilir.

$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ olduğunu gösterin. Yani, $L(x)$ lineerizasyonu hatası hem $x = a$ 'da sıfır olan hem de $x = a$ 'ya göre ihmal edilebilir tek lineer yaklaşımdır.



62. Kuadratik Yaklaşımlar

- a. $Q(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2$ $f(x)$ 'in $x = a$ da aşağıdaki özellikleri sağlayan bir kuadratik yaklaşımı olsun:
 - i. $Q(a) = f(a)$
 - ii. $Q'(a) = f'(a)$
 - iii. $Q''(a) = f''(a)$ b_0, b_1 ve b_2 katsayılarını belirleyin.
- b. $f(x) = 1/(1 - x)$ 'in $x = 0$ 'daki yaklaşımını bulun.
- T c. $f(x) = 1/(1 - x)$ 'i ve $x = 0$ 'daki yaklaşımını çizin. Sonra her iki grafikte $(0, 1)$ noktasını yaklaştırın. Gördüğünüzü açıklayın.
- T d. $g(x) = 1/x$ 'in $x = 1$ 'deki yaklaşımını bulun. g 'yi ve yaklaşımını birlikte çizin. Gördüğünüzü açıklayın.
- T e. $h(x) = \sqrt{1 + x}$ 'in $x = 0$ 'daki yaklaşımını bulun. h 'yi ve yaklaşımını birlikte çizin. Gördüğünüzü açıklayın.
- f. (b), (d) ve (e) şıklarında, karşı gelen noktalarda f, g ve h 'nin lineerizasyonları nelerdir?

- T 63. **Grafiklerden türevleri okumak** Türevlenebilir eğrilerin büyütüldüklerinde düzleştikleri düşüncesi belirli noktalarda fonksiyonların türevlerinin değerlerini tahmin etmede kullanılabilir. Eğriyi gördüğümüz kısmının istenilen noktada düz bir doğru gibi görüneceği kadar büyütür ve ekranın koordinat dilimlerini kullanarak eğrinin eğimini benzediği doğrunun eğimiymiş gibi okuruz.

- a. İşlemin nasıl yürüdüğünü görmek için, önce $x = 1$ 'de $y = x^2$ fonksiyonu ile deneyin. Okuyacağımız eğimin 2 olması gerekir.
- b. $x = 1, x = 0$ ve $x = -1$ 'de $y = e^x$ eğrisini deneyin. Her durumda, tahmin ettiğiniz türevin değerini e^x 'in o noktadaki değeriyle karşılaştırın. Ne gibi bir ilişki görüyorsunuz? Başka x değerlerini de deneyin. Bölüm 7'de neler olduğu açıklanacaktır.

64. Türevlenebilir bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ 'da yatay bir teğeti olduğunu varsayın. f 'nin $x = a$ 'daki lineerizasyonu hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

65. Durmakta olan bir cismin kütlesini %1 arttırabilmek için hangi bağlı hızla ivmelenmek gerekir?

T 66. Arka arkaya kök almak

- a. Hesap makinenize 2 yazın ve kare-kök tuşuna sürekli basarak (veya arka arkaya 0.5 kuvvetini alarak) art arda karekök alın. Ne gibi bir kalıp görüyorsunuz? Neler olduğunu açıklayın. Arka arkaya onuncu kökleri alırsanız ne olur?
- b. İşlemi, girdi olarak 2 yerine 0.5 alarak tekrarlayın. Şimdi ne oluyor? 2 yerine herhangi bir pozitif x sayısı kullanabilir misiniz? Neler olduğunu açıklayın.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Fonksiyonları Lineerizasyonları ile Karşılaştırmak

67–70 alıştırmaalarında belirli bir I aralığında fonksiyonun yerine lineerizasyonu kullanmaktan doğacak hatayı bulmak için bir BCS kullanacaksınız. Aşağıdaki adımları gerçekleştirin:

- a. f fonksiyonunu I aralığında çizin.
- b. a noktasında fonksiyonun L lineerizasyonunu bulun.
- c. f ve L 'yi tek bir grafikte birlikte çizin.
- d. I aralığındaki mutlak hata $|f(x) - L(x)|$ 'i birlikte çizin ve maksimum değerini bulun.
- e. (d) şıkındaki grafiğinizden, $\epsilon = 0.5, 0.1$ ve 0.01 için

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L(x)| < \epsilon$$

koşulunu sağlayacak bulabildiğiniz en büyük $\delta > 0$ değerini bulun. Sonra grafik olarak δ tahmininizin doğru olup olmadığını kontrol edin.

67. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x, \quad [-1, 2], \quad a = 1$

68. $f(x) = \frac{x - 1}{4x^2 + 1}, \quad \left[-\frac{3}{4}, 1\right], \quad a = \frac{1}{2}$

69. $f(x) = x^{2/3}(x - 2), \quad [-2, 3], \quad a = 2$

70. $f(x) = \sqrt{x} - \sin x, \quad [0, 2\pi], \quad a = 2$

Bölüm 3

Tekrar Soruları

1. Bir f fonksiyonunun türevi nedir? Türevin tanım aralığı ile f' nin tanım aralığı arasındaki ilişki nedir? Örnekler verin.
2. Eğim, teğet ve değişim oranlarını tanımlamada türevin oynadığı rol nedir?
3. Elinizde sadece bir fonksiyonun değerlerinin tablosu varsa, o fonksiyonun türevinin grafiğini nasıl çizersiniz?
4. Bir fonksiyonun açık bir aralıkta ve kapalı bir aralıkta türevlenebilir olması ne anlama gelir?
5. Türevler ve tek taraflı türevler arasındaki ilişki nedir?
6. Bir fonksiyonun bir noktada türevinin *olmamasını* geometrik olarak açıklayın.
7. Bir fonksiyonun bir noktadaki türevlenebilirliği ile o noktadaki sürekliliği arasında nasıl bir ilişki vardır, eğer varsa?
8. Birim basamak fonksiyonu

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$[-1, 1]$ aralığındaki başka bir fonksiyonun türevi olabilir mi? Açıklayın.

9. Türev hesaplamak için hangi kuralları biliyorsunuz? Bir kaç örnek verin.
10. a. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
b. $\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$
c. $\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{du_n}{dx}$
formüllerinin bir polinomun türevini almamızı nasıl sağladığını açıklayın.
11. Onuncu sorudaki üç formüle ek olarak, rasyonel fonksiyonların türevini almak için hangi formüle gerek vardır?
12. İkinci ve üçüncü mertebeden bir türev nedir? Bildiğiniz fonksiyonların kaç türevi vardır? Örnekler verin.

13. Bir fonksiyonun anlık ve ortalama değişim oranları arasındaki ilişki nedir? Bir örnek verin.
14. Hareketin incelenmesinde türevin rolü nedir? Bir cismin bir doğru üzerindeki hareketi hakkında konum fonksiyonunu inceleyerek ne öğrenebilirsiniz? Örnekler verin.
15. Türevler ekonomide nasıl bir rol oynar?
16. Türevlerin diğer uygulamalarına örnek verin.
17. $\lim_{h \rightarrow 0}((\sin h)/h)$ ve $\lim_{h \rightarrow 0}((\cos h - 1)/h)$ limitlerinin sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının türevleriyle ilişkisi var mıdır? Bu fonksiyonların türevleri nedir?
18. $\sin x$ ve $\cos x$ 'in türevlerini biliyorsanız, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ ve $\csc x$ fonksiyonlarının türevlerini nasıl bulabilirsiniz? Bu fonksiyonların türevleri nedir?
19. Altı temel trigonometrik fonksiyon hangi noktalarda süreklidir? Nereden biliyorsunuz?
20. İki türevlenebilir fonksiyonun bileşkesinin türevini hesaplamanın kuralı nedir? Böyle bir türev nasıl hesaplanır? Örnekler verin.
21. $x = f(t)$, $y = g(t)$ parametrik eğrisinin dy/dx eğimi için formül nedir? Formül ne zaman uygulanır? Ne zaman d^2y/dx^2 'yi bulabilmeyi beklersiniz? Örnekler verin.
22. u x 'in türevlenebilir bir fonksiyonu ve n bir tamsayıysa, $(d/dx)(u^n)$ 'yi nasıl hesaplıyorsunuz? Peki ya, n rasyonel bir sayıysa? Örnek verin.
23. Kapalı türev alma nedir? Buna ne zaman ihtiyaç duyarsınız? Örnek verin.
24. İlişkili oranlar problemleri neden ortaya çıkar? Örnek verin.
25. İlişkili oranlar problemlerini çözmek için bir strateji tanımlayın. Bir örneğe uygulayın.
26. Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki lineerizasyonu $L(x)$ nedir? Lineerizasyonun bulunabilmesi için f 'nin a 'da nasıl davranması gerekmektedir? Lineerizasyonlar nasıl kullanılır? Örnek verin.
27. x , a 'dan yakındaki bir $a + dx$ değerine giderse, türevlenebilir bir $f(x)$ fonksiyonunun değerinde buna karşılık gelen değişimi nasıl bulursunuz? Bağlı ve yüzde değişimlerini nasıl tahmin edersiniz? Örnek verin.

Bölüm 3

Problemler

Fonksiyonların Türevleri

1–40 problemlerindeki fonksiyonların türevlerini bulun.

1. $y = x^5 - 0.125x^2 + 0.25x$
2. $y = 3 - 0.7x^3 + 0.3x^7$
3. $y = x^3 - 3(x^2 + \pi^2)$
4. $y = x^7 + \sqrt{7}x - \frac{1}{\pi + 1}$

5. $y = (x + 1)^2(x^2 + 2x)$
6. $y = (2x - 5)(4 - x)^{-1}$
7. $y = (\theta^2 + \sec \theta + 1)^3$
8. $y = \left(-1 - \frac{\csc \theta}{2} - \frac{\theta^2}{4}\right)^2$
9. $s = \frac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}$
10. $s = \frac{1}{\sqrt{t} - 1}$

11. $y = 2 \tan^2 x - \sec^2 x$
12. $y = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{2}{\sin x}$
13. $s = \cos^4(1 - 2t)$
14. $s = \cot^3\left(\frac{2}{t}\right)$
15. $s = (\sec t + \tan t)^5$
16. $s = \csc^5(1 - t + 3t^2)$
17. $r = \sqrt{2\theta} \sin \theta$
18. $r = 2\theta \sqrt{\cos \theta}$
19. $r = \sin \sqrt{2\theta}$
20. $r = \sin(\theta + \sqrt{\theta + 1})$
21. $y = \frac{1}{2}x^2 \csc \frac{2}{x}$
22. $y = 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x}$
23. $y = x^{-1/2} \sec(2x)^2$
24. $y = \sqrt{x} \csc(x + 1)^3$
25. $y = 5 \cot x^2$
26. $y = x^2 \cot 5x$
27. $y = x^2 \sin^2(2x^2)$
28. $y = x^{-2} \sin^2(x^3)$
29. $s = \left(\frac{4t}{t+1}\right)^{-2}$
30. $s = \frac{-1}{15(15t-1)^3}$
31. $y = \left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)^2$
32. $y = \left(\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\right)^2$
33. $y = \sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}$
34. $y = 4x\sqrt{x+\sqrt{x}}$
35. $r = \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta - 1}\right)^2$
36. $r = \left(\frac{1 + \sin \theta}{1 - \cos \theta}\right)^2$
37. $y = (2x+1)\sqrt{2x+1}$
38. $y = 20(3x-4)^{1/4}(3x-4)^{-1/5}$
39. $y = \frac{3}{(5x^2 + \sin 2x)^{3/2}}$
40. $y = (3 + \cos^3 3x)^{-1/3}$

Kapalı Türev Alma

41–48 problemlerinde, dy/dx 'i bulun.

41. $xy + 2x + 3y = 1$
42. $x^2 + xy + y^2 - 5x = 2$
43. $x^3 + 4xy - 3y^{4/3} = 2x$
44. $5x^{4/5} + 10y^{6/5} = 15$
45. $\sqrt{xy} = 1$
46. $x^2y^2 = 1$
47. $y^2 = \frac{x}{x+1}$
48. $y^2 = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

49 ve 50 problemlerinde dp/dq 'yu bulun.

49. $p^3 + 4pq - 3q^2 = 2$
50. $q = (5p^2 + 2p)^{-3/2}$

51 ve 52 problemlerinde dr/ds bulun.

51. $r \cos 2s + \sin^2 s = \pi$
52. $2rs - r - s + s^2 = -3$

53. d^2y/dx^2 'yi kapalı türev olarak bulun.

- a. $x^3 + y^3 = 1$
- b. $y^2 = 1 - \frac{2}{x}$
54. a. $x^2 - y^2 = 1$ denkleminin türevini kapalı olarak alarak, $dy/dx = x/y$ olduğunu gösterin.
- b. $d^2y/dx^2 = -1/y^3$ olduğunu gösterin.

Türevlerin Sayısal Değerleri

55. $f(x)$, $g(x)$ fonksiyonlarının ve ilk türevlerinin $x = 0$ ve $x = 1$ 'deki değerlerinin aşağıdaki gibi olduğunu varsayın.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	-3	1/2
1	3	5	1/2	-4

Aşağıdaki kombinasyonların verilen x değerlerinde birinci türevlerini bulun.

- a. $6f(x) - g(x)$, $x = 1$
- b. $f(x)g^2(x)$, $x = 0$
- c. $\frac{f(x)}{g(x)+1}$, $x = 1$
- d. $f(g(x))$, $x = 0$
- e. $g(f(x))$, $x = 0$
- f. $(x + f(x))^{3/2}$, $x = 1$
- g. $f(x + g(x))$, $x = 0$
56. $f(x)$ fonksiyonu ve birinci türevinin $x = 0$ ve $x = 1$ 'deki değerlerinin aşağıdaki gibi olduğunu varsayın.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	9	-2
1	-3	1/5

Aşağıdaki kombinasyonların verilen x değerlerinde birinci türevlerini bulun.

- a. $\sqrt{x} f(x)$, $x = 1$
- b. $\sqrt{f(x)}$, $x = 0$
- c. $f(\sqrt{x})$, $x = 1$
- d. $f(1 - 5 \tan x)$, $x = 0$
- e. $\frac{f(x)}{2 + \cos x}$, $x = 0$
- f. $10 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) f^2(x)$, $x = 1$
57. $y = 3 \sin 2x$ ve $x = t^2 + \pi$ ise, $t = 0$ 'da dy/dt 'nin değerini bulun.
58. $s = t^2 + 5t$ ve $t = (u^2 + 2u)^{1/3}$ ise, $u = 2$ 'de ds/du 'nin değerini bulun.
59. $w = \sin(\sqrt{r} - 2)$ ve $r = 8 \sin(s + \pi/6)$ ise, $s = 0$ 'da dw/ds 'yi bulun.
60. $r = (\theta^2 + 7)^{1/3}$ ve $\theta^2 t + \theta = 1$ ise $t = 0$ 'da dr/dt 'nin değerini bulun.
61. $y^3 + y = 2 \cos x$ ise, $(0, 1)$ noktasında d^2y/dx^2 'nin değerini bulun.
62. $x^{1/3} + y^{1/3} = 4$ ise, $(8, 8)$ noktasında d^2y/dx^2 'nin değerini bulun.

Türev Tanımı

63 ve 64 problemlerinde, tanımı kullanarak türevleri bulun.

63. $f(t) = \frac{1}{2t+1}$
64. $g(x) = 2x^2 + 1$

65. a. Aşağıdaki fonksiyonu çizin.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 0 \\ -x^2, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- b. f , $x = 0$ 'da sürekli midir?
- c. f , $x = 0$ 'da türevlenebilir mi?

Yanıtınızı açıklayın.

66. a. Aşağıdaki fonksiyonu çizin.

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0 \\ \tan x, & 0 \leq x \leq \pi/4. \end{cases}$$

- b. f , $x = 0$ 'da sürekli midir?
c. f , $x = 0$ 'da türevlenebilir mi?

Yanıtınızı açıklayın.

67. a. Aşağıdaki fonksiyonu çizin.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

- b. f , $x = 1$ 'de sürekli midir?
c. f , $x = 1$ 'de türevlenebilir mi?

Yanıtınızı açıklayın.

68. m sabitinin hangi değer veya değerleri için,

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \leq 0 \\ mx, & x > 0 \end{cases}$$

- a. $x = 0$ 'da sürekli midir?
b. $x = 0$ 'da türevlenebilir?
Cevaplarınızı açıklayın.

Eğim, Teğet ve Normaller

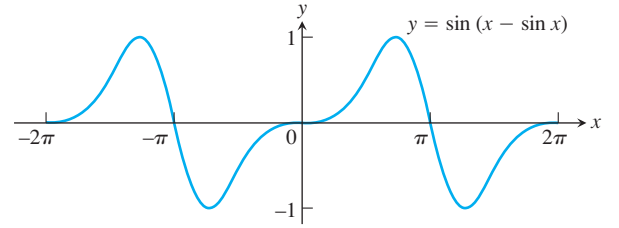
69. **Belirli eğimde teğetler** $y = (x/2) + 1/(2x - 4)$ eğrisinin, eğimi $-3/2$ olan bir noktası var mıdır? Varsa, bulun.
70. **Belirli eğimde teğetler** $y = x - 1/(2x)$ eğrisinin, eğimi 3 olan bir noktası var mıdır? Varsa bulun.
71. **Yatay teğetler** $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ eğrisinin üzerinde teğetin x -eksenine paralel olduğu noktaları bulun.
72. **Teğet Kesimleri** $y = x^3$ eğrisine $(-2, -8)$ noktasında teğet olan doğrunun x - ve y -eksenlerini kesim noktalarını bulun.
73. **Verilen Doğrulara dik veya paralel teğetler** $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ eğrisinin üzerinde teğetin
a. $y = 1 - (x/24)$ doğrusuna dik;
b. $y = \sqrt{2} - 12x$ doğrusuna paralel olduğu noktaları bulun.
74. **Teğetlerin Kesişimi** $y = (\pi \sin x)/x$ eğrisinin $x = \pi$ ve $x = -\pi$ noktalarındaki teğetlerinin dik kesiştiklerini gösterin.
75. **Bir doğruya paralel normaller** $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$ eğrisinin normalinin $y = -x/2$ doğrusuna paralel olduğu noktaları bulun. Eğriyi ve normalleri denklemleriyle isimlendirerek birlikte çizin.
76. **Teğet ve normal doğrular** $y = 1 + \cos x$ eğrisinin $(\pi/2, 1)$ noktasındaki normal ve teğetinin denklemlerini bulun. Eğriyi, normali ve teğeti denklemleriyle isimlendirerek birlikte çizin.

77. **Teğet parabol** $y = x^2 + C$ parabolünün $y = x$ doğrusuna teğet olması için C ne olmalıdır?
78. **Teğetin eğimi** $y = x^3$ eğrisinin herhangi bir (a, a^3) noktasındaki teğetinin, eğriyi, eğimi (a, a^3) 'teki eğimin dört katı olan başka bir noktada kestiğini gösterin.
79. **Teğet eğri** c 'nin hangi değerinde $y = c/(x + 1)$ eğrisi $(0, 3)$ ve $(5, -2)$ noktalarından geçen doğruya teğet olur?
80. **Çembere normal** $x^2 + y^2 = a^2$ çemberinin herhangi bir noktasındaki normalinin orijinden geçtiğini gösterin.

Kapalı Olarak Tanımlanmış Eğrilerin Teğetleri ve Normalleri

81–86 problemlerinde, eğrilerin verilen noktalardaki teğet ve normal denklemlerini bulun.

81. $x^2 + 2y^2 = 9$, $(1, 2)$
82. $x^3 + y^2 = 2$, $(1, 1)$
83. $xy + 2x - 5y = 2$, $(3, 2)$
84. $(y - x)^2 = 2x + 4$, $(6, 2)$
85. $x + \sqrt{xy} = 6$, $(4, 1)$
86. $x^{3/2} + 2y^{3/2} = 17$, $(1, 4)$
87. $x^3y^3 + y^2 = x + y$ eğrisinin $(1, 1)$ ve $(1, -1)$ noktalarındaki eğimini bulun.
88. Aşağıdaki grafik $y = \sin(x - \sin x)$ eğrisinin x -ekseninde yatay teğetleri olabileceğini belirtmektedir. Gerçekten var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.



Parametrik Eğrilerin Teğetleri

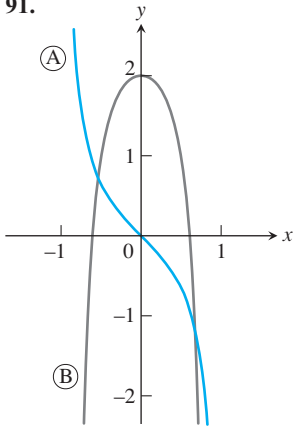
89 ve 90 problemlerinde, verilen t değerine karşılık gelen noktada eğriye teğet olan xy -düzlemindeki doğrunun denklemini bulun. Ayrıca d^2y/dx^2 'nin bu noktadaki değerini bulun.

89. $x = (1/2) \tan t$, $y = (1/2) \tan t$, $t = \pi/3$
90. $x = 1 + 1/t^2$, $y = 1 - 3/t$, $t = 2$

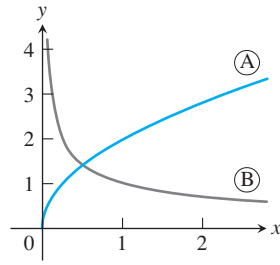
Grafikleri İnceleme

91 ve 92 problemlerindeki şekillerin her biri, biri $y = f(x)$ fonksiyonu, diğeri onun türevi $f'(x)$ olan iki grafiği göstermektedir. Hangi grafik hangisidir? Nasıl anlarsınız?

91.

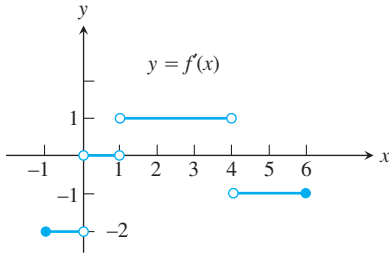


92.



93. Aşağıdaki bilgileri kullanarak $-1 \leq x \leq 6$ aralığında $y = f(x)$ grafiğini çizin.

- Grafik uc uca eklenmiş doğru parçalarından oluşur.
- Grafik $(-1, 2)$ noktasından başlar.
- Tanımlı olduğunda, f' 'nin türevi aşağıda gösterilen basamak fonksiyonuyla uyur.



94. Grafiğin $(-1, 2)$ yerine $(-1, 0)$ noktasından başladığını düşünerek Problem 93'ü tekrar edin.

95 ve 96 problemleri Şekil 3.53'teki grafiklerle ilgilidir. (a) kısımdaki grafikler küçük bir topluluktaki tavşan ve tilki sayısını göstermektedir. 200 günlük bir zaman içinde zamanın fonksiyonu olarak işaretlenmiştir. Başlangıçta, tavşanlar ürerken, sayıları artmaktadır. Fakat tilkiler tavşanlarla beslenmektedir ve tilkilerin sayısı arttıkça, tavşan sayısı düşmeye başlamaktadır. Şekil 3.53b tavşan nüfusunun türev grafiğini göstermektedir. Eğimleri işaretleyerek çizdik.

95. a. Tavşan sayısı en yüksek ve en düşük olduğunda, Şekil 3.53'teki tavşan nüfusunun türevinin değeri nedir?

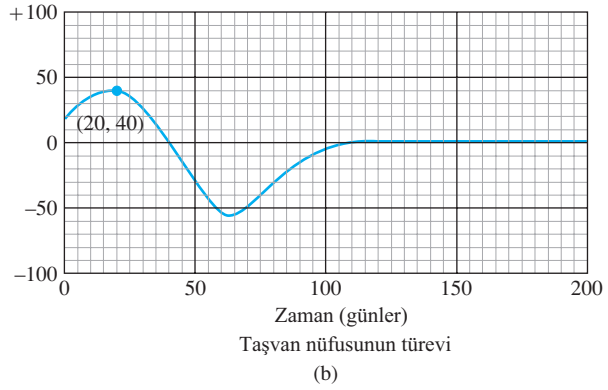
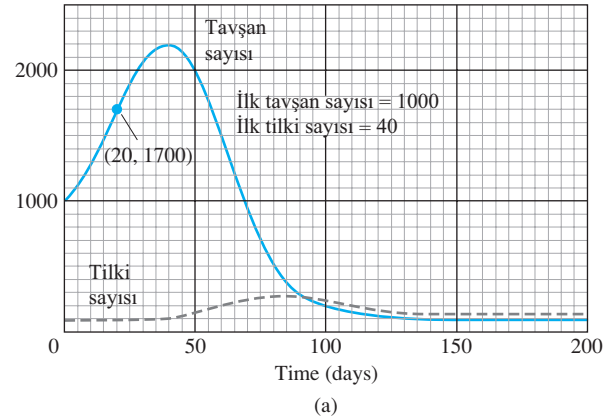
b. Türevi en yüksek ve en düşük olduğunda, Şekil 3.53' teki tavşan topluluğunun büyüklüğü nedir?

96. Tavşan ve tilki topluluklarının eğrilerinin eğimi hangi birimle belirtilmelidir?

Trigonometrik Limitler

97. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x^2 - x}$

98. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \tan 7x}{2x}$



ŞEKİL 3.53 Bir av-avcı topluluğundaki tavşan ve tilkiler

99. $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin r}{\tan 2r}$ 100. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin \theta)}{\theta}$

101. $\lim_{\theta \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{4 \tan^2 \theta + \tan \theta + 1}{\tan^2 \theta + 5}$

102. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1 - 2 \cot^2 \theta}{5 \cot^2 \theta - 7 \cot \theta - 8}$

103. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x}$ 104. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}$

Problem 105 ve 106'da, fonksiyonların orijinde sürekli olacak şekilde nasıl genişletileceğini gösterin.

105. $g(x) = \frac{\tan(\tan x)}{\tan x}$ 106. $f(x) = \frac{\tan(\tan x)}{\sin(\sin x)}$

İlişkili Oranlar

107. **Dik dairesel silindir** Bir dik dairesel silindirin toplam yüzey alanı S , taban yarıçapı r ile yükseklik h 'ye $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ denklemiyle bağlıdır.

- h sabitse, dS/dt dr/dt 'ye nasıl bağlıdır?
- r sabitse, dS/dt dh/dt 'ye nasıl bağlıdır?

c. Ne r ne de h sabit değilse, dS/dt dr/dt ile dh/dt 'ye nasıl bağlıdır?

d. S sabitse, dr/dt dh/dt 'ye nasıl bağlıdır?

108. Dik dairesel koni Bir dik dairesel koninin toplam yüzey alanı S , taban yarıçapı r ile yükseklik h 'ye $S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ denklemiyle bağlıdır.

a. h sabitse dS/dt , dr/dt 'ye nasıl bağlıdır?

b. r sabitse dS/dt , dh/dt 'ye nasıl bağlıdır?

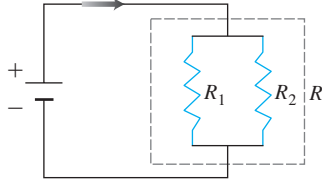
c. Ne r ne de h sabit değilse dS/dt , dr/dt ile dh/dt 'ye nasıl bağlıdır?

109. Dairenin alan değişimi Bir dairenin yarıçapı $-2/\pi$ m/s hızla değişmektedir. $r=10$ m iken, dairenin alanı ne hızla değişir?

110. Küpün kenarlarının değişimi Bir küpün hacmi, kenarları 20 cm iken $1200 \text{ cm}^3/\text{dak}$ hızla artmaktadır. Aynı anda kenarlarının değişim oranı nedir?

111. Paralel bağlı dirençler Bir elektrik devresinde bulunan R_1 ve R_2 ohmluk iki direnç R -ohmluk direnç oluşturacak şekilde paralel bağlanmıştır. R 'nin değeri

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



denklemiyle bulunur. R_1 1 ohm/sn ve R_2 0.5 ohm/sn hızla azalıyor, $R_1 = 75$ ohm ve $R_2 = 50$ ohm iken R hangi hızla değişir?

112. Bir seri devrede empedans Bir seri devrede empedans Z (ohm), direnç R (ohm) ve reaktans X 'e (ohm) $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ denklemiyle bağlıdır. R 3 ohm/sn hızla artıyor ve X 2 ohm/s hızla azalıyor, $R = 10$ ohm ve $X = 20$ ohm iken Z ne hızla değişir?

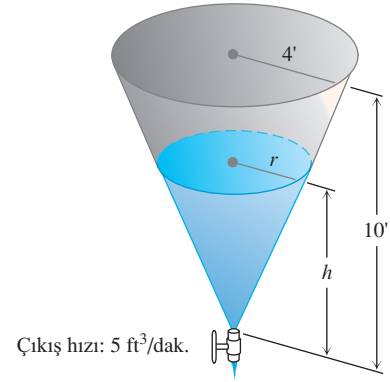
113. Bir parçacığın sürati Metrik xy düzleminde ilerleyen bir parçacığın koordinatları $dx/dt = 10$ m/sn, $dy/dt = 5$ m/sn olmak üzere zamanın türevlenebilir fonksiyonlarıdır. Parçacık $(3, -4)$ noktasından geçerken orijinden ne kadar hızlı uzaklaşmaktadır?

114. Bir parçacığın hareketi Bir parçacık, orijinden uzaklığı saniyede 11 birim artacak şekilde, $y = x^{3/2}$ eğrisinin, birinci dördte bir bölgedeki parçası üzerinde ilerlemektedir. $x = 3$ iken, dx/dt 'yi bulun.

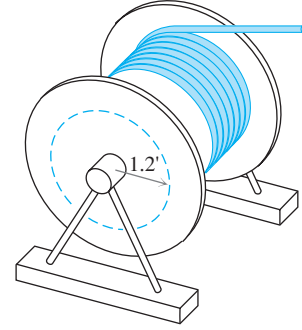
115. Bir su tankını boşaltmak Aşağıdaki şekilde görülen konik tanktan $5 \text{ ft}^3/\text{dak}$ hızla su akmaktadır.

a. Şekildeki h ve r değişkenleri arasındaki ilişki nedir?

b. $h = 6$ ft iken su seviyesi hangi hızla düşer?



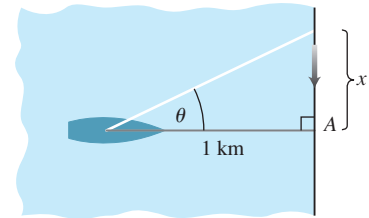
116. Bir makarayı çevirmek Bir caddedeki telefon direklerinden geçirilmek üzere büyük bir makaradan televizyon kablosu çekilirken, kablo makaranın üzerindeki sabit yarıçaplı katlardan çözülürken (Şekle bakınız). Kabloyu çeken kamyon 6 ft/s (4 mil/saat 'den biraz fazla) hareket ediyorsa, $s = r\theta$ denklemini kullanarak, 1.2 ft yarıçaplı kat çözülürken, makaranın hangi hızla döndüğünü bulun.



117. Işıldak ışınının hareketi Aşağıdaki şekil sahilden 1 km uzakta, kıyıyı bir fenerle tarayan bir sandalı göstermektedir. Işık $d\theta/dt = -0.6 \text{ rad/sn}$ hızla dönmektedir.

a. A noktasına ulaştığında ışık hangi hızla ilerlemektedir?

b. 0.6 rad/sn dakikada kaç dönüş demektir?



118. Koordinat eksenlerinde kayan noktalar A ve B noktaları sırasıyla x ve y eksenlerinde, orijinden AB doğrusuna olan dik uzaklık (metre) sabit kalacak şekilde hareket etmektedirler. $OB = 2r$ olduğunda ve B O 'ya doğru $0.3r \text{ m/sn}$ hızla ilerlerken, OA ne hızla değişmektedir? Bu mesafe artar mı, azalır mı?

Lineerizasyon

119. Aşağıdaki fonksiyonların lineerizasyonunu bulun.

a. $\tan x$, $x = -\pi/4$ b. $\sec x$, $x = -\pi/4$

Eğrileri ve lineerizasyonları birlikte çizin.

120. $f(x) = 1/(1 + \tan x)$ fonksiyonunun $x = 0$ 'da yararlı bir lineerizasyonunu

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x \quad \text{ve} \quad \tan x \approx x$$

yaklaşımlarını

$$\frac{1}{1+\tan x} \approx 1-x.$$

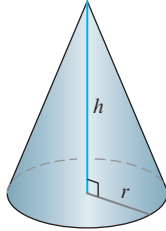
olacak şekilde birleştirerek elde edebiliriz. Bu sonucun $1/(1 + \tan x)$ 'in $x = 0$ 'daki standart lineer yaklaşımı olduğunu gösterin.

121. $f(x) = \sqrt{1+x} + \sin x - 0.5$ 'in $x = 0$ 'da lineerizasyonunu bulun.

122. $f(x) = 2/(1-x) + \sqrt{1+x} - 3.1$ 'in $x = 0$ 'da lineerizasyonunu bulun.

Değişimin Diferansiyel Tahminleri

123. **Bir koninin yüzey alanı** Yükseklik h_0 'dan $h_0 + dh$ 'ye değişir ve yarıçap aynı kalırsa, dik bir dairesel koninin yüzey alanında meydana gelecek değişikliği tahmin eden bir formül yazın.



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

(Yüzey alanı)

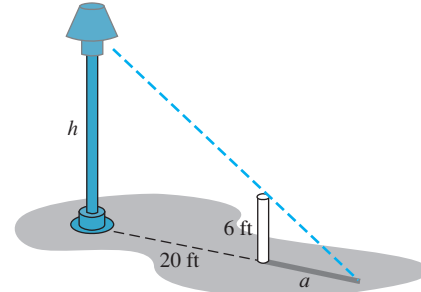
124. Hatayı kontrol etmek

- Bir kübün yüzey alanını en fazla %2'lik bir hatayla hesapladığınızdan emin olmak için kübün kenarını ne hassaslıkta ölçmelisiniz?
- Kenarın (a) şıkında istenen hassaslıkta ölçüldüğünü varsayın. Kübün hacmi bu kenar ölçümüyle hangi hassaslıkta hesaplanabilir? Bunu bulmak için hacim hesaplanmasında kenar ölçümünü kullanmaktan kaynaklanacak yüzde hatayı tahmin edin.

125. **Hata Birleştirme** Bir kürenin bir büyük çemberinin çevresi olası bir 0.4 cm'lik hatayla 10 cm olarak ölçülüyor. Ölçüm daha sonra yarıçapı kesaplama kullanılıyor. Yarıçap da kürenin yüzey alanını ve hacmini hesaplamak için kullanılıyor.

- Yarıçapın
- yüzey alanının
- hacmin

126. **Yükseklik bulmak** Bir ışık direğinin (şekle bakın) yüksekliğini bulmak için direktten 20 ft uzaklığa 6 ft uzunluğunda bir çubuk yerleştiriyorsunuz ve gölgesinin uzunluğu a 'yı ölçüyorsunuz. A için bulduğunuz değer 15 ft, artı eksi bir inçtir. Lamba direğinin uzunluğunu $a = 15$ ft değerinden hesaplayın ve sonuçtaki olası hatayı bulun.



Bölüm 3

Ek - İleri Alıştırmalar

1. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ gibi bir denkleme **özdeşlik** denir, çünkü her θ değeri için geçerlidir. $\sin \theta = 0.5$ gibi bir denklem ise özdeşlik değildir, çünkü hepsinde değil, sadece belirli θ değerlerinde geçerlidir. Bir trigonometrik özdeşliğin iki tarafının da θ 'ya göre türevini alırsanız, ortaya çıkan denklem yine bir özdeşlik olacaktır.

- $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
- $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

2. $\sin(x + a) = \sin x \cos a + \cos x \sin a$ özdeşliğin x 'e göre türevi alınırsa, ortaya çıkacak denklem yine bir özdeşlik olur mu? Aynı prensip $x^2 - 2x - 8 = 0$ denklemine de uygulanabilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

3. a. $f(x) = \cos x$ ve $g(x) = a + bx + cx^2$ denklemlerinin

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = g'(0) \quad \text{ve} \quad f''(0) = g''(0)$$

koşullarına uymasını sağlayacak a , b ve c değerlerini bulunuz.

- b. $f(x) = \sin(x + a)$ ve $g(x) = b \sin x + c \cos x$ denklemlerinin
 $f(0) = g(0)$ ve $f'(0) = g'(0)$

koşullarına uymasını sağlayacak a , b ve c değerlerini bulunuz.

- c. a , b ve c 'nin bulduğunuz değerleri için, (a) ve (b) şıklarındaki f ve g 'nin üçüncü ve dördüncü türevlerine ne olur?

4. Diferansiyel denklemlerin çözümleri

- a. $y = \sin x$, $y = \cos x$ ve $y = a \cos x + b \sin x$ (a ve b sabit) denklemlerinin hepsinin

$$y'' + y = 0$$

denklemini sağladığını gösterin.

- b. (a) şikkındaki fonksiyonları

$$y'' + 4y = 0$$

olmasını sağlayacak şekilde nasıl değiştirirsiniz? Bu sonucu genelleştirin.

5. **Dokunan bir çember** $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$ çemberini $y = x^2 + 1$ parabolüne $(1, 2)$ noktasında teğet olmasını ve her iki eğri üzerinde d^2y/dx^2 ikinci türevlerinin o noktada aynı değerde olmasını sağlayacak h , k ve a değerlerini bulun. Bunun gibi, bir eğriye teğet olan ve teğet noktasındaki ikinci türevi eğrininkiyile aynı olan çemberlere *dokunan çemberler* denir. Bu gibi çemberlerle Bölüm 13'te yine karşılaşacağız.

6. **Marjinal kazanç** Bir otobüs 60 kişi almaktadır. Yolculuk başına otobüsü kullanan kişi sayısı x toplanan ücrete (p dolar) $p = [3 - (x/40)]^2$ denklemleriyle bağlıdır. Otobüs şirketinin yolculuk başına toplam kazancını, $r(x)$, veren bir denklem yazın. Her yolculukta kaç kişi olmalıdır ki, dr/dx marjinal kazanç sıfır olsun. Buna karşılık gelen ücret nedir? (Bu kazancın en yüksek olmasını sağlayan ücrettir, yani otobüs şirketi ücret politikasını yeniden gözden geçirse iyi olur.)

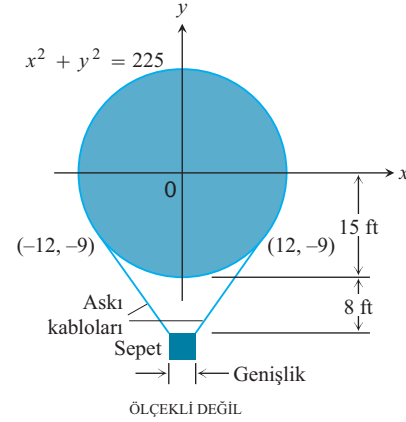
7. Endüstriyel üretim

- a. Ekonomistler "büyüme oranı" ifadesini genellikle mutlak değil de, göreceli terimler için kullanırlar. Örneğin, $u = f(t)$ bir t zamanında bir endüstri kolunda çalışan insan sayısı olsun. (Bu fonksiyon aslında tamsayı değerli bir basamak fonksiyonu olduğu halde, türevlenebildiğini varsayacağız.)

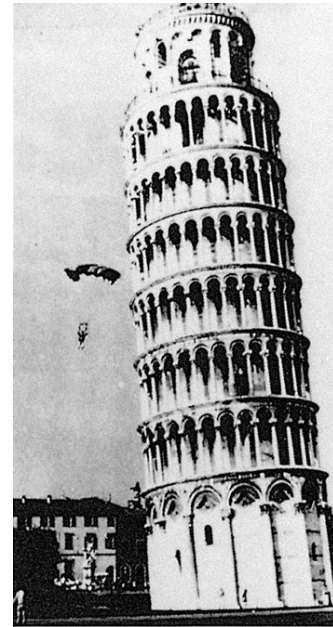
$v = g(t)$ zamanında iş gücü olarak kişi başına ortalama üretim olsun. Dolayısıyla toplam üretim $y = uv$ olur. İş gücü yılda %4'lük bir oranda artıyorsa ($du/dt = 0.04u$) ve kişi başına üretim yılda %5'lik bir oranda artıyorsa ($dv/dt = 0.05v$) toplam üretim y 'deki artış oranını bulun.

- b. (a) şikkındaki kişi başına üretim yılda %3 oranında artarken, iş gücünün %2 oranında azaldığını varsayın. Toplam üretim hangi oranda artar veya azalır?

8. **Bir gondol tasarlamak** 30 ft yarıçaplı bir sıcak hava balonunun imalatçısı, şekilde görüldüğü gibi, balonun 8 ft altına balonun yüzeyine teğet kablolarla bir sepet bağlamak istiyor. Şekilde sepetin iki ucundan $(-12, -9)$ ve $(12, -9)$ noktalarına teğet olarak çıkan iki kablo görülmektedir. Sepetin genişliği ne olmalıdır?



9. **Pisa'dan paraşüt** Aşağıdaki fotoğraf 5 Ağustos 1988'de Pisa Kulesi'nin üzerinden paraşüt atlayan Mike McCarthy'yi göstermektedir. Atlayış sırasındaki süratinin grafiğinin şeklini kabaca gösteren bir şekil çizin.



Londra'lı Mike McCarthy Pisa Kulesi'nden atlamış ve paraşütünü kendi deyişle yere en yakın paraşüt atlayışı olan 179 ft'te açmıştır. Kaynak: *Boston Globe*, 6 Ağustos, 1988.

- 10. Bir parçacığın hareketi** Bir koordinat doğrusunda ilerleyen bir parçacığın $t \geq 0$ zamanındaki konumu

$$s = 10 \cos(t + \pi/4)$$

ile verilmektedir.

- Parçacığın başlangıç konumu nedir ($t = 0$)?
 - Parçacığın, orijinin sağında ve solunda ulaştığı en uzaktaki noktalar hangileridir?
 - Parçacığın (b) şıkında bulduğunuz noktalardaki hızını ve ivmesini bulun.
 - Parçacık ilk olarak orijine ne zaman varır? Bu anda hızı, sürati ve ivmesi nedir?
- 11. Bir atışı fırlatmak** Dünyada, bir atışı bir lastikle rahatlıkla 64 ft yukarıya fırlatabilirsiniz. Fırlattıktan t saniye sonra, atış elinizden $s = 64t - 16t^2$ ft yüksektir.
- Atışın maksimum yüksekliğe ulaşması ne kadar sürer? Elinizden hangi hızla çıkar?
 - Ayda, aynı ivme atışı t saniyede $s = 64t - 2.6t^2$ ft yükseğe fırlatacaktır. Atışın maksimum yüksekliğe ulaşması ne kadar sürer ve bu yükseklik nedir?
- 12. İki parçacığın hızları** t saniye anında, bir koordinat eksenindeki iki parçacığın konumları $s_1 = 3t^3 - 12t^2 + 18t + 5$ m ve $s_2 = -t^3 + 9t^2 - 12t$ m dir. Parçacıkların hızları ne zaman aynı olur?

- 13. Bir parçacığın hızı** Sabit m kütleli bir parçacık x -ekseninde ilerlemektedir. Hızı v ve konumu x

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}k(x_0^2 - x^2)$$

denklemini sağlamaktadır. Burada, k , v_0 ve x_0 birer sabittir. $v \neq 0$ olduğunda,

$$m \frac{dv}{dt} = -kx$$

olduğunu gösterin.

- 14. Ortalama ve anlık hız**

- Hareket eden bir noktanın x koordinatı $x = At^2 + Bt + C$ gibi t zamanının ikinci dereceden bir fonksiyonu olarak verilmişse, herhangi bir $[t_1, t_2]$ aralığındaki ortalama hızın zaman aralığının tam orta noktasındaki anlık hıza eşit olduğunu gösterin.
 - (a) şıkındaki sonucun geometrik önemi nedir?
- 15. Hangi m ve b değerlerinde**

$$y = \begin{cases} \sin x, & x < \pi \\ mx + b, & x \geq \pi \end{cases}$$

fonksiyonu

- $x = \pi$ 'de sürekli midir?
 - $x = \pi$ 'de türevlenebilir midir?
- 16.**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 0$ 'da türevi var mıdır? Açıklayın.

- 17. a.** a ve b 'nin hangi değerleri için

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

fonksiyonu her x değerinde türevlenebilir?

- b.** Ortaya çıkan f grafiğinin geometrisini tartışın.

- 18. a.** a ve b 'nin hangi değerleri için

$$g(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq -1 \\ ax^3 + x + 2b, & x > -1 \end{cases}$$

fonksiyonu her x değerinde türevlenebilir?

- b.** Ortaya çıkan g grafiğinin geometrisini tartışın.

- 19. Türevlenebilir tek fonksiyonlar** x 'in türevlenebilir bir tek fonksiyonunun türevinin bir özelliği var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

- 20. Türevlenebilir çift fonksiyonlar** x 'in türevlenebilir bir çift fonksiyonunun türevinin bir özelliği var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

- 21. f ve g fonksiyonlarının x_0 noktasını içeren bir açık aralıkta tanımlı olduklarını, f 'nin x_0 'da türevlenebildiğini ve $f(x_0) = 0$, olduğunu ve g 'nin x_0 'da sürekli olduğunu varsayın. fg çarpımının x_0 'da türevlenebildiğini gösterin. Bu, örneğin, $|x|$, $x = 0$ 'da türevlenemezken, $x|x|$ çarpımının türevlenebileceğini gösterir.**

- 22. (Alıştırma 21'in devamı)** Alıştırma 21'in sonucunu kullanarak aşağıdaki fonksiyonların $x = 0$ 'da türevlenebildiklerini gösterin.

- a.** $|x| \sin x$ **b.** $x^{2/3} \sin x$ **c.** $\sqrt[3]{x}(1 - \cos x)$

- d.** $h(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

- 23.**

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun türevi $x = 0$ 'da sürekli midir? Peki ya, $h(x) = xh(x)$ 'in türevi? Cevabınızı açıklayın.

- 24. Bir f fonksiyonunun her reel x ve y değerlerinde, aşağıdaki koşulları sağladığını varsayın.**

- i.** $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

- ii.** $f(x) = 1 + xg(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$.

Her x değerinde $f'(x)$ türevinin var olduğunu ve $f'(x) = f(x)$ olduğunu gösterin.

- 25. Genelleştirilmiş çarpım kuralı** $y = u_1 u_2 \cdots u_n$ türevlenebilir fonksiyonların sonlu bir çarpımıysa, y 'nin bu fonksiyonların ortak tanım aralığında türevlenebilir olduğunu ve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du_1}{dx} u_2 \cdots u_n + u_1 \frac{du_2}{dx} \cdots u_n + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_{n-1} \frac{du_n}{dx}$$

olduğunu matematiksel induksiyonla gösterin.

- 26. Çarpımların yüksek mertebe türevleri için Leibniz kuralı**
Türevlenebilir fonksiyonların çarpımlarının yüksek mertebe türevleri için Leibniz kuralı

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{d^2(uv)}{dx^2} &= \frac{d^2u}{dx^2}v + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + u\frac{d^2v}{dx^2} \\ \text{b. } \frac{d^3(uv)}{dx^3} &= \frac{d^3u}{dx^3}v + 3\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dv}{dx} + 3\frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} + u\frac{d^3v}{dx^3} \\ \text{c. } \frac{d^n(uv)}{dx^n} &= \frac{d^nu}{dx^n}v + n\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{dv}{dx} + \dots \\ &\quad + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}}\frac{d^kv}{dx^k} \\ &\quad + \dots + u\frac{d^nv}{dx^n}. \end{aligned}$$

olduğunu söyler. (a) ve (b) denklemleri (c) denkleminin özel durumlarıdır. (c) denklemini matematik induksiyonla ve

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \frac{m!}{k!(m-k)!} + \frac{m!}{(k+1)!(m-k-1)!}$$

eşitliğini kullanarak bulun.

- 27. Bir saat sarkacının periyodu** Bir saat sarkacının periyodu T (ileri ve geri tam bir sallanma için gereken süre) $T^2 = 2\pi^2 L/g$ formülüyle verilir. Burada L saniye olarak ölçülür, $g = 32.2$ ft/sn² olarak verilir ve L , sarkacın uzunluğu, ft ile ölçülür. Aşağıdakileri yaklaşık olarak bulun.

- a. Periyodu $T = 1$ sn olan saat sarkacının uzunluğunu.
b. (a) şıkkındaki sarkaç 0.01 ft uzatılırsa T 'deki dT değişimini.
c. (b) şıkkındaki dT kadarlık periyot değişiminden dolayı saatin bir günde kazandığı ya da kaybettiği miktarı.

- 28. Eriyen buz küpü** Bir buz kübünün erirken küp şeklini koruduğunu varsayın. Kübün kenar uzunluğuna s dersek, hacmi $V = s^3$ ve yüzey alanı $6s^2$ olur. V ve s 'nin t zamanının türevlenebilir fonksiyonları olduğu varsayalım. Ayrıca kübün hacminin de yüzey alanıyla orantılı olarak azaldığını varsayalım. (Bu son varsayım erimenin yüzeyde gerçekleştiğini düşünürsek oldukça mantıklıdır: Alan miktarını değiştirmek erimeye bırakılan buzun miktarını değiştirir.) Matematiksel bir ifadeyle

$$\frac{dV}{dt} = -k(6s^2), \quad k > 0$$

olur. Eksi işareti hacmin azaldığını belirtmektedir. Orantı sabiti k 'nin sabit olduğunu kabul edelim. (Fakat gerçekte etraftaki havanın göreceli nemliliği, hava sıcaklığı, kırılma veya güneş ışığı bulunmaması gibi bir çok dış etkene bağlıdır.)

Son olarak, kübün ilk bir saat içinde hacminin $1/4$ 'ünü kaybettiği bir dizi koşul bulunduğunu ve $t = 0$ anında hacmin V_0 olduğunu varsayın. Buz kübünün erimesi ne kadar sürer?

Bölüm 3

Teknoloji Uygulama Projeleri

Mathematica/Maple Module

Kiriş Eğimlerinin Türev Fonksiyonuna Yakınsamaları

Bir eğri üzerinde art arda gelen noktalar arasındaki kırışları gözünüzde canlandıracaksınız ve aralarındaki uzaklık küçüldükçe neler olduğunu gözleyeceksiniz. Fonksiyon, örnek noktalar ve kırışlar tek bir grafikte çizilmiştir. İkinci bir grafik kırışların eğimleri ile türev fonksiyonunu karşılaştırmaktadır.

Mathematica/Maple Module

Türevler, Eğimler, Teğet Doğrular ve Film Yapmak

Bölüm I–III. Bir noktada türevi, bir fonksiyonun lineerizasyonunu ve türev fonksiyonunu gözünüzde canlandıracaksınız. Aynı grafik üzerinde grafiğin ve seçilmiş teğetlerinin nasıl çizildiğini öğreniyorsunuz.

Bölüm IV Birçok Teğet Çizmek

Bölüm V (Film Yapmak). Modülün IV. ve V. Bölümleri bir fonksiyonun grafiği boyunca kayan teğet doğruları canandırmak için kullanılabilir.

Mathematica/Maple Module

Kiriş Eğimlerinin Türev Fonksiyonuna Yakınsamaları

Soldan ve Sağdan türevleri gözünüzde canlandıracaksınız.

Mathematica/Maple Module

Bir Doğru Boyunca Hareket: Konum $\rightarrow$ Hız $\rightarrow$ İvme

Konum, hız ve ivme fonksiyonları arasındaki türev bağıntılarının dramatik canlandırmalarını gözleyin. Metindeki şekiller canlandırılabilir.

TÜREV

UYGULAMALARI

GİRİŞ Bu bölüm, türevlerin önemli bazı uygulamalarını incelemektedir. Fonksiyonların ekstrem değerlerinin bulunmasında, grafiklerin şekillerinin belirlenmesinde ve incelenmesinde, pay ve paydası ikisi birden sıfıra veya sonsuza yaklaşan kesirlerin limitlerinin bulunmasında ve bir fonksiyonun nerede sıfır olduğunun sayısal olarak bulunmasında türevlerin nasıl kullanıldığını öğreniyoruz. Ayrıca, türevinden fonksiyonu bulma işlemini ele alıyoruz. Bu başarıların bir çoğunun anahtarı, sonuçları Bölüm 5'teki integral analizine giriş kapısını açan *Ortalama Değer Teoremi* dir.

4.1

Fonksiyonların Ekstrem Değerleri

Bu bölüm, sürekli fonksiyonların ekstrem değerlerinin, türevlerinden nasıl bulunup tanımlanacağını göstermektedir. Bunu yapabildiğimiz andan itibaren, bir çok *optimizasyon problemi*ni çözebiliriz ki, bu problemlerde bazı şeyleri, verilen durumlarda optimal (en iyi) şekilde yapmanın yolunu buluyoruz.

TANIMLAR Mutlak Maksimum, Mutlak Minimum

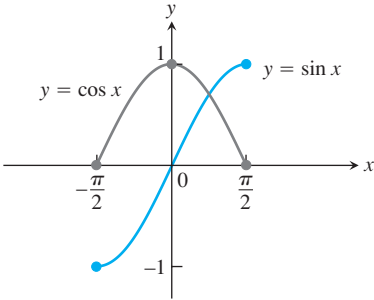
f , tanım kümesi D olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$D\text{'deki her } x \text{ için} \quad f(x) \leq f(c)$$

ise, f 'nin D üzerinde, c noktasında **bir mutlak maksimum** değeri,

$$D\text{'deki her } x \text{ için} \quad f(x) \geq f(c)$$

ise, f 'nin D üzerinde, c noktasında **bir mutlak minimum** değeri vardır.



ŞEKİL 4.1 sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığı üzerindeki mutlak ekstremumları. Bu değerler fonksiyonun tanım kümesine bağlı olabilir.

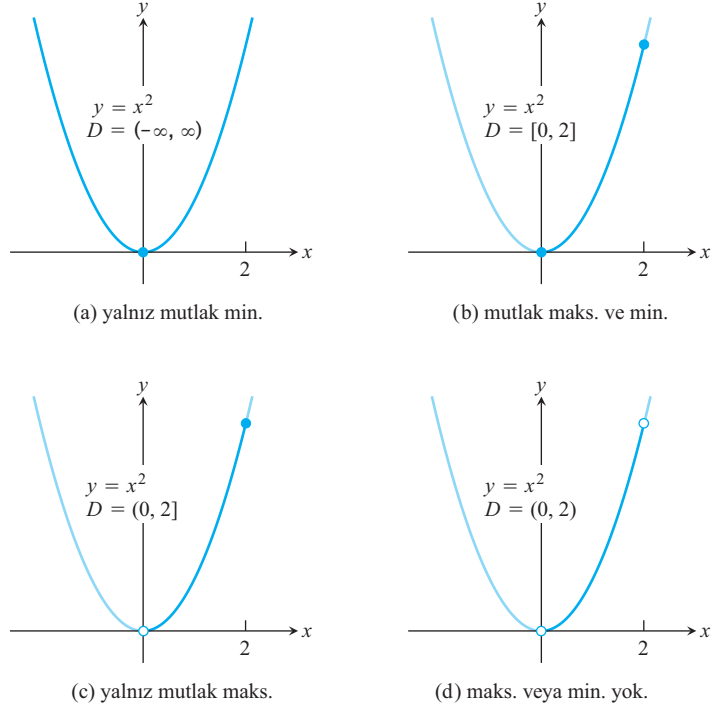
Mutlak maksimum ve minimum değerlere mutlak **ekstrema** (Latince *ekstremum*'un çoğulu) denir. Mutlak ekstremler ayrıca, aşağıda tanımlanan yerel ekstremlerden ayırt etmek için, **global** ekstrem diye de adlandırılır.

Örneğin, $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığında, $f(x) = \cos x$ fonksiyonu maksimum değer olarak 1 değerini (bir kere) ve minimum değer olarak 0 değerini (2 kere) alır. Aynı aralıkta $g(x) = \sin x$ fonksiyonu ise maksimum değer olarak 1, minimum değer olarak -1 değerini alır (Şekil 4.1).

Aynı kuralla tanımlanan fonksiyonların, tanım kümelerine bağlı olarak, farklı ekstrem noktaları olabilir.

ÖRNEK 1 Mutlak Ekstremleri Araştırmak

Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümeleri üzerindeki mutlak ekstremleri Şekil 4.2 de görülebilir.



ŞEKİL 4.2 Örnek 1 için grafikler

Fonksiyon kuralı	D Tanım kümesi	D 'deki mutlak ekstremler
(a) $y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	Mutlak maksimum yok. $x = 0$ 'da mutlak minimum 0.
(b) $y = x^2$	$[0, 2]$	$x = 2$ 'de mutlak maksimum 4 $x = 0$ 'da mutlak minimum 0
(c) $y = x^2$	$(0, 2]$	$x = 2$ 'de mutlak maksimum 4 Mutlak minimum yok.
(d) $y = x^2$	$(0, 2)$	Mutlak ekstrem yok.

■

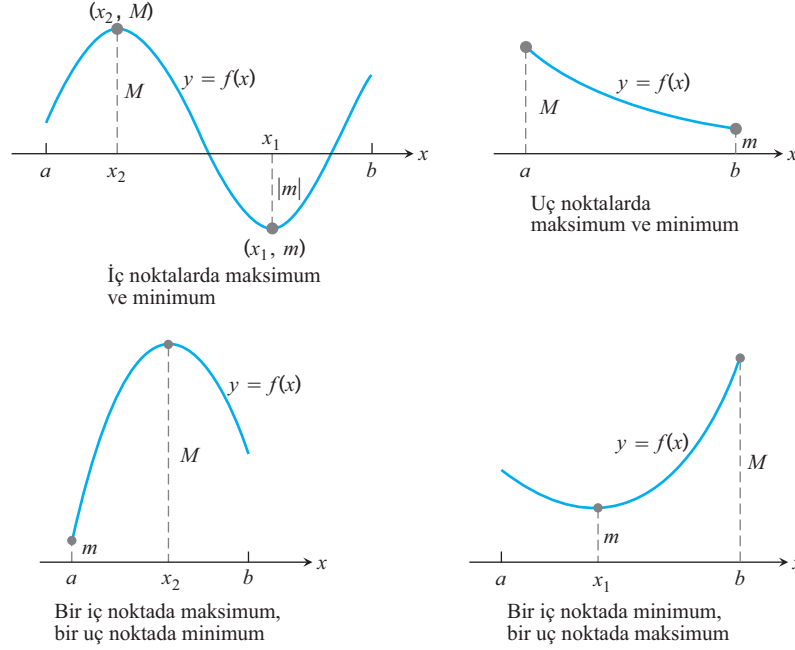
TARİHSEL BİYOGRAFİ

Daniel Bernoulli
(1700–1789)

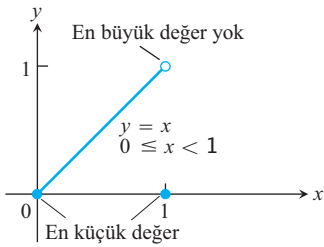
Aşağıdaki teorem, bir $[a, b]$ kapalı aralığının her noktasında sürekli olan bir fonksiyonun, bu aralık üzerinde bir mutlak maksimum değerinin ve bir mutlak minimumu değerinin var olduğunu ileri sürer. Bir fonksiyonun grafiğini çizerken her zaman bu değerleri ararız.

TEOREM 1 Ekstrem Değer Teoremi

f , kapalı bir $[a, b]$ aralığının her noktasında sürekli ise, bir mutlak maksimum değer M 'ye ve bir mutlak minimum değeri m 'ye $[a, b]$ içinde erişir. Yani, $[a, b]$ 'da, $f(x_1) = m$ ve $f(x_2) = M$ olacak şekilde x_1 ve x_2 sayıları vardır ve $[a, b]$ 'daki diğer her bir x için $m \leq f(x) \leq M$ dir (Şekil 4.3).



ŞEKİL 4.3 Kapalı bir $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyonun olası mutlak maksimum ve minimumları



ŞEKİL 4.4 Süreksizliğin tek bir noktada olması bile, bir fonksiyonun bir minimumunun veya maksimumunun olmasını engelleyebilir.

$$y = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

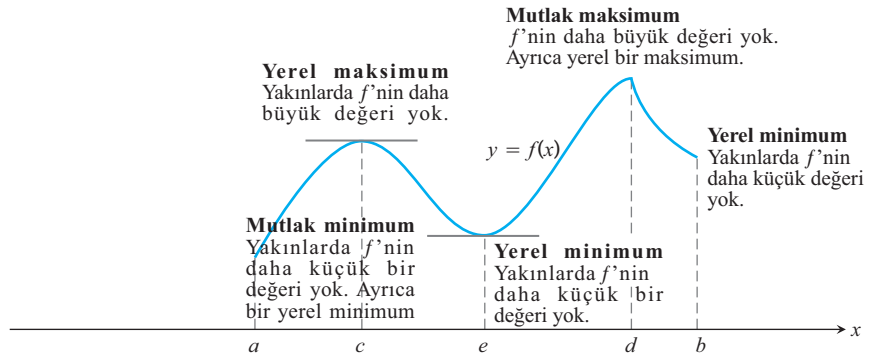
fonksiyonu $[0, 1]$ aralığının $x = 1$ dışındaki her noktasında sürekli, ama $[0, 1]$ aralığındaki grafiğinin en yüksek bir noktası yoktur.

Ekstrem Değer Teoremi'nin ispatı reel sayı sistemi hakkında detaylı bilgi gerektirmektedir (Bkz. Ek 4), bunun için burada verilmeyecektir. Şekil 4.3 te, bir $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli olan bir fonksiyonun, mutlak ekstrem değerlerinin olası konumları gösterilmektedir. $y = \cos x$ fonksiyonunda gözlediğimiz gibi, bir mutlak minimumun (veya mutlak maksimumun), aralığın iki veya daha fazla farklı noktasında bulunması olasıdır.

Teorem 1'deki, aralığın kapalı ve sonlu olması ve fonksiyonun sürekli olması koşulları anahtar bileşenleridir. Bunlar olmadan, teoremin sonuçlarının geçerli olması gerekmez. Örnek 1, aralığın hem sonlu ve hem de kapalı olmaması durumunda bir mutlak ekstrem değer bulunamayabileceğini göstermektedir. Şekil 4.4, süreklilik şartının ihmal edilemeyeceğini göstermektedir.

Yerel (Göreceli) Ekstremum Değerler

Şekil 4.5'te, bir fonksiyonun, $[a, b]$ tanım aralığında beş noktada ekstremum değerleri olan grafiği görülmektedir. e noktasında fonksiyonun değerinin, çevresinde bulunan her



ŞEKİL 4.5 Maksimum ve minimumların sınıflandırılması

hangi bir noktada olduğundan, daha küçük olmasına rağmen, fonksiyonun mutlak minimumu a noktasındadır. Eğri, c civarında solda yükselir ve sağda düşer böylece $f(c)$ 'yi bir yerel maksimum yapar. Fonksiyon mutlak maksimum değerini d noktasında alır.

TANIMLAR Yerel Maksimum Yerel Minimum

Bir f fonksiyonunun, tanım aralığının bir c iç noktasında,

$$c\text{'yi içeren bir açık aralıktaki her } x \text{ için } f(x) \leq f(c)$$

ise, bir yerel maksimum değeri vardır. Bir f fonksiyonunun, tanım aralığının bir c iç noktasında,

$$c\text{'yi içeren bir açık aralıktaki her } x \text{ için } f(x) \geq f(c)$$

ise, bir yerel minimumu vardır

c uç noktasını içeren bir yarı açık aralıktaki her x için uygun bir eşitsizlik geçerliyse, f 'nin c uç noktasında bir **yerel minimumunu** veya **yerel maksimumunu** tanımlayarak, yerel ekstremum tanımını aralıkların uç noktalarını da kapsayacak şekilde genişletebiliriz. Şekil 4.5'te, f fonksiyonunun c ve d noktalarında yerel maksimumları, a , e ve b noktalarında ise yerel minimumları vardır. Yerel ekstremumlara göreceli ekstremumlar da denir.

Bir mutlak maksimum aynı zamanda bir yerel maksimumdur. Her yerdeki en büyük değer olduğu için, en yakın komşuluğundaki en büyük değer de odur. Yani, *bütün yerel maksimumların kümesi aynı zamanda, varsa, mutlak maksimumu da içerecektir*. Benzer şekilde, *bütün yerel minimumların kümesi aynı zamanda, varsa, mutlak minimumu da içerecektir*.

Ekstremumları Bulmak

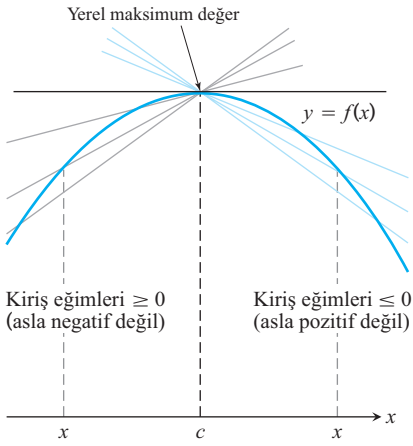
Aşağıdaki teorem, bir fonksiyonun ekstrem değerlerini bulmak için neden genellikle sadece bir kaç değeri incelememiz gerektiğini açıklamaktadır.

TEOREM 2 Yerel Ekstrem Değerler İçin Birinci Türev Teoremi

Tanım aralığının bir c iç noktasında, f 'nin bir yerel maksimum veya minimumu varsa ve c 'de f 'tanımlıysa,

$$f'(c) = 0$$

dır.



ŞEKİL 4.6 Bir yerel maksimum değeri olan bir eğri. c 'deki eğim, yani negatif olmayan sayıların ve pozitif olmayan sayıların ortak limiti, sıfırdır.

İspat $f'(c)$ 'nin bir yerel ekstremumda sıfır olduğunu göstermek için, önce $f'(c)$ 'nin pozitif olamayacağını, sonra da negatif olamayacağını göstereceğiz. Ne pozitif ne de negatif olmayan tek sayı sıfırdır, yani $f'(c)$ sıfır olmalıdır.

Başlangıç olarak, f' 'nin $x = c$ 'de, c 'ye yeterince yakın her x değerinde $f(x) - f(c) \leq 0$ olacak şekilde bir yerel maksimum değeri olduğunu varsayın (Şekil 4.6). c , f' 'nin tanım kümesinin bir iç noktası olduğu için, $f'(c)$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

iki taraflı limitiyle verilir. Bu, $x = c$ 'de hem sağdan hem de soldan limitlerin var olduğu ve $f'(c)$ 'ye eşit olduğu anlamına gelir. Bu limitleri ayrı ayrı incelediğimizde

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \quad \begin{matrix} (x - c) > 0 \text{ ve} \\ f(x) \leq f(c) \text{ olduğundan} \end{matrix} \quad (1)$$

Aynı şekilde,

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \quad \begin{matrix} (x - c) < 0 \text{ ve} \\ f(x) \leq f(c) \text{ olduğundan} \end{matrix} \quad (2)$$

(1) ve (2) birlikte $f'(c) = 0$ olmasını gerektirir.

Böylece yerel maksimumlarla ilgili teorem ispatlanmış olur. Yerel minimumlarla ilgili teoremi ispatlamak içinse, (1) ve (2)'deki eşitsizlikleri koruyan $f(x) \geq f(c)$ eşitsizliğini kullanırız. ■

Teorem 2, bir fonksiyonun, bir yerel ekstremum değerinin bulunduğu ve türevinin tanımlı olduğu bir iç noktada, birinci türevinin sıfır olduğunu söyler. Dolayısıyla, bir f fonksiyonunun bir ekstremum değerinin (yerel veya mutlak) bulunabileceği yerler

1. $f' = 0$ olduğu iç noktalar,
2. f'' 'nin tanımlı olmadığı iç noktalar,
3. f' 'nin tanım kümesinin uç noktaları

dır. Aşağıdaki tanım bütün bunları özetlemeye yardımcı olacaktır.

TANIM Kritik Nokta

Bir f fonksiyonunun tanım kümesinin, f'' 'nin sıfır veya tanımsız olduğu bir iç noktası f' 'nin bir **kritik noktasıdır**.

Böylece, bir fonksiyonun ekstrem değerler alabileceği noktalar sadece tanım kümesinin kritik noktaları ve uç noktalarıdır.

Teorem 2'yi yanlış anlamamak için dikkatli olun, çünkü tersi doğru değildir. Türevlenebilir bir fonksiyonun, bir yerel ekstremum değerinin bulunmadığı bir kritik noktası var olabilir. Örneğin, $f(x) = x^3$ fonksiyonunun, orijinde bir kritik noktası vardır ve buradaki değeri sıfırdır, fakat orijinin sağında pozitif ve solunda negatiftir. Dolayısıyla, orijinde bir yerel ekstremum değeri bulunamaz. Onun yerine, burada bir *dönüm noktası* vardır. Bu kavram, Bölüm 4.4'te tanımlanmakta ve daha fazla tartışılmaktadır.

Ekstremler bulma nedenlerinin en başında kapalı bir aralıkta sürekli bir fonksiyonun mutlak ekstremlerini bulmak gelir. Teorem 1 böyle değerlerin var olduğunu söyler; Teorem 2 ise bunların ancak kritik ve uç noktalarda bulunabileceğini belirtir.

Genellikle, bu noktaların bir listesini kolaylıkla yapabilir, hangilerinin en büyük ve en küçük olduğunu ve nerede bulunduklarını bulmak için karşılık gelen fonksiyon değerlerini hesaplayabiliriz.

Kapalı Sonlu Bir Aralıkta Sürekli Bir f Fonksiyonunun Mutlak Ekstremleri Nasıl Bulunur?

1. Bütün kritik ve uç noktalarda f' 'yi hesaplayın.
2. Bu değerlerin en büyüğü ve en küçüğünü alın.

ÖRNEK 2 Mutlak Ekstremleri Bulmak

$f(x) = x^2$ 'nin $[-2, 1]$ aralığında mutlak maksimum ve minimum değerlerini bulun.

Çözüm Fonksiyon tanım kümesinin tamamında türevlenebilirdir, dolayısıyla tek kritik nokta $f'(x) = 2x = 0$ olduğu $x = 0$ noktasıdır. $x = 0$ ve $x = -2$ ile $x = 1$ uç noktalarında fonksiyonun değerlerini kontrol etmemiz gerekir.

$$\begin{aligned} \text{Kritik nokta değeri: } f(0) &= 0 \\ \text{Uç nokta değerleri: } f(-2) &= 4 \\ f(1) &= 1 \end{aligned}$$

Fonksiyonun $x = -2$ 'de değeri 4 olan bir mutlak maksimumu ve $x = 0$ 'da değeri 0 olan bir mutlak minimumu vardır. ■

ÖRNEK 3 Uç Noktalarda Mutlak Ekstremler

$g(t) = 8t - t^4$ 'ün $[-2, 1]$ aralığında mutlak ekstremlerini bulun.

Çözüm Fonksiyon tanım kümesinin tamamında türevlidir, dolayısıyla kritik noktalar sadece $g'(t) = 0$ olduğu yerlerde bulunur. Bu denklemi çözersek,

$$8 - 4t^3 = 0 \quad \text{veya} \quad t = \sqrt[3]{2} > 1,$$

verilen tanım kümesinde bulunmayan bir nokta buluruz. Dolayısıyla, fonksiyonun mutlak ekstremleri uç noktalardadır: $g(-2) = -32$ (mutlak minimum) ve $g(1) = 7$ (mutlak maksimum) Şekil 4.7'ye bakın. ■

ÖRNEK 4 Bir Kapalı Aralık Üzerinde Mutlak Ekstremleri Bulmak

$f(x) = x^{2/3}$ 'ün $[-2, 3]$ aralığında mutlak ekstremlerini bulun.

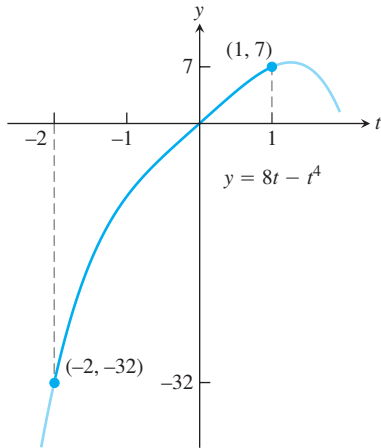
Çözüm Fonksiyonu kritik noktalarda ve uç noktalarda hesaplarız ve değerlerin en büyüğü ile en küçüğünü alırız.

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

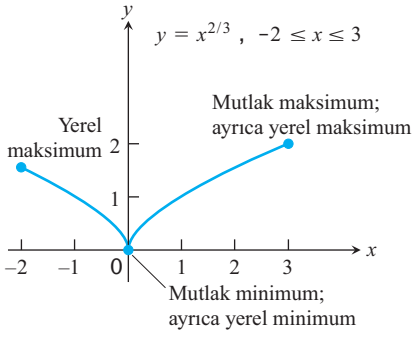
birinci türevinin sıfırları yoktur, fakat $x = 0$ 'da tanımsızdır. f' 'nin bu kritik noktadaki ve uç noktalarındaki değerleri

$$\begin{aligned} \text{Kritik nokta değeri: } f(0) &= 0 \\ \text{Uç nokta değerleri: } f(-2) &= (-2)^{2/3} = \sqrt[3]{4} \\ f(3) &= (3)^{2/3} = \sqrt[3]{9}. \end{aligned}$$

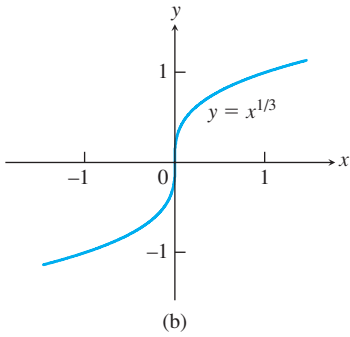
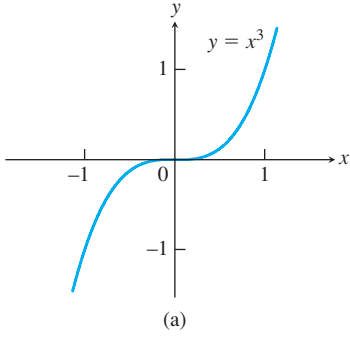
dur.



ŞEKİL 4.7 $[-2, 1]$ aralığında $g(t) = 8t - t^4$ 'nin ekstrem değerleri (Örnek 3).



ŞEKİL 4.8 $f(x) = x^{2/3}$ 'ün $[-2, 3]$ aralığındaki mutlak ekstrem değerleri $x = 0$ ve $x = 3$ 'tedir (Örnek 4).



ŞEKİL 4.9 Ekstrem değer bulunmayan kritik noktalar. (a) $y' = 3x^2 x = 0$ 'da sıfırdır, fakat $y = x^3$ 'ün burada ekstrem değeri yoktur. (b) $x = 0$ 'da $y' = (1/3)x^{-2/3}$ tanımsızdır fakat $y = x^{1/3}$ 'ün burada ekstremumu yoktur.

Bu listeden, mutlak maksimum değer, sağ uç nokta $x = 3$ 'te bulunan $\sqrt[3]{9} \approx 2.08$, değerinin olduğunu görebiliriz. Mutlak minimum değeri ise $x = 0$ iç noktasında bulunan 0 değeridir. (Şekil 4.8).

Bir fonksiyonun ekstremleri sadece kritik ve uç noktalarda bulunabilirken, her kritik veya uç nokta bir ekstrem değer varlığını belirtmez. Şekil 4.9 bunu iç noktalar için gösterir.

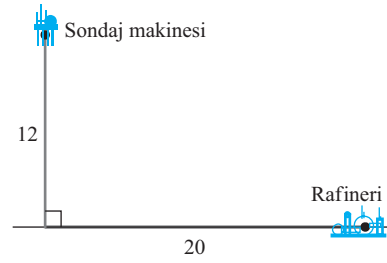
Bu bölümü, çalışmış olduğumuz bu kavramların bir gerçek dünya problemini çözmeye nasıl kullanıldıklarını gösteren bir örnekle tamamlıyoruz.

ÖRNEK 5 Bir Sondaj Makinesinden Bir Rafineriye Petrol İletmek

Kıydan 12 mil açıktaki bir sondaj makinesi, boru hattı ile kıyıda sondaj makinesi hizasından doğrusal olarak 20 mil ilerideki bir rafineriye bağlanacaktır. Sualtı boru hattı maliyeti mil başına 500.000\$ ve yeryüzü boru hattı maliyeti mil başına 300.000\$ ise, ikisinin hangi kombinasyonu en ucuz bağlantıyı sağlayacaktır?

Çözüm Problemi hissetmek için birkaç deneme yapalım:

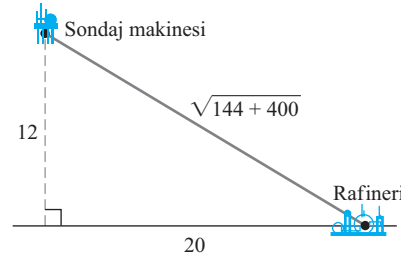
(a) *En az miktarda sualtı hattı*



Sualtı boru hattı çok pahalıdır, dolayısıyla olabildiği kadar az kullanalım. Doğrudan kıyıya ulaşalım (12 mil), sonra rafineriye kadar (20 mil) yeryüzü hattı kullanalım.

$$\begin{aligned} \text{Dolar maliyeti} &= 12(500,000) + 20(300,000) \\ &= 12,000,000 \end{aligned}$$

(b) *Bütün hat sualtı (en düz rota)*

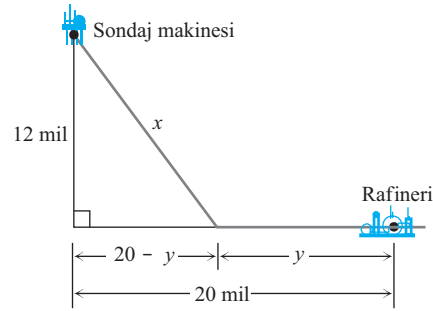


Su altından doğrudan rafineriye gideriz.

$$\begin{aligned} \text{Dolar maliyeti} &= \sqrt{544} (500,000) \\ &\approx 11,661,900 \end{aligned}$$

Bu (a)'daki plandan daha ucuzdur.

(c) Bunların arasında bir şey



Şimdi, sualtı hat uzunluğu x 'i ve yeryüzü hat uzunluğu y 'yi değişkenler olarak tanımlayalım. x ile y arasındaki ilişkiyi ifade etmenin anahtarı, sondaj makinesinin tam karşısındaki dik açıdır. Pisagor teoremi

$$\begin{aligned} x^2 &= 12^2 + (20 - y)^2 \\ x &= \sqrt{144 + (20 - y)^2} \end{aligned} \quad (3)$$

verir. Bu modelde sadece pozitif kökün anlamı vardır.

Boru hattının dolar maliyeti

$$c = 500,000x + 300,000y$$

dir. c 'yi tek bir değişkenin fonksiyonu olarak ifade edebilmek için (3) denkleminde x 'i yerine yazabiliriz:

$$c(y) = 500,000\sqrt{144 + (20 - y)^2} + 300,000y.$$

Şimdi, amacımız $0 \leq y \leq 20$ aralığında $c(y)$ 'nin minimum değerini bulmaktır. Zincir Kuralına göre $c(y)$ 'nin y 'ye göre birinci türevi

$$\begin{aligned} c'(y) &= 500,000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2(20 - y)(-1)}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 300,000 \\ &= -500,000 \frac{20 - y}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 300,000 \end{aligned}$$

dir. c' 'yü sıfıra eşitlemek

$$500,000(20 - y) = 300,000\sqrt{144 + (20 - y)^2}$$

$$\frac{5}{3}(20 - y) = \sqrt{144 + (20 - y)^2}$$

$$\frac{25}{9}(20 - y)^2 = 144 + (20 - y)^2$$

$$\frac{16}{9}(20 - y)^2 = 144$$

$$(20 - y) = \pm \frac{3}{4} \cdot 12 = \pm 9$$

$$y = 20 \pm 9$$

$$y = 11 \quad \text{veya} \quad y = 29$$

verir.

Yalnız $y = 11$ ilgili aralıktadır. c 'nin bu tek kritik noktada ve uç noktadaki değerleri

$$c(11) = 10,800,000$$

$$c(0) = 11,661,900$$

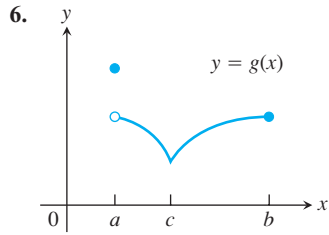
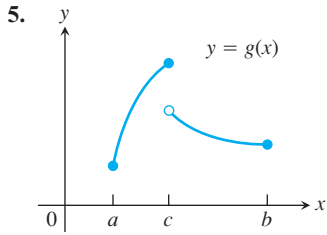
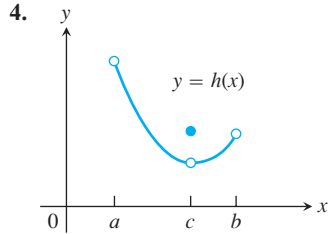
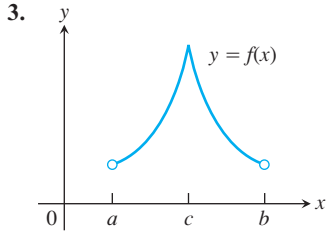
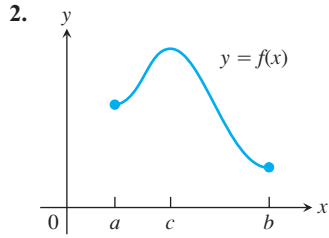
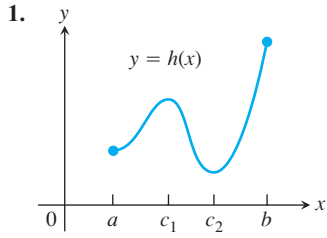
$$c(20) = 12,000,000$$

dir. En ucuz bağlantı 10,800,000 \$ tutar ve hattı su atından rafinerinin 11 mil uzağına götürerek bu sonuca ulaşırız. ■

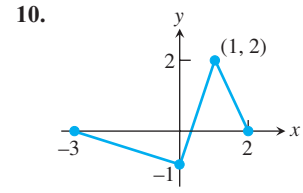
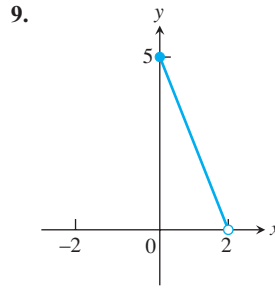
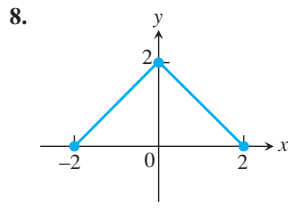
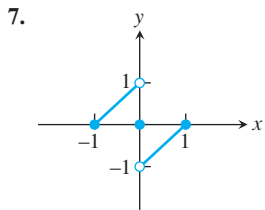
ALİŞTIRMALAR 4.1

Ekstremları Grafiklerden Bulmak

1–6 alıştırmalarında, grafiklerden fonksiyonun $[a, b]$ aralığında bir ekstrem değeri olup olmadığını bulun. Yanıtınızın Teorem 1 ile olan uygunluğunu açıklayın.



7–10 alıştırmalarında, ekstremum değerleri ve nerede olduklarını bulun



11–14 alıştırmalarında tabloyu bir grafik ile eşleyin

11.

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	5

12.

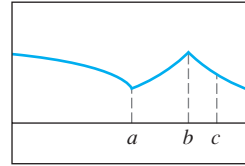
x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	-5

13.

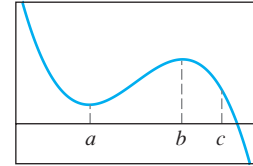
x	$f'(x)$
a	yok
b	0
c	-2

14.

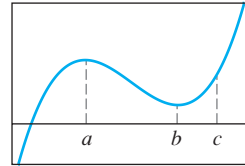
x	$f'(x)$
a	yok
b	yok
c	-1.7



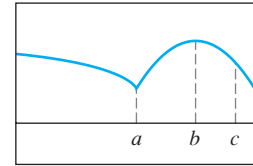
(a)



(b)



(c)



(d)

Kapalı Sonlu Aralıklarda Mutlak Ekstremler

15–30 alıştırmalarında, her fonksiyonun verilen aralıkta maksimum ve minimum değerlerini bulun. Sonra fonksiyonu çizin. Mutlak ekstremlerin bulunduğu noktaları belirleyin ve koordinatlarını yazın.

15. $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, \quad -2 \leq x \leq 3$

16. $f(x) = -x - 4, \quad -4 \leq x \leq 1$

17. $f(x) = x^2 - 1, \quad -1 \leq x \leq 2$

18. $f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \leq x \leq 1$

19. $F(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad 0.5 \leq x \leq 2$

20. $F(x) = -\frac{1}{x}, \quad -2 \leq x \leq -1$

21. $h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad -1 \leq x \leq 8$

22. $h(x) = -3x^{2/3}, \quad -1 \leq x \leq 1$

23. $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 1$

24. $g(x) = -\sqrt{5 - x^2}, \quad -\sqrt{5} \leq x \leq 0$

25. $f(\theta) = \sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$

26. $f(\theta) = \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

27. $g(x) = \csc x, \quad \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$

28. $g(x) = \sec x, \quad -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$

29. $f(t) = 2 - |t|, \quad -1 \leq t \leq 3$

30. $f(t) = |t - 5|, \quad 4 \leq t \leq 7$

31–34 alıştırmalarında, fonksiyonun mutlak maksimum ve minimumlarını ve bunların hangi noktalarda olduklarını bulun.

31. $f(x) = x^{4/3}, \quad -1 \leq x \leq 8$

32. $f(x) = x^{5/3}, \quad -1 \leq x \leq 8$

33. $g(\theta) = \theta^{3/5}, \quad -32 \leq \theta \leq 1$

34. $h(\theta) = 3\theta^{2/3}, \quad -27 \leq \theta \leq 8$

Ekstremum Değerleri Bulmak

35–44 alıştırmalarında, fonksiyonun ekstremum değerlerini ve bunların hangi noktalarda olduklarını bulun.

35. $y = 2x^2 - 8x + 9$

36. $y = x^3 - 2x + 4$

37. $y = x^3 + x^2 - 8x + 5$

38. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

39. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

40. $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

41. $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

42. $y = \sqrt{3 + 2x - x^2}$

43. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

44. $y = \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}$

Yerel Ekstremumlar ve Kritik Noktalar

45–52 alıştırmalarında, her kritik noktada türevi bulun ve yerel ekstremum değerleri belirleyin

45. $y = x^{2/3}(x + 2)$

46. $y = x^{2/3}(x^2 - 4)$

47. $y = x\sqrt{4 - x^2}$

48. $y = x^2\sqrt{3 - x}$

49. $y = \begin{cases} 4 - 2x, & x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$

50. $y = \begin{cases} 3 - x, & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

51. $y = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & x \leq 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & x > 1 \end{cases}$

52. $y = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}, & x \leq 1 \\ x^3 - 6x^2 + 8x, & x > 1 \end{cases}$

53 ve 54 alıştırmalarında, cevabınızı açıklayınız.

53. $f(x) = (x - 2)^{2/3}$ olsun.

a. $f'(2)$ var mıdır?

b. f' 'nin tek yerel ekstremum değerinin $x = 2$ de olduğunu gösterin.

c. (b) deki sonuç Ekstremum Değer Teoremi ile çelişir mi?

d. (a) ve (b) yi, 2'yi a ile değiştirerek $f(x) = (x - a)^{2/3}$ için tekrarlayın.

54. $f(x) = |x^3 - 9x|$ olsun.

a. $f'(0)$ var mıdır?

b. $f'(3)$ var mıdır?

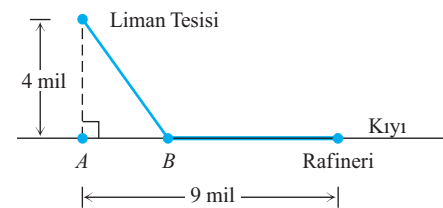
c. $f'(-3)$ var mıdır?

d. f' 'nin bütün ekstremumlarını belirleyin.

Optimizasyon Uygulamaları

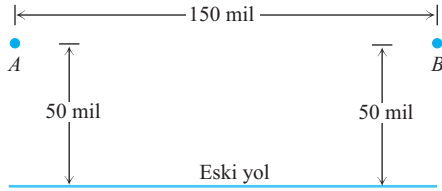
Tek değişkenli bir fonksiyonu maksimize veya minimize ederken, size, çözdüğünüz probleme uygun bir tanım kümesi üzerinde fonksiyonun grafiğini çizmenizi tavsiye ederiz. Grafik, hesaplamalarınıza başlamadan önce olayın içyüzünü anlamınızı sağlayacak ve cevabınızı anlamınıza yardımcı olacak bir görsel kapsam sağlayacaktır.

55. Bir boru hattı kurmak Süper tankerler 4 mil açıktaki bir liman tesisine petrol boşaltırlar. En yakın rafineri, liman tesisine en yakın kıyı noktasından 9 mil doğudadır. Liman tesisini rafineriye bağlayan bir boru hattı kurmak gerekmektedir. Boru hattı su altına kurulsaydı maliyeti mil başına 300,000\$, yeryüzüne kurulsaydı maliyeti mil başına 200,000\$'dır

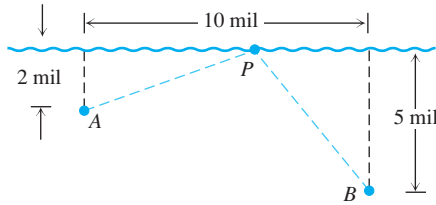


- a. B noktasını, kuruluş maliyetini minimize edecek şekilde yerleştirin.
- b. Yer yüzü kurulumunun maliyetinin sabit kalması beklenirken su altı kurulumun maliyetinin artması beklenmektedir. Hangi maliyette boru hattını doğrudan A noktasına kurmak optimal (en uygun) hale gelir?

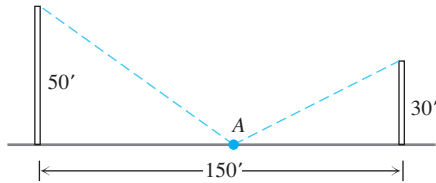
56. Bir ana yolu geliştirmek A köyünü B köyüne bağlayan bir anayol yapılması gerekmektedir. İki köyü birleştiren doğrunun 50 mil güneyinde geliştirilebilecek bir yol bulunmaktadır. Mevcut yolu iyileştirmenin maliyeti mil başına 300,000 \$'dır, oysa yeni bir anayol yapımının maliyeti mil başına 500,000 \$'dır. İki köyü bağlamanın maliyetini minimize edecek iyileştirme ve yeni yapım kombinasyonunu bulun. Açıkçası, önerilen yolun konumun belirleyin.



57. Bir pompa istasyonunu yerleştirmek İki şehir, bir nehrin güney tarafında kalmaktadır. İki şehre hizmet edecek bir pompa istasyonu konumlandırılacaktır. Şehirleri pompa istasyonuna birleştiren doğrular boyunca birer boru hattı yapılacaktır. Pompa istasyonunu, boru hattı uzunluğunu minimize edecek şekilde yerleştirin.



58. Bir halatın uzunluğu Bir kule 50 feet, bir diğeri 30 feet yüksekliktedir. Kuleler 150 feet uzaklıktadırlar. A noktasından her iki kulenin tepelerine bir halat çekilecektir.



- a. A noktasını, halatın uzunluğu minimum olacak şekilde yerleştirin
- b. Genel olarak, kulelerin yüksekliğine bakılmaksızın, A 'daki açılar eşit ise halat uzunluğunun minimum olduğunu gösterin.
- 59.** $V(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x)$, $0 < x < 5$ fonksiyonu bir kutunun hacminin modelidir.
- a. V 'nin ekstremum değerlerini bulunuz.

- b. (a) da bulduğunuz değerleri, kutunun hacmine bağlı olarak yorumlayın

60.

$$P(x) = 2x + \frac{200}{x}, \quad 0 < x < \infty,$$

fonksiyonu, boyutları x $100/x$ olan dikdörtgenin çevresini modellemektedir.

- a. P 'nin ekstremum değerlerini bulunuz.
- b. (a) da bulduğunuz değerleri, dikdörtgenin çevresine bağlı olarak yorumlayın
- 61. Bir dik üçgenin alanı** Hipotenüsünün uzunluğu 5 cm olan bir dik üçgenin mümkün olan en büyük alanı nedir.
- 62. Bir spor sahasının alanı** Bir spor sahası, uzunluğu x birim olan ve iki ucu r yarıçaplı yarım çemberlerle sınırlı bir dikdörtgen şeklinde yapılacaktır. Saha, 400 m uzunluğunda bir parkurla çevrilecektir.
- a. Sahanın dikdörtgensel kısmının alanını yalnız x 'e bağlı olarak veya yalnız r 'ye bağlı olarak ifade edin. (siz seçin)
- b. x ve r 'nin hangi değerleri için dikdörtgensel bölgenin alanı en büyüktür.
- 63. Dikey olarak hareket eden bir cismin maksimum yüksekliği** Dikey olarak hareket eden bir cismin yüksekliği, s metre ve t saniye olmak üzere

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0, \quad g > 0,$$

ile verilir. Cismin maksimum yüksekliğini bulun.

- 64. Tepe akım** Herhangi bir t (saniye) zamanında, bir alternatif akım devresindeki akım i (amper), $i = 2 \cos t + 2 \sin t$ ile verilir. Bu devre için tepe akımı (en büyük genlikli akım) nedir?

Teori ve Örnekler

- 65. Türev yokken minimum** $f(x) = |x|$ fonksiyonu $x = 0$ 'da türevlenemediği halde, fonksiyonun o noktada mutlak minimumu vardır. Bu Teorem 2 ile uyusur mu? Yanıtınızı açıklayın.
- 66. Çift fonksiyonlar** Bir $f(x)$ çift fonksiyonunun $x = c$ 'de yerel bir maksimum değeri varsa, f 'nin $x = -c$ 'deki değeri hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.
- 67. Tek fonksiyonlar** Bir $g(x)$ tek fonksiyonunun $x = c$ 'de yerel bir minimum değeri varsa, g 'nin $x = -c$ 'deki değeri hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.
- 68. Kritik noktalar** Kritik ve uç noktalarındaki değerlerini inceleyerek, sürekli bir $f(x)$ fonksiyonun ekstrem değerlerinin nasıl bulunacağını biliyoruz. Ya kritik nokta veya uç nokta yoksa, ne olur? Böyle fonksiyonlar gerçekten var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.
- 69. Kübik fonksiyonlar**

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

fonksiyonunu göz önüne alın.

- a. f 'nin 0, 1 veya 2 kritik noktasının olabileceğini gösterin. Düşüncenizi destekleyecek örnekler ve grafikler verin
- b. f 'nin kaç tane yerel ekstremum değeri bulunabilir?

T 70. Uç noktalarda ekstremumları bulunmayan fonksiyonlar

a.

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonun grafiğini çizin. $f(0) = 0$ 'ın neden bir ekstremum değeri olmadığını açıklayın.

b. Kendiniz, tanım kümesinin bir uç noktasında ekstremum değeri bulunmayan bir fonksiyon oluşturun.

T 71–74 Alıştırmalarındaki fonksiyonların grafiklerini çizin. Sonra, fonksiyonun aralık üzerindeki ekstremum değerlerini bulun ve nerede bulunduklarını söyleyin

71. $f(x) = |x - 2| + |x + 3|$, $-5 \leq x \leq 5$

72. $g(x) = |x - 1| - |x - 5|$, $-2 \leq x \leq 7$

73. $h(x) = |x + 2| - |x - 3|$, $-\infty < x < \infty$

74. $k(x) = |x + 1| + |x - 3|$, $-\infty < x < \infty$

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

75–80 alıştırmalarında, belirlenen kapalı aralıkta verilen fonksiyonun ekstremumlarını bulmak için aşağıdaki adımları izlerken bir BCS kullanın.

- Genel davranışını görmek için, verilen aralıkta fonksiyonu çizin.
- $f' = 0$ olan iç noktaları bulun. (Bazı alıştırmalarda bir çözüm bulmak için sayısal denklem çözücüsü kullanmak zorunda kalabilirsiniz.) f'' 'nü de çizmek isteyebilirsiniz.
- f'' 'nin bulunmadığı iç noktaları belirleyin.
- (b) ve (c)'de bulunan bütün noktalarda ve aralığın uç noktalarında fonksiyonun değerini bulun.
- Fonksiyonun aralık üzerindeki mutlak ekstremumlarını bulun ve bunların hangi noktalarda bulunduklarını belirtin.

75. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4x + 2$, $[-20/25, 64/25]$

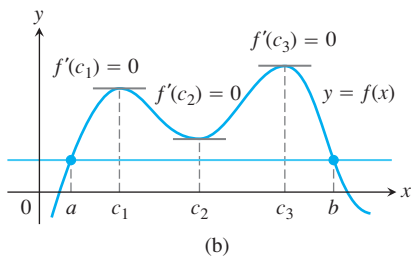
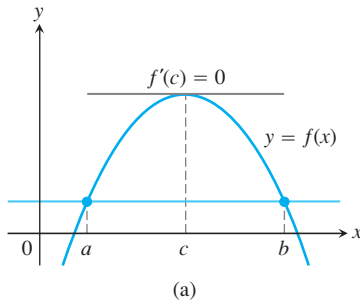
76. $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1$, $[-3/4, 3]$

77. $f(x) = x^{2/3}(3 - x)$, $[-2, 2]$

78. $f(x) = 2 + 2x - 3x^{2/3}$, $[-1, 10/3]$

79. $f(x) = \sqrt{x} + \cos x$, $[0, 2\pi]$

80. $f(x) = x^{3/4} - \sin x + \frac{1}{2}$, $[0, 2\pi]$

4.2**Ortalama Değer Teoremi**

ŞEKİL 4.10 Rolle Teoremi, türevlenebilir bir eğrinin, yatay bir doğruyu kestiği iki nokta arasında en az bir yatay teğeti olduğunu söyler. Yatay teğet sayısı bir (a) veya daha fazla (b) olabilir.

Sabit fonksiyonların türevlerinin sıfır olduğunu biliyoruz, fakat türevleri sıfır olan bir çok terimden oluşan karmaşık bir fonksiyon olabilir mi? Bir aralık üzerindeki türevleri özdeş olarak eşit olan iki fonksiyon arasındaki bağıntı nedir? Burada gerçekte sorduğumuz şey, hangi fonksiyonların türevlerinin özel bir *tipte* olabileceğidir. Bunlar ve bu bölümde çalışacağımız bir çok soru, Ortalama Değer Teoreminin uygulanmasıyla cevaplanır. Bu teoreme ulaşmak için önce Rolle Teoremine gereksinim vardır.

Rolle Teoremi

Bir fonksiyonun grafiğini çizmek, türevlenebilir bir fonksiyonun yatay bir doğruyu kestiği herhangi iki nokta arasında, eğrinin teğetinin yatay olduğu en az bir nokta bulunduğuna dair güçlü geometrik kanıtlar verir (Şekil 4.10). Michel Rolle'nin (1652-1719) 300 yıllık teoremi bunun gerçekten doğru olduğunu söyler. Daha kesin olarak, şu teoremi verebiliriz.

TEOREM 3 ROLLE TEOREMİ

$y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığının her noktasında sürekli ve (a, b) açık aralığının her noktasında türevlenebilir olduğunu varsayın.

$$f(a) = f(b)$$

ise, (a, b) 'de

$$f'(c) = 0$$

olacak şekilde en az bir c sayısı vardır.

İspat Sürekli olduğu için, $[a, b]$ aralığında f 'nin mutlak maksimum ve minimum değerleri vardır. Bunlar sadece

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Michel Rolle
(1652–1719)

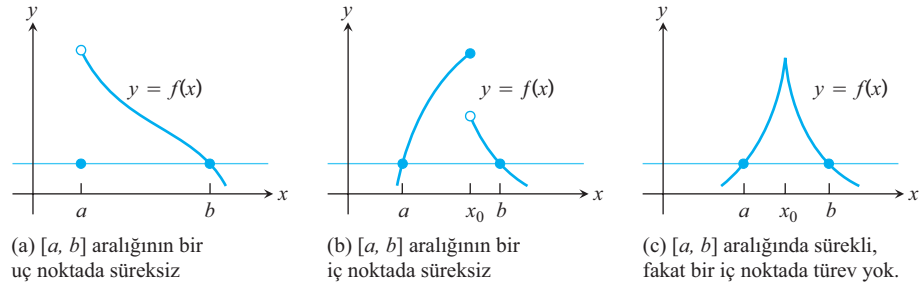
1. f' 'nin sıfır olduğu iç noktalarda,
2. f' 'nin bulunmadığı iç noktalarda,
3. fonksiyonun tanım aralığının uç noktalarında, yani burada a ve b noktalarında bulunurlar.

Hipoteze göre, f' 'nin her iç noktada türevi vardır. Bu (2) şıkkını ortadan kaldırır ve geriye $f' = 0$ olan iç noktalar ve iki uç nokta a ve b kalır.

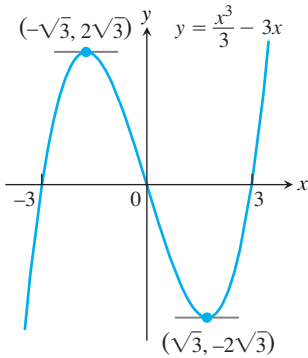
Maksimum veya minimum a ve b arasındaki bir c noktasında ise, Bölüm 4.1'deki Teorem 2'ye göre $f'(c) = 0$ 'dır ve Rolle teoreminin bir noktasını elde ederiz.

Maksimumun ve minimumun her ikisi de uç noktalarda ise, $f(a) = f(b)$ olduğundan, her $x \in [a, b]$ için f' 'nin $f(x) = f(a) = f(b)$ ile sabit fonksiyon olması gerekir. Böylece, $f'(x) = 0$ olur ve c aralığının herhangi bir yerinde alınabilir. ■

Teorem 3'ün hipotezleri gerektir. Tek bir noktada bile geçerli değilse, grafiğin yatay bir teğeti bulunmayabilir (Şekil 4.11).



ŞEKİL 4.11 Rolle Teoreminin hipotezleri sağlamazsa yatay teğet bulunmayabilir.



ŞEKİL 4.12 Rolle Teoreminin söylediği gibi, bu eğrinin x -eksenini kestiği noktaların arasında yatay teğetler vardır (Örnek 1).

ÖRNEK 1 Bir Kübik Polinomun Yatay Teğetleri

Şekil 4.12'de çizili olan

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$$

polinom fonksiyonu $[-3, 3]$ aralığının her noktasında sürekli ve $(-3, 3)$ aralığının her noktasında türevlidir. $f(-3) = f(3) = 0$ olduğundan, Rolle Teoremi, $a = -3$ ile $b = 3$ arasındaki açık aralıkta f' 'nin en az bir defa sıfır olması gerektiğini söyler. Gerçekten de, $f'(x) = x^2 - 3$, bu aralıkta $x = -\sqrt{3}$ 'te ve $x = \sqrt{3}$ 'te olmak üzere iki defa sıfır olur. ■

ÖRNEK 2 Bir $f(x) = 0$ Denkleminin Çözümü

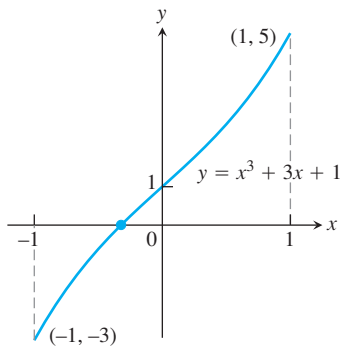
$$x^3 + 3x + 1 = 0$$

Denkleminin tam olarak bir reel kökünün var olduğunu gösterin.

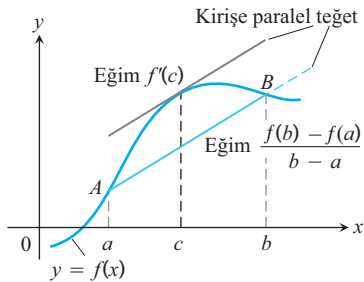
Çözüm $y = f(x) = x^3 + 3x + 1$ olsun.

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

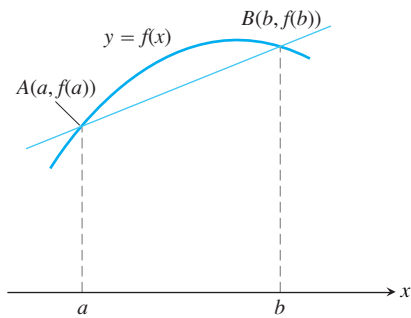
türevi hiçbir noktada sıfır değildir (Çünkü daima pozitiftir).



ŞEKİL 4.13 $y = x^3 + 3x + 1$ polinomunun tek reel sıfırı, eğrinin x -eksenini -1 ile 0 arasında kestiği yukarıda gösterilen noktadır.



ŞEKİL 4.14 Geometrik olarak, Ortalama Değer Teoremi A ve B arasında, eğrinin AB kirişine paralel en az bir teğetinin bulunduğunu söyler.



ŞEKİL 4.15 $[a, b]$ aralığında f 'nin grafiği ve AB kirişi.

Şimdi, $f(x)$ 'in sıfır olduğu sadece iki $x = a$ ve $x = b$ noktası bile olsaydı, Rolle Teoremi bunlar arasında f' 'nin sıfır olduğu bir $x = c$ noktasının varlığını garanti ederdi. Bu nedenle, f' 'nin birden fazla sıfırı yoktur. Aslında, bir sıfırı vardır çünkü Aradeğer Teoremi, $y = f(x)$ 'in grafiğinin, x eksenini ($y = -3$ olduğu) $x = -1$ ile ($y = 1$ olduğu) $x = 0$ arasında bir yerde kestiğini söyler. (Bkz. Şekil 4.13).

Rolle Teoreminin asıl kullanımı Ortalama Değer Teoreminin ispatındadır.

Ortalama Değer Teoremi

İlk olarak Joseph-Louis Lagrange tarafından ifade edilen Ortalama Değer Teoremi, Rolle teoreminin biraz değiştirilmiş halidir (Şekil 4.14). Şekilde teğetin AB kirişine paralel olduğu bir nokta vardır.

TEOREM 4 Ortalama Değer Teoremi

$y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve (a, b) açık aralığında türevlenebilir olduğunu varsayın. Bu durumda (a, b) aralığında

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (1)$$

olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

İspat f 'nin grafiğini düzlemde bir eğri olarak işaretler ve $A(a, f(a))$ ve $B(b, f(b))$ noktalarından bir doğru geçiririz (Bkz. Şekil 4.15). Bu doğru

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad (2)$$

fonksiyonunun (nokta-eğim denklemi) grafiğidir. x noktasında f ve g grafiklerinin arasındaki dikey uzaklık

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \end{aligned} \quad (3)$$

dır. Şekil 4.16'da f , g ve h grafikleri birlikte çizilmiştir.

h fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Rolle Teoreminin hipotezini sağlar. Hem f hem de g , $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında da türevlenebilir olduğundan dolayı, bu durum h için de geçerlidir. Ayrıca, f ve g grafiklerinin ikisi de A ve B noktalarından geçtikleri için, $h(a) = h(b) = 0$ olur. Bu nedenle, (a, b) aralığındaki bir c noktasında $h' = 0$ olur. Bu Denklem (1) için istediğimiz noktadır.

Denklem 1'i doğrulamak için, Denklem (3)'ün iki tarafının da x 'e göre türevini alır ve x 'i c 'ye eşitleriz:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{Denklem (3)'ün türevi ...}$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{... } x = c \text{ ile}$$

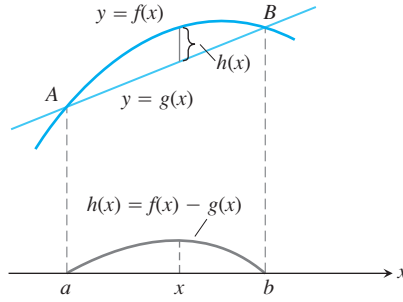
$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad h'(c) = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \text{Yeniden düzenlenmiş hali}$$

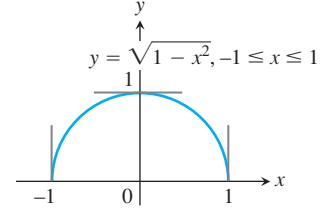
Böylece ispatlamak istediğimiz eşitliği elde ederiz. ■

TARİHSEL BİYOGRAFİ

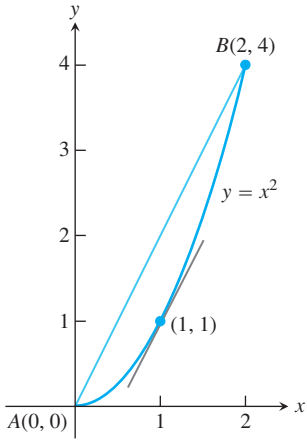
Joseph-Louis Lagrange
(1736–1813)



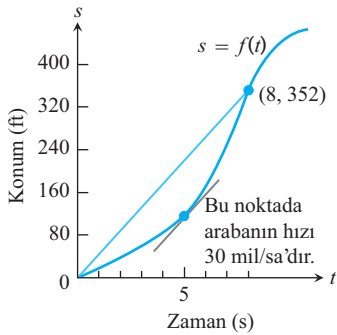
ŞEKİL 4.16 AB kirişi $g(x)$ fonksiyonunun grafiğidir. $h(x) = f(x) - g(x)$ fonksiyonu x noktasında f ve g grafikleri arasındaki dikey uzaklıktır.



ŞEKİL 4.17 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ fonksiyonu, f 'nin -1 ve 1 'de türevlenememesine rağmen $[-1, 1]$ aralığında ortalama değer teoreminin hipotezini (ve sonuçlarını) sağlar..



ŞEKİL 4.18 Örnek 3'te bulduğumuz gibi, $c = 1$ teğetin kirişe paralel olduğu noktadır.



ŞEKİL 4.19 Örnek 4'teki arabanın konum-zaman grafiği

Ortalama Değer Teoreminin hipotezinin f 'nin a veya b 'de türevlenebilir olmasını gerektirmediğine dikkat edin. a ve b 'de süreklilik yeterlidir (Şekil 4.17).

ÖRNEK 3 $f(x) = x^2$ fonksiyonu (Şekil 4.18), $0 \leq x \leq 2$ için süreklidir ve $0 < x < 2$ için türevlidir. $f(0) = 0$ ve $f(2) = 4$ olduğundan, Ortalama Değer Teoremi, aralıktaki bir c noktasında, $f'(x) = 2x$ türevinin değeri $(4 - 0)/(2 - 0) = 2$ olmalıdır. Bu (istisna) durumda c 'yi $2c = 2$ denkleminde $c = 1$ olarak buluruz. ■

Bir Fiziksel Yorum

$(f(b) - f(a))/(b - a)$ sayısına f 'nin $[a, b]$ aralığındaki ortalama değişimi ve $f'(c)$ 'ye anlık bir değişim olarak bakarsak, Ortalama Değer Teoremi, bir iç noktadaki anlık değişimin bütün aralıktaki ortalama değişime eşit olduğunu söyler.

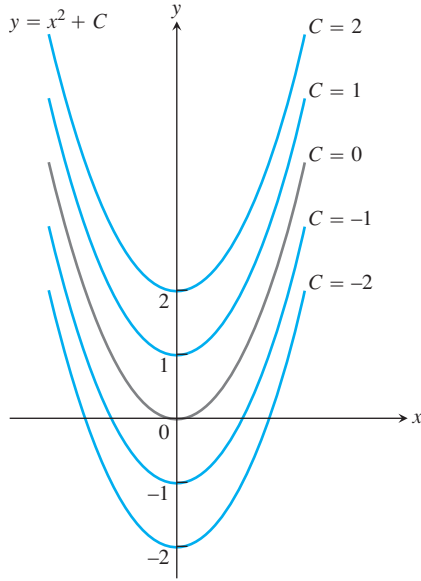
ÖRNEK 4 İlk hızı sıfır olan bir arabanın 352 ft yol alması 8 sn sürüyorsa, 8 saniyelik süredeki ortalama hızı $352/8 = 44$ ft/sn'dir. Hızlanma sürecindeki bir anda, Ortalama Değer Teoremine göre, hız göstergesi tam 30 mil/saat (44 ft/sn) gösterecektir (Şekil 4.19). ■

Matematiksel Sonuçlar

Bu bölümün başında, ne tip bir fonksiyonun türevinin bir aralık üzerinde sıfır olduğunu sormuştuk. Ortalama Değer Teoreminin ilk sonucu bu sorunun yanıtını verir.

SONUÇ 1 Türevi Sıfır Olan Fonksiyonlar Sabittir

Bir (a, b) açık aralığının her x noktasında $f'(x) = 0$ ise, C bir sabit olmak üzere, her $x \in (a, b)$ için $f(x) = C$ dir.



ŞEKİL 4.20 Geometrik bir bakış açısıyla, Ortalama Değer Teoreminin 2. sonucu, bir aralık üzerinde türevleri özdeş olarak eşit olan fonksiyonlar arasındaki farkın sadece bir dikey kayma olduğunu söyler. Türevi $2x$ olan fonksiyonların grafikleri, burada değişik C değerleri için çizilmiş olan $y = x^2 + C$ parabolidir.

İspat f 'nin aralığındaki değerinin sabit olduğunu göstermek istiyoruz. Bunu, x_1 ve x_2 'de herhangi iki nokta ise $f(x_1) = f(x_2)$ olduğunu göstererek yapacağız. x_1 ve x_2 , soldan sağa doğru numaralanırsa $x_1 < x_2$ olur. Bu durumda, f fonksiyonu $[x_1, x_2]$ aralığında Ortalama Değer Teoreminin hipotezini sağlar: $[x_1, x_2]$ aralığının her noktasında türevlenebilir ve dolayısıyla her noktasında süreklidir. Böylece x_1 ve x_2 arasında bulunan bir c noktasında

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

dir. (a, b) 'nin her yerinde $f' = 0$ olduğundan, bu denklem

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0, \quad f(x_2) - f(x_1) = 0, \quad \text{ve} \quad f(x_1) = f(x_2).$$

haline dönüşür.

Bu bölümün başında, bir aralık üzerinde türevleri özdeş olarak eşit olan fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi da sormuştuk. Aşağıdaki sonuç, fonksiyonların söz konusu aralık üzerindeki değerlerinin bir sabit kadar fark ettiğini söyler.

SONUÇ 2 Türevleri Aynı Olan Fonksiyonların Arasındaki Fark Sabittir.

Bir (a, b) aralığının her x noktasında $f'(x) = g'(x)$ ise öyle bir C sabiti vardır ki her $x \in (a, b)$ için $f(x) = g(x) + C$ dir. Yani, $f - g$ farkı (a, b) üzerinde sabittir.

İspat Her $x \in (a, b)$ noktasında, $h = f - g$ fark fonksiyonunun türevi

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

olur. Dolayısıyla, Sonuç 1'e göre (a, b) üzerinde $h(x) = C$ 'dir. Böylece, (a, b) üzerinde $f(x) - g(x) = C$ 'dir, dolayısıyla $f(x) = g(x) + C$ bulunur.

Sonuç 1 ve Sonuç 2, (a, b) açık aralığının sonlu olmaması durumunda da geçerlidir. Yani, (a, ∞) , $(-\infty, b)$ veya $(-\infty, \infty)$ aralıkları için de doğrudurlar.

Sonuç 2, Bölüm 4.8 de ters türevleri tartışırken önemli rol oynar. Bize, örneğin, $(-\infty, \infty)$ aralığında $f(x) = x^2$ fonksiyonunun türevi $2x$ olduğundan, $(-\infty, \infty)$ aralığında türevi $2x$ olan başka herhangi bir fonksiyonun formülünün, C bir sabit olmak üzere $x^2 + C$ olması gerektiğini söyler (Şekil 4.20).

ÖRNEK 5 Türevi $\sin x$ olan ve grafiği $(0, 2)$ noktasından geçen $f(x)$ fonksiyonunu bulun.

Çözüm $f(x)$ ile $g(x) = -\cos x$ fonksiyonlarının türevleri aynı olduğu için, C bir sabit olmak üzere, $f(x) = -\cos x + C$ olduğunu biliyoruz. C 'nin değerini $f(0) = 2$ olması (f 'nin grafiğinin $(0, 2)$ noktasından geçmesi) koşulundan bulabiliriz:

$$f(0) = -\cos(0) + C = 2, \quad \text{dolayısıyla } C = 3$$

f 'nin formülü $f(x) = -\cos x + 3$ 'tür.

İvmeden Hız ve Konum Bulmak

Serbest düşen ve ivmesi 9.8 m/sn^2 olan bir cismin hız ve konum fonksiyonlarının nasıl bulunduğu aşağıda verilmiştir.

$v(t)$ 'nin, türevi 9.8 olan bir fonksiyon olduğunu biliyoruz. Ayrıca, $g(t) = 9.8t$ fonksiyonunun türevinin de 9.8 olduğunu biliyoruz. Sonuç 2'ye göre, C bir sabit olmak üzere,

$$v(t) = 9.8t + C$$

olur. Cisim serbest düştüğü için, $v(0) = 0$ olur. Buradan

$$9.8(0) + C = 0 \quad \text{ve} \quad C = 0$$

bulunur. Hız fonksiyonu $v(t) = 9.8t$ $v(t) = 9.8t$ olmalıdır. Peki, konum fonksiyonu $s(t)$ nedir?

$s(t)$ 'nin türevi 9.8t olan bir fonksiyon olduğunu biliyoruz. Ayrıca, $f(t) = 4.9t^2$ fonksiyonunun türevinin de 9.8t olduğunu biliyoruz. Sonuç 2'ye göre, C bir sabit olmak üzere,

$$s(t) = 4.9t^2 + C$$

olur. Başlangıç yüksekliği, bulunduğu noktadan aşağıya doğru pozitif olarak ölçülen, $s(0) = h$ ise,

$$4.9(0)^2 + C = h \quad \text{ve} \quad C = h$$

bulunur. Konum fonksiyonu $s(t) = 4.9t^2 + h$ olmalıdır.

Değişim oranlarından fonksiyonların kendilerini bulma kabiliyeti analizin en güçlü araçlarından biridir. Görecek olduğumuz gibi, Bölüm 5'teki matematiksel gelişmelerin kalbidir.

ALİŞTIRMALAR 4.2

Ortalama Değer Teoreminde c 'yi Bulmak

1–4 alıştırmalarındaki fonksiyon ve aralıklar için, ortalama değer teoremindeki

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

denklemini sağlayan c değer veya değerlerini bulun.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 1$, $[0, 1]$

2. $f(x) = x^{2/3}$, $[0, 1]$

3. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

4. $f(x) = \sqrt{x-1}$, $[1, 3]$

Hipotezleri Kontrol Edip Kullanmak

5–8 alıştırmalarındaki fonksiyonların hangileri verilen aralıkta Ortalama Değer Teoreminin hipotezini sağlar, hangileri sağlamaz? Yanıtlarınızı açıklayın.

5. $f(x) = x^{2/3}$, $[-1, 8]$

6. $f(x) = x^{4/5}$, $[0, 1]$

7. $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$, $[0, 1]$

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

9.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

fonksiyonu $x = 0$ ile $x = 1$ 'de sıfırdır ve $(0, 1)$ aralığında türevlenebilir, fakat bu aralıktaki türevi hiçbir zaman sıfır değildir. Bu nasıl olabilir? Rolle teoremine göre, türev $(0, 1)$ aralığının bir noktasında sıfır olmak zorunda değil midir? Açıklayın.

10. Hangi a , m ve b değerlerinde

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1 \\ mx + b, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

fonksiyonu $[0, 2]$ aralığında ortalama değer teoreminin hipotezlerini sağlar?

Kökler (Sıfırlar)

11. a. Aşağıdaki polinomların sıfırlarını ve türevlerinin sıfırlarını bir doğru üzerinde gösterin.

i) $y = x^2 - 4$

ii) $y = x^2 + 8x + 15$

iii) $y = x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2$

iv) $y = x^3 - 33x^2 + 216x = x(x - 9)(x - 24)$

b. Rolle Teoremini kullanarak

$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ 'ın her iki sıfırı arasında

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1$$

fonksiyonunun bir sıfırı olduğunu gösterin.

12. f'' 'nin $[a, b]$ aralığında sürekli olduğunu ve f' 'nin bu aralıkta üç tane sıfırının bulunduğunu varsayın. f'' 'nin (a, b) aralığında en az bir sıfırının bulunduğunu gösterin. Bu sonucu genelleştirin.

13. Bir $[a, b]$ aralığında $f'' > 0$ ise, bu aralıkta f' 'nin en fazla bir sıfırı olduğunu gösterin. Bu aralıkta $f'' < 0$ ise ne olur?

14. Üçüncü dereceden bir polinomun en fazla üç tane reel kökü bulunabileceğini gösterin.

15–22 alıştırılmalarındaki fonksiyonların verilen aralıkta tek bir sıfırlarının bulunduğunu gösterin.

15. $f(x) = x^4 + 3x + 1, \quad [-2, -1]$

16. $f(x) = x^3 + \frac{4}{x^2} + 7, \quad (-\infty, 0)$

17. $g(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1+t} - 4, \quad (0, \infty)$

18. $g(t) = \frac{1}{1-t} + \sqrt{1+t} - 3.1, \quad (-1, 1)$

19. $r(\theta) = \theta + \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right) - 8, \quad (-\infty, \infty)$

20. $r(\theta) = 2\theta - \cos^2\theta + \sqrt{2}, \quad (-\infty, \infty)$

21. $r(\theta) = \sec\theta - \frac{1}{\theta^3} + 5, \quad (0, \pi/2)$

22. $r(\theta) = \tan\theta - \cot\theta - \theta, \quad (0, \pi/2)$

Türevlerden Fonksiyonları Bulmak

23. $f(-1) = 3$ ve her x için $f'(x) = 0$ olduğunu varsayın. Her x için $f(x) = 3$ olmak zorunda mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

24. $f(0) = 5$ ve her x için $f'(x) = 2$ olduğunu varsayın. Her x için $f(x) = 2x + 5$ olmak zorunda mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

25. Her x için, $f'(x) = 2x$ olsun. Şu durumlarda $f(2)$ 'yi bulun.

a. $f(0) = 0$ b. $f(1) = 0$ c. $f(-2) = 3$.

26. Türevleri sabit olan fonksiyonlar hakkında ne söylenebilir? Yanıtınızı açıklayın.

27–32 alıştırılmalarında, verilen türevlere sahip olabilecek bütün fonksiyonları bulun.

27. a. $y' = x$ b. $y' = x^2$ c. $y' = x^3$

28. a. $y' = 2x$ b. $y' = 2x - 1$ c. $y' = 3x^2 + 2x - 1$

29. a. $y' = -\frac{1}{x^2}$ b. $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$ c. $y' = 5 + \frac{1}{x^2}$

30. a. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ b. $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ c. $y' = 4x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

31. a. $y' = \sin 2t$ b. $y' = \cos \frac{t}{2}$ c. $y' = \sin 2t + \cos \frac{t}{2}$

32. a. $y' = \sec^2\theta$ b. $y' = \sqrt{\theta}$ c. $y' = \sqrt{\theta} - \sec^2\theta$

33–36 alıştırılmalarında, türevi verilen ve grafiği P noktasından geçen fonksiyonu bulun.

33. $f'(x) = 2x - 1, \quad P(0, 0)$

34. $g'(x) = \frac{1}{x^2} + 2x, \quad P(-1, 1)$

35. $r'(\theta) = 8 - \csc^2\theta, \quad P\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

36. $r'(t) = \sec t \tan t - 1, \quad P(0, 0)$

Hızdan Konum Bulmak

37–40 alıştırılmalarında, bir koordinat ekseninde hareket eden bir cismin $v = ds/dt$ hızı ve başlangıç konumu verilmektedir. Cismin t anındaki konumunu bulun.

37. $v = 9.8t + 5, \quad s(0) = 10$ 38. $v = 32t - 2, \quad s(0.5) = 4$

39. $v = \sin \pi t, \quad s(0) = 0$ 40. $v = \frac{2}{\pi} \cos \frac{2t}{\pi}, \quad s(\pi^2) = 1$

İvmeden Konum Bulmak

41–44 alıştırılmalarında, bir koordinat doğrusu üzerinde hareket eden bir cismin, $a = d^2s/dt^2$ ivmesi, başlangıç hızı ve başlangıç konumu verilmektedir. Cismin t anındaki konumunu bulun.

41. $a = 32, \quad v(0) = 20, \quad s(0) = 5$

42. $a = 9.8, \quad v(0) = -3, \quad s(0) = 0$

43. $a = -4 \sin 2t, \quad v(0) = 2, \quad s(0) = -3$

44. $a = \frac{9}{\pi^2} \cos \frac{3t}{\pi}, \quad v(0) = 0, \quad s(0) = -1$

Uygulamalar

45. **Sıcaklık değişimi** Bir termometrenin, buzdolabından çıkarılıp kaynar suya sokulmasıyla, -19°C 'tan 100°C 'a çıkması 14 saniye sürmüştür. Bu süre zarfındaki bir anda, cıvanın 8.5°C/s hızla yükseldiğini gösterin.

46. Bir kamyoncunun, hız limiti 65 mil/sa olan bir ücretli yolda bir ücret gişesine uzattığı bilet, 2 saatte 159 mil yol kat ettiğini göstermektedir. Kamyoncu hız nedeniyle uyarı almıştır. Neden?

47. Klasik hesaplamalar, 170 kürekli bir savaş gemisinin (Eski Yunan veya Roma savaş gemisi) 24 saatte 184 deniz mili yol aldığını söylemektedir. Bu yolculuğun bir anında, savaş gemisinin hızının 7.5 knot'u (saat başına deniz mili) neden aştığını açıklayın.

48. Bir maraton koşucusu 26.2 millik New York maratonunu 2.2 saatte koşmuştur. Koşu esnasında maratoncunun hızının en az iki defa tam olarak 11 mil/saate eşit olduğunu gösterin.

49. 2 saatlik bir araba yolculuğunun bir anında, arabanın hız göstergesindeki değerin yolculuğun ortalama süratine eşit olduğunu gösterin.

50. **Ay' da serbest düşme** Ay'da yerçekimi ivmesi 1.6 m/sn^2 dir. Bir taş, derin bir uçuruma bırakılıyor, 30 sn sonra yere çarpmasından hemen önce ne kadar süratli gidiyordu?

Teori ve Örnekler

51. **a ve b 'nin geometrik ortalaması** İki pozitif a ve b sayısının *geometrik ortalaması* $\sqrt{ab}$ 'dir. Ortalama Değer Teoreminin sonucundaki c 'nin, pozitif sayılardan oluşan $[a, b]$ aralığındaki $f(x) = 1/x$ için $c = \sqrt{ab}$ olduğunu gösterin.
52. **a ve b 'nin aritmetik ortalaması** İki a ve b sayısının *aritmetik ortalaması* $(a + b)/2$ sayıdır. Ortalama değer teoreminin sonucundaki c sayısının, $[a, b]$ aralığındaki $f(x) = x^2$ fonksiyonu için $c = (a + b)/2$ olduğunu gösterin.

T 53.

$$f(x) = \sin x \sin(x + 2) - \sin^2(x + 1)$$

fonksiyonunun grafiğini çizin. Grafik ne yapıyor? Neden fonksiyon bu şekilde davranıyor? Cevabınızı açıklayın.

54. Rolle Teoremi

- a. $x = -2, -1, 0, 1$ ve 2 'de sıfırları bulunan bir $f(x)$ fonksiyonu tanımlayın.
- b. f ve türevi f' 'nü birlikte çizin. Gördüğünüz, Rolle Teoremine nasıl bağlıdır?
- c. $g(x) = \sin x$ ve türevi g' , aynı olayı sergiler mi?

55. **Tek Çözüm** f 'nin $[a, b]$ üzerinde sürekli olduğunu ve (a, b) üzerinde türevli olduğunu varsayın. Ayrıca, $f(a)$ ile $f(b)$ 'nin zıt işaretli olduklarını ve a ile b arasında $f' \neq 0$ olduğunu kabul edin. a ile b arasında tam olarak bir defa $f(x) = 0$ olduğunu gösterin.

56. **Paralel teğetler** f ve g 'nin üzerinde türevli olduklarını ve $f(a) = g(a)$ ve $f(b) = g(b)$ olduğunu varsayın. a ile b arasında, f ve g 'nin grafiklerinin teğetlerinin paralel veya aynı olduğu, en az bir noktanın var olduğunu gösterin.

57. Türevlenebilir $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri düzlemde aynı noktada başlıyorsa ve fonksiyonların değişim oranları her noktada aynıysa, grafikler aynı olmak zorunda mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

58. Herhangi a ve b sayıları için, $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$ olduğunu gösterin.

59. f 'nin $a \leq x \leq b$ üzerinde türevlenebildiğini ve $f(b) < f(a)$ olduğunu varsayın. a ile b arasındaki bir noktada f' 'nin negatif olduğunu gösterin.

60. f , bir $[a, b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun.

$$\min f' \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \max f'$$

sağlanmasını garanti etmek için f üzerine hangi şartları koyarsınız. Burada, $\min f'$ ve $\max f'$, f' 'nin $[a, b]$ aralığındaki minimum ve maksimum değerlerini göstermektedir. Cevabınızı açıklayın.

T 61. $0 \leq x \leq 0.1$ için $f'(x) = 1/(1 + x^4 \cos x)$ ve $f(0) = 1$ ise $f(0, 1)$ 'i tahmin etmek için Alıştırma 60'taki eşitsizliği kullanın.

T 62. $0 \leq x \leq 0.1$ için $f'(x) = 1/(1 + x^4)$ ve $f(0) = 2$ ise $f(0, 1)$ 'i tahmin etmek için Alıştırma 60'taki eşitsizliği kullanın.

63. f 'nin her x değerinde türevlenebildiğini, $f(1) = 1$ olduğunu, $(-\infty, 1)$ aralığında $f' < 0$ ve $(1, \infty)$ aralığında $f' > 0$ olduğunu varsayın.

a. Her x için $f(x) \geq 1$ olduğunu gösterin.

b. $f'(1) = 0$ olmak zorunda mıdır? Açıklayın.

64. $f(x) = px^2 + qx + r$ kapalı aralığında tanımlanmış bir fonksiyon olsun. (a, b) aralığında f 'nin Ortalama Değer Teoremini sağladığı tek bir nokta olduğunu gösterin.

4.3

Monoton Fonksiyonlar ve Birinci Türev Testi

Türevlenebilir bir fonksiyonun grafiğini çizerken, bir aralık üzerinde nerede arttığını (soldan sağa doğru yükseldiğini) ve nerede azaldığını (soldan sağa doğru alçaldığını) bilmek faydalıdır. Bu bölüm, bir fonksiyonun bir aralık üzerinde artmasının veya azalmasının ne demek olduğunu tam olarak tanımlar ve nerede arttığını, nerede azaldığını belirlemek için bir test verir. Ayrıca, bir fonksiyonun kritik noktalarının, yerel ekstremum değerlerinin varlığı konusunda, nasıl test edildiğini göstereceğiz.

Artan Fonksiyonlar ve Azalan Fonksiyonlar

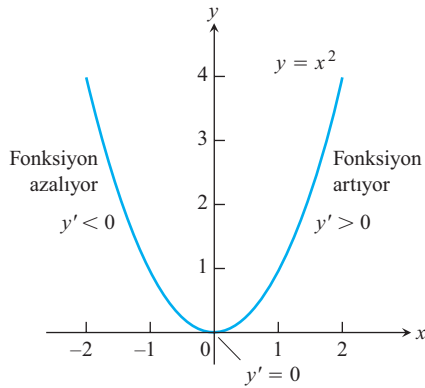
Hangi tip fonksiyonların pozitif türevleri veya negatif türevleri vardır? Ortalama Değer Teoreminin üçüncü sonucunun sağladığı cevap şudur: yalnızca pozitif türevli fonksiyonlar artan fonksiyonlardır; yalnızca negatif türevli fonksiyonlar azalan fonksiyonlardır.

TANIMLAR Artan, Azalan Fonksiyonlar

f , I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1 ile x_2 de I 'da herhangi iki nokta olsun.

1. $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ ise, f I 'da **artandır** denir.
2. $x_1 < x_2$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise, f I 'da **azalandır** denir.

I 'da artan veya azalan bir fonksiyona I 'da **monotondur** denir.



ŞEKİL 4.21 $f(x) = x^2$ fonksiyonu $(-\infty, 0]$ ve $[0, \infty)$ aralıklarında monotondur, fakat $(-\infty, \infty)$ aralığında monoton değildir.

Artan ve azalan fonksiyonların tanımlarının, I 'daki her x_1 ve x_2 ($x_1 < x_2$) nokta çifti için sağlanması gerektiğini fark etmek önemlidir. “<” eşitsizliği fonksiyonların değerlerini karşılaştırdığından, $\leq$ değil, bazı kitaplar, f , I aralığında *kesin olarak artandır* veya *azalandır* derler. I aralığı sonlu veya sonsuz olabilir.

$f(x) = x^2$ fonksiyonu, grafiğinden görülebileceği gibi (Şekil 4.21) $(-\infty, 0]$ üzerinde azalır ve $[0, \infty)$ üzerinde artar. f fonksiyonu, $(-\infty, 0]$ ve $[0, \infty)$ üzerinde monotondur fakat $(-\infty, \infty)$ üzerinde monoton değildir. $(-\infty, 0)$ aralığı üzerinde teğetlerin eğimlerinin negatif olduğuna dikkat edin, dolayısıyla burada birinci türev daima negatiftir; $(0, \infty)$ için teğetlerin eğimleri pozitifdir, dolayısıyla birinci türev pozitifdir. Aşağıdaki sonuç bu gözlemleri doğrulamaktadır.

SONUÇ 3 Monoton Fonksiyonlar İçin Birinci Türev Testi

f 'nin $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilir olduğunu varsayın.

Her $x \in (a, b)$ noktasında $f'(x) > 0$ ise f , $[a, b]$ aralığında artandır.

Her $x \in (a, b)$ noktasında $f'(x) < 0$ ise f , $[a, b]$ aralığında azalandır.

İspat x_1 ile x_2 , $x_1 < x_2$ olmak üzere, $[a, b]$ aralığında iki nokta olsun. $[x_1, x_2]$ aralığında f 'ye Ortalama Değer Teoremi uygulanırsa, x_1 ile x_2 arasındaki bir c için

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

bulunur. Bu denklemin sağ tarafının işareti $f'(c)$ 'nin işaretiyle aynıdır, çünkü $x_2 - x_1$ pozitifdir. Dolayısıyla, (a, b) aralığında f' pozitifse, $f(x_2) > f(x_1)$ ve f' negatifse, $f(x_2) < f(x_1)$ olur. ■

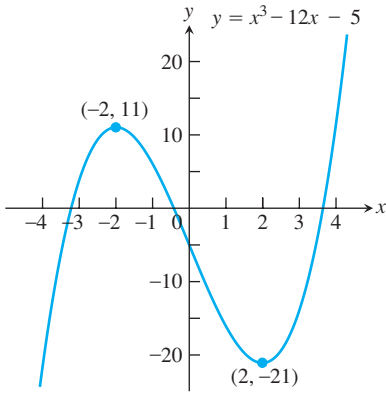
Bir fonksiyonun, nerede artan ve nerede azalan olduğunu bulmak için, Birinci Türev Testinin nasıl uygulanacağı aşağıdadır. $a < b$ bir f fonksiyonunun iki kritik noktası ise ve (a, b) aralığında f' var ve sıfır olmuyorsa, $f'(a, b)$ aralığında pozitif veya negatif olmak zorundadır (Bölüm 3.1, Teorem 2). f'' 'nin (a, b) aralığındaki işaretini belirleyebileceğimiz bir yol, basitçe (a, b) aralığındaki bir x için f'' 'nü hesaplamaktır. Sonra, Sonuç 3'ü uygulayız.

ÖRNEK 1 Monoton Fonksiyonlar İçin Birinci Türev Testini Kullanmak

$f(x) = x^3 - 12x - 5$ 'in kritik noktalarını bulun ve f 'nin arttığı ve azaldığı aralıkları belirleyin.

Çözüm f fonksiyonu her yerde sürekli ve türevlenebilirdir. Birinci türev

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) \\ &= 3(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$



ŞEKİL 4.22 $f(x) = x^3 - 12x - 5$ fonksiyonu üç ayrı aralık üzerinde monotondur (Örnek 1).

$x = -2$ ve $x = 2$ de sıfırdır. Bu kritik noktalar f' 'nin tanım kümesini f'' 'nin pozitif veya negatif olduğu $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, ve $(2, \infty)$ aralıklarına böler. f'' 'nin her bir alt aralıktaki işaretini, f'' 'yi uygun bir noktada hesaplayarak buluruz. Sonra, her bir alt aralığa Sonuç 3 uygulanarak f' 'nin davranışı belirlenir. Sonuçlar, aşağıdaki tabloda özetlenmiş ve f' 'nin grafiği Şekil 4.22 de verilmiştir.

Aralıklar	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Hesaplanmış f''	$f''(-3) = 15$	$f''(0) = -12$	$f''(3) = 15$
f'' 'nin işareti	+	-	+
f' 'nin davranışı	artan	azalan	artan

Sonuç 3, sonlu aralıklar için olduğu gibi sonsuz aralıklar için de geçerlidir ve bu gerçeği Örnek 1'deki incelemede kullandık.

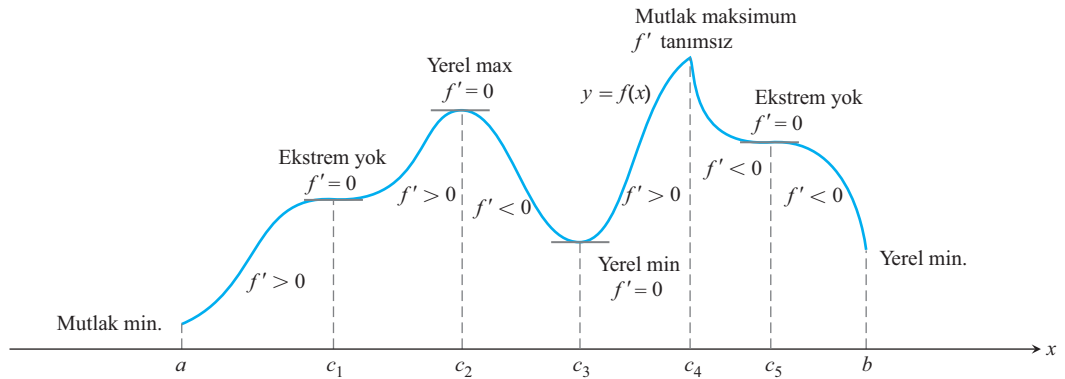
Bir fonksiyonun nerede arttığını ve nerede azaldığını bilmek, yerel ekstremumların tabiatını nasıl test edeceğimizi de söyler.

TARİHSEL BİYOGRAFI

Edmund Halley
(1656–1742)

Yerel Ekstremum Değerler İçin Birinci Türev Testi

Şekil 4.23'te, f' 'nin bir yerel minimum değerinin bulunduğu noktaların, hemen solunda $f' > 0$ ve hemen sağında $f' < 0$ dır (Nokta bir uç noktaysa, göz önüne alınması gereken sadece bir taraf vardır). Böylece, minimum değer solunda fonksiyon azalan ve sağında artandır. Benzer şekilde, f' 'nin bir yerel maksimum değerinin bulunduğu noktaların, hemen solunda $f' > 0$ ve hemen sağında $f' < 0$ dır. Böylece, maksimum değer solunda fonksiyon artan ve sağında azalandır.



ŞEKİL 4.23 Bir fonksiyonun birinci türevi, grafiğin nasıl yükseldiğini ve alçaldığını söyler.

Bu gözlemler, türevlenebilir bir fonksiyonun yerel ekstremum değerlerinin varlığı ve tabiyatı için bir teste yol açar.

Yerel Ekstremum Değerler İçin Birinci Türev Testi

c 'nin, sürekli bir f fonksiyonunun bir kritik noktası olduğunu ve f 'nin, c 'yi içeren bir aralığın her noktasında (c 'nin kendisi hariç olabilir) türevlenebilir olduğunu varsayın. Soldan sağa, c 'den geçerken.

1. f' c 'de negatiften pozitifte değişiyorsa, f 'nin c 'de bir yerel minimum değeri vardır.
2. f' c 'de pozitiften negatife değişiyorsa, f 'nin c 'de bir yerel maksimum değeri vardır.
3. f' c 'de işaret değiştirmiyorsa (yani, f' c 'nin iki tarafında da pozitif veya her iki tarafında da negatif ise), f 'nin c 'de bir yerel ekstremum değeri yoktur.

Uç noktalarda, yerel ekstremum değerler için test benzerdir, fakat göz önüne alınacak yalnız bir taraf vardır.

İspat Kısım (1). f' 'nin işareti c 'de negatiften pozitifte değiştiğinden, (a, c) üzerinde $f' < 0$ ve (c, b) üzerinde $f' > 0$ olacak şekilde a ve b sayıları vardır. $x \in (a, c)$, ise $f(c) < f(x)$ dir, çünkü $f' < 0$ olması f 'nin $[a, c]$ üzerinde azalan olmasını gerektirir. $x \in (c, b)$, ise $f(c) < f(x)$ dir, çünkü $f' > 0$ olması f 'nin $[c, b]$ üzerinde artan olmasını gerektirir. Bu nedenle, her $x \in (a, b)$ için $f(x) \geq f(c)$ dir. Tanıma göre, f 'nin c 'de bir yerel minimumu vardır.

Kısım (2) ve (3) benzer şekilde ispatlanır. ■

ÖRNEK 2 Yerel Ekstremum Değerler İçin Birinci Türev Testini Kullanmak

$$f(x) = x^{1/3}(x - 4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$$

fonksiyonunun kritik noktalarını bulun. f 'nin arttığı ve azaldığı aralıkları belirleyin. Fonksiyonun yerel ve mutlak ekstremum değerlerini bulun.

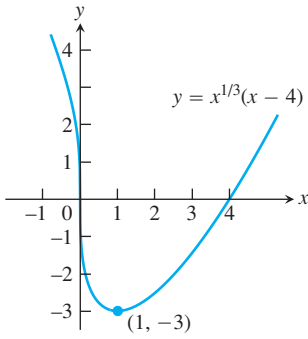
Çözüm f fonksiyonu iki sürekli fonksiyonun, $x^{1/3}$ ve $(x - 4)$ çarpımı olduğundan her x te sürekli. Birinci türev

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} (x^{4/3} - 4x^{1/3}) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \frac{4}{3}x^{-2/3}(x - 1) = \frac{4(x - 1)}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

$x = 1$ 'de sıfır ve $x = 0$ 'da tanımsızdır. Tanım kümesinde uç noktalar yoktur, dolayısıyla yalnızca $x = 0$ ve $x = 1$ kritik noktaları f 'nin herhangi bir ekstremum değerinin bulunabileceği yerlerdir.

Bu kritik noktalar x eksenini f' 'nin ya pozitif ya da negatif olduğu aralıklara böler. f' 'nin işaretlerinin şekli f 'nin kritik noktalarda ve bu noktaların arasındaki davranışını belirler. Bu bilgiyi aşağıdaki gibi bir resimle gösterebiliriz.

Aralıklar	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
f' 'nin işareti	—	—	+
f 'nin davranışı	azalan	azalan	artan



ŞEKİL 4.24 $f(x) = x^{1/3}(x - 4)$ $x < 1$ iken azalır $x > 1$ iken artar (Örnek 2).

Ortalama Değer Teoreminin üçüncü sonucu, f 'nin $(-\infty, 0)$ aralığında azaldığını, $(0, 1)$ aralığında azaldığını ve $(1, \infty)$ aralığında arttığını söyler. Yerel Ekstremum Değerler İçin Birinci Türev Testi, f 'nin $x = 0$ 'da bir ekstremum değerinin bulunmadığını (f' işaret değiştirmez) ve $x = 1$ 'de bir yerel minimumu bulunduğunu söyler (f' negatiften pozitive değişir).

Yerel minimumun değeri $f(1) = 1^{1/3}(1 - 4) = -3$ 'tür. Bu ayrıca mutlak bir minimumdur, çünkü solda, fonksiyonun değerleri bu noktaya doğru düşerler ve sağda, yükselerek bu noktadan uzaklaşır. Şekil 4.24 fonksiyonun grafiği ile bu noktayı gösterir.

$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$ olduğuna dikkat edin, dolayısıyla, f 'nin grafiğinin orijinde bir dikey teğeti vardır. ■

ALİŞTIRMALAR 4.3

f' Verildiğinde f 'yi İncelemek

Türevleri 1–8 alıştırmalarında verilen fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki soruları yanıtlayın.

- f 'nin kritik noktaları nedir?
 - f , hangi aralıklarda artandır veya azalandır?
 - Varsa, hangi noktalarda f yerel maksimum veya minimum değerler alır?
- $f'(x) = x(x - 1)$
 - $f'(x) = (x - 1)(x + 2)$
 - $f'(x) = (x - 1)^2(x + 2)$
 - $f'(x) = (x - 1)^2(x + 2)^2$
 - $f'(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$
 - $f'(x) = (x - 7)(x + 1)(x + 5)$
 - $f'(x) = x^{-1/3}(x + 2)$
 - $f'(x) = x^{-1/2}(x - 3)$

Verilen Fonksiyonların Ekstrem Değerleri

9–28 alıştırmalarında:

- Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları bulun.
 - Varsa, fonksiyonun ekstrem değerlerini belirleyin ve bu değerlerin nerede bulunduklarını söyleyin.
 - Varsa, ekstrem değerlerin hangileri mutlaktır?
- T** d. Bulduklarınızı bir hesap makinesi veya bilgisayar kullanarak destekleyin.

- $g(t) = -t^2 - 3t + 3$
- $g(t) = -3t^2 + 9t + 5$
- $h(x) = -x^3 + 2x^2$
- $h(x) = 2x^3 - 18x$
- $f(\theta) = 3\theta^2 - 4\theta^3$
- $f(\theta) = 6\theta - \theta^3$
- $f(r) = 3r^3 + 16r$
- $h(r) = (r + 7)^3$
- $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$
- $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

- $H(t) = \frac{3}{2}t^4 - t^6$
- $K(t) = 15t^3 - t^5$
- $g(x) = x\sqrt{8 - x^2}$
- $g(x) = x^2\sqrt{5 - x}$
- $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}, x \neq 2$
- $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$
- $f(x) = x^{1/3}(x + 8)$
- $g(x) = x^{2/3}(x + 5)$
- $h(x) = x^{1/3}(x^2 - 4)$
- $k(x) = x^{2/3}(x^2 - 4)$

Yarı-Açık Aralıklarda Ekstrem Değerler

29–36 alıştırmalarında:

- Varsa, fonksiyonun verilen aralıktaki ekstrem değerlerini belirleyin ve bu değerlerin nerede bulunduklarını söyleyin.
 - Varsa, ekstrem değerlerin hangileri mutlaktır?
- T** c. Bulduklarınızı bir hesap makinesi veya bilgisayar kullanarak destekleyin.

- $f(x) = 2x - x^2, -\infty < x \leq 2$
- $f(x) = (x + 1)^2, -\infty < x \leq 0$
- $g(x) = x^2 - 4x + 4, 1 \leq x < \infty$
- $g(x) = -x^2 - 6x - 9, -4 \leq x < \infty$
- $f(t) = 12t - t^3, -3 \leq t < \infty$
- $f(t) = t^3 - 3t^2, -\infty < t \leq 3$
- $h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, 0 \leq x < \infty$
- $k(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, -\infty < x \leq 0$

Hesap Makinesi veya Bilgisayarla Grafik Çizme

37–40 alıştırmalarında,

a. Varsa, fonksiyonun verilen aralıktaki ekstrem değerlerini belirleyin ve bu değerlerin nerede bulunduklarını söyleyin.

T b. Fonksiyonu ve türevini beraber çizin. f 'nin davranışını f' 'nin işaretlerine ve değerlerine bakarak açıklayın.

37. $f(x) = \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

38. $f(x) = -2 \cos x - \cos^2 x, \quad -\pi \leq x \leq \pi$

39. $f(x) = \csc^2 x - 2 \cot x, \quad 0 < x < \pi$

40. $f(x) = \sec^2 x - 2 \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Teori ve Örnekler

41 ve 42 alıştırmalarındaki fonksiyonların verilen θ değerlerinde yerel ekstrem değerleri olduğunu gösterin ve bu ekstrem değerlerin çeşidini belirleyin.

41. $h(\theta) = 3 \cos \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \theta = 0$ 'da ve $\theta = 2\pi$

42. $h(\theta) = 5 \sin \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad \theta = 0$ 'da ve $\theta = \pi$

43. $(1, 1)$ noktasından geçen türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini, $f'(1) = 0$ ve

a. $x < 1$ için $f'(x) > 0$ ve $x > 1$ için $f'(x) < 0$ ise,

b. $x < 1$ için $f'(x) < 0$ ve $x > 1$ için $f'(x) > 0$ ise,

c. $x \neq 1$ için $f'(x) > 0$ ise,

d. $x \neq 1$ için $f'(x) < 0$ ise,

çizin.

44. Türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonunun

a. $(1, 1)$ 'de yerel minimumuyla $(3, 3)$ 'te yerel maksimumu;

b. $(1, 1)$ 'de yerel maksimumuyla $(3, 3)$ 'te yerel minimumu;

c. $(1, 1)$ ve $(3, 3)$ 'te yerel maksimumları;

d. $(1, 1)$ ve $(3, 3)$ 'te yerel minimumları

varsayarak grafiğini çizin.

45. Sürekli bir $y = g(x)$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde çizin.

a. $g(2) = 2, \quad x < 2$ için $0 < g' < 1, \quad x \rightarrow 2^-$ iken $g'(x) \rightarrow 1^-$,
 $x > 2$ için $-1 < g' < 0$ ve $x \rightarrow 2^+$ iken $g'(x) \rightarrow -1^+$;

b. $g(2) = 2, \quad x < 2$ için $g' < 0, \quad x \rightarrow 2^-$ iken $g'(x) \rightarrow -\infty$,
 $x > 2$ için $g' > 0$ ve $x \rightarrow 2^+$ iken $g'(x) \rightarrow \infty$.

46. Sürekli bir $y = h(x)$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde çizin.

a. $h(0) = 0$, her x için $-2 \leq h(x) \leq 2, \quad x \rightarrow 0^-$ iken $h'(x) \rightarrow \infty$ ve
 $x \rightarrow 0^+$ iken $h'(x) \rightarrow -\infty$;

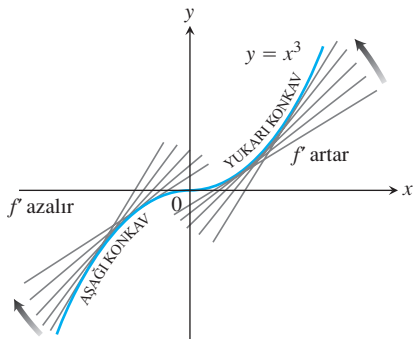
b. $h(0) = 0$, her x için $-2 \leq h(x) \leq 0, \quad x \rightarrow 0^-$ iken $h'(x) \rightarrow \infty$ ve
 $x \rightarrow 0^+$ iken $h'(x) \rightarrow -\infty$;

47. $x, c = 2$ noktasından soldan sağa doğru geçerken, $f(x) = x^3 - 3x + 2$ fonksiyonunun grafiği yükselir mi, alçalır mı? Yanıtınızı açıklayın.

48. $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ fonksiyonun arttığı ve azaldığı aralıkları bulun. Yanıtınızın nedenini açıklayın.

4.4

Konkavlık ve Eğri Çizimi



ŞEKİL 4.25 $f(x) = x^3$ 'ün grafiği $(-\infty, 0)$ aralığında aşağı konkav, $(0, \infty)$ aralığında ise yukarı konkavdır (Örnek 1a).

Bölüm 4.3'te, birinci türevin, bir fonksiyonun nerede arttığını ve nerede azaldığını nasıl söylediğini gördük. Birinci Türev Testi, türevlenebilir bir fonksiyonun bir kritik noktasında bir yerel minimum veya bir yerel maksimum değer olup olmadığını, veya burada grafiğin artmaya veya azalmaya devam ettiğini söyler.

Bu bölümde, türevlenebilir bir fonksiyonun grafiğinin nasıl büküldüğü veya döndüğü hakkında, ikinci türevin nasıl bilgi verdiğini göreceğiz. Bu ek bilgi, bir fonksiyonun ve grafiğinin davranışının ana yönlerini yakalamamızı ve sonra bu özellikleri bir grafikte göstermemizi sağlar.

Konkavlık

Şekil 4.25'te göreceğiniz gibi, $y = x^3$ eğrisi, x artarken yükselir, fakat $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralıklarıyla tanımlanan bölgelerde farklı yönlerde döner. Eğriyi izleyerek soldan orijine doğru ilerlerken, eğri bizim sağımıza doğru döner ve teğetlerinin altına düşer. $(-\infty, 0)$ aralığında teğetlerin eğimleri azalır. Eğri üzerinde, orijinden sağa doğru uzaklaşırken, eğri solumuza doğru döner ve teğetlerinin üzerinde yükselir. $(0, \infty)$ aralığında teğetlerin eğimleri artar. Bu dönme ve bükülme davranışı eğrinin *konkavlığını* belirler.

TANIM Yukarıya Konkav, Aşağıya Konkav

Türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği,

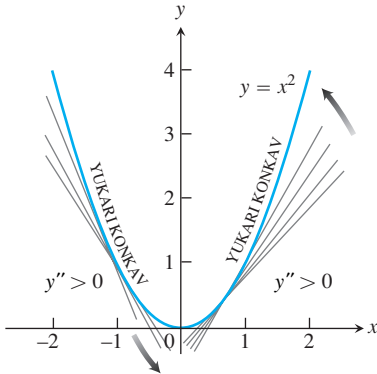
- (a) bir I açık aralığı üzerinde, f' I üzerinde artan ise, **yukarıya konkav**,
- (b) bir I açık aralığı üzerinde, f' I üzerinde azalan ise, **aşağıya konkav**,
dır.

$y = f(x)$ 'in ikinci türevi varsa, Ortalama Değer Teoreminin üçüncü sonucunu uygulayarak $f'' > 0$ ise I üzerinde f' 'nin arttığı, $f'' < 0$ ise f' 'nin azaldığı sonucunu çıkarırız.

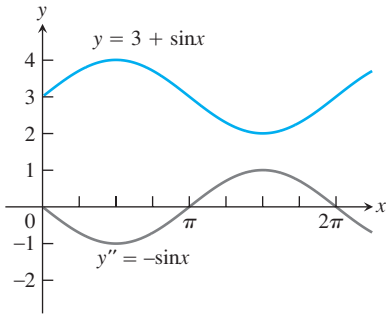
Konkavlık İçin İkinci Türev Testi

$y = f(x)$ bir I aralığında iki kere türevlenebilir olsun.

1. I üzerinde $f'' > 0$ ise, f' 'nin I 'daki grafiği yukarı konkavdır.
2. I üzerinde $f'' < 0$ ise, f' 'nin I 'daki grafiği aşağı konkavdır.



ŞEKİL 4.26 $f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiği her aralıkta yukarı konkavdır (Örnek 1b).



ŞEKİL 4.27 y' nin konkavlığının belirlenmesinde y'' grafiğinin kullanılması (Örnek 2).

$y = f(x)$ 'in ikinci türevi varsa, ikinci türevi gösterirken f'' ve y'' notasyonlarını değiştirmeli olarak kullanabiliriz.

ÖRNEK 1 Konkavlık Testini Uygulamak

- (a) $y = x^3$ eğrisi (Şekil 4.25), $y'' = 6x < 0$ olduğu $(-\infty, 0)$ aralığında aşağı konkav, $y'' = 6x > 0$ olduğu $(0, \infty)$ aralığında ise yukarı konkavdır.
- (b) $y = x^2$ eğrisi (Şekil 4.26), $y'' = 2$ daima pozitif olduğundan, $(-\infty, \infty)$ üzerinde yukarı konkavdır. ■

ÖRNEK 2 Konkavlığı Belirlemek

$y = 3 + \sin x$ 'in $[0, 2\pi)$ üzerindeki konkavlığını belirleyin.

Çözüm $y = 3 + \sin x$ 'in grafiği, $y'' = -\sin x$ 'in negatif olduğu $(0, \pi)$ aralığında aşağıya konkav, $y'' = -\sin x$ 'in pozitif olduğu $(\pi, 2\pi)$ aralığında yukarıya konkavdır (Şekil 4.27). ■

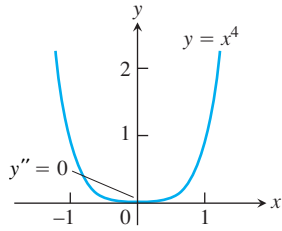
Büküm Noktaları

Örnek 2'deki $y = 3 + \sin x$ eğrisinin konkavlığı $(\pi, 3)$ noktasında değişir $(\pi, 3)$ noktasına eğrinin bir *büküm (dönüm) noktası* denir.

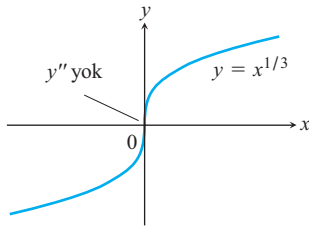
TANIM Büküm Noktası

Bir fonksiyonun teğetinin bulunduğu ve konkavlığın değiştiği noktaya **büküm noktası** denir.

Bir eğri üzerinde, bir noktanın bir tarafında y'' pozitif diğer tarafında negatif ise bu nokta eğrinin bir büküm noktasıdır. Böyle bir noktada, y'' ya sıfır (çünkü türevlerin de ara değer özelliği vardır) ya da tanımsızdır. y iki kere türevlenebilen bir fonksiyonun bir büküm noktasında $y'' = 0$ 'dır ve y' 'nin bir yerel maksimum veya minimum değeri vardır.



ŞEKİL 4.28 $y = x^4$ 'ün grafiğinin, $y'' = 0$ olmasına rağmen, orijine büküm noktası yoktur (Örnek 3).



ŞEKİL 4.29 y'' 'nin bulunmadığı bir noktada büküm noktası olabilir (Örnek 4).

ÖRNEK 3 $y'' = 0$ Olduğu Bir Noktada Büküm Noktası Bulunmayabilir

$y = x^4$ eğrisinin $x = 0$ 'da büküm noktası yoktur (Şekil 4.28). O noktada $y'' = 12x^2$ sıfır olduğu halde, işaret değiştirmez. ■

ÖRNEK 4 y'' 'nin Bulunmadığı Bir Noktada Büküm Noktası Bulunabilir

$y = x^{1/3}$ eğrisinin $x = 0$ 'da bir büküm noktası vardır (Şekil 4.29), fakat o noktada y'' yoktur.

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2} \left(x^{1/3} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} x^{-2/3} \right) = -\frac{2}{9} x^{-5/3}.$$

Örnek 3'ten, ikinci türevin sıfır olduğu bir noktada her zaman bir büküm noktasının bulunmayabileceğini gördük. Örnek 4'ten, ikinci türevin bulunmadığı noktalarda da büküm noktalarının bulunabileceğini gördük.

Bir doğru üzerinde, zamanın bir fonksiyonu olarak hareket eden bir cismin hareketini incelemek için, genellikle cismin, ikinci türevle verilen, ivmesinin nerede pozitif ve nerede negatif olduğunu bilmekle ilgileniriz. Cismin konum fonksiyonunun grafiği üzerindeki büküm noktaları, ivmenin işaret değiştirdiği noktaları gösterir.

ÖRNEK 5 Bir Doğru Boyunca Hareketi İncelemek

Bir parçacık, yatay bir doğru üzerinde

$$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5, \quad t \geq 0$$

konum fonksiyonu ile hareket etmektedir. Hızı ve ivmeyi bulun ve parçacığın hareketini tanımlayın.

Çözüm Hız,

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 28t + 22 = 2(t - 1)(3t - 11)$$

ve ivme

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 12t - 28 = 4(3t - 7)$$

dir. $s(t)$ fonksiyonu artarken, parçacık sağa doğru gider; $s(t)$ azalırken, parçacık sola doğru gider.

$t = 1$ ve $t = 11/3$ iken birinci türev'in ($v = s'$) sıfır olduğuna dikkat edin.

Aralıklar	$0 < t < 1$	$1 < t < 11/3$	$11/3 < t$
$v = s'$ 'ün işareti	+	-	+
s' 'nin davranışı	artan	azalan	artan
Parçacığın hareketi	sağa	sola	sağa

Parçacık, $[0, 1)$ ve $(11/3, \infty)$ zaman aralıklarında sağa, $(1, 11/3)$ aralığında sola gider. $t = 1$ ve $t = 11/3$ te, bir an için durmaktadır.

$t = 7/3$ iken, $a(t) = s''(t) = 4(3t - 7)$ ivmesi sıfırdır.

Aralıklar	$0 < t < 7/3$	$7/3 < t$
$a = s''$ 'nin işareti	-	+
s' 'nin grafiği	aşağı konkav	yukarıya konkav

İvme kuvvetinin yönü, $[0, 7/3]$ zaman aralığında sola doğru, $t = 7/3$ te bir anlık sıfır ve bundan sonra sağa doğrudur. ■

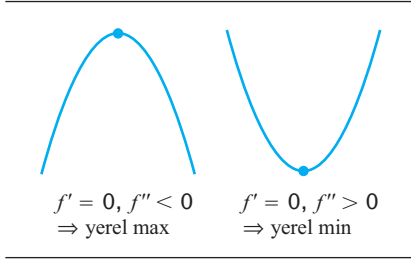
Yerel Ekstremler İçin İkinci Türev Testi

Bir kritik noktada f' 'nin işaret değişikliklerine bakmak yerine, bazen bir yerel ekstremum değer varlığını ve karakterini belirlemede aşağıdaki testi kullanabiliriz.

TEOREM 5 Yerel Ekstremler İçin İkinci Türev Testi

f'' 'nin $x = c$ 'yi içeren bir açık aralıkta sürekli olduğunu varsayın.

1. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) < 0$ ise, f 'nin $x = c$ 'de bir yerel maksimumu vardır.
2. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) > 0$ ise, f 'nin $x = c$ 'de bir yerel minimumu vardır.
3. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) = 0$ ise, test sonuç vermez. Fonksiyonun bir yerel maksimumu, bir yerel minimumu bulunabilir veya hiçbiri bulunmayabilir.



İspat Kısım (1). $f''(c) < 0$ ise, f'' sürekli olduğundan, c 'yi içeren bir I açık aralık üzerinde $f''(x) < 0$ dir. Bu nedenle, I üzerinde f' azalır. $f'(c) = 0$ olduğundan, c 'de f' 'nin işareti pozitiften negatif değişir ve dolayısıyla Birinci Türev Testine göre f 'nin c 'de bir yerel maksimumu vardır.

Kısım (2)'nin ispatı benzerdir.

Kısım (3) için, $y = x^4$, $y = -x^4$ ve $y = x^3$ fonksiyonlarını düşünün. Her bir fonksiyon için birinci ve ikinci türevler $x = 0$ da sıfırdır. $y = x^4$ fonksiyonunun bu noktada bir yerel minimumu, $y = -x^4$ fonksiyonunun bir yerel maksimumu vardır ve $y = x^3$ fonksiyonu $x = 0$ 'ı içeren her açık aralıkta artandır (burada ne bir maksimumu ne de bir minimumu vardır). Böylece, test sonuç vermez.

Bu test, c 'yi içeren bir aralıkta değil *sadece c 'nin kendisinde* f'' yü bilmemizi gerektirir.

Bu, testi uygulamayı kolaylaştırır. Bu iyi haberdır. Kötü haber şudur: $f'' = 0$ veya c 'de f'' yoksa test sonuçsuzdur. Bu durumda yerel ekstremum değerler için Birinci Türev Testi'ni kullanın.

f' ve f'' birlikte, fonksiyonun grafiğinin şeklini, yani, kritik noktaların nerede oldukları ve bir kritik noktada ne olduğunu, fonksiyonun nerede arttığını ve nerede azaldığını ve konkavlığı ile tanımlandığı gibi, eğrinin nasıl döndüğünü ve büküldüğünü söylerler. Bu bilgileri, fonksiyonun, başlıca özelliklerini gösteren, bir grafiğini çizmek için kullanırız.

ÖRNEK 6 f 'nin Grafiğini Çizmek İçin f' ve f'' 'nü Kullanmak

Aşağıdaki adımları kullanarak

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$$

fonksiyonunun bir grafiğini çizin.

- (a) f 'nin ekstremumlarının nerelerde olduklarını belirleyin.
- (b) f 'nin artan olduğu aralıkları ve azalan olduğu aralıkları bulun.
- (c) f 'nin grafiğinin nerede yukarıya konkav ve nerede aşağıya konkav olduğunu bulun.
- (d) f 'nin grafiğinin genel bir şeklini çizin
- (e) Yerel maksimum ve minimum noktalar, büküm noktaları ve eğrinin eksenleri kestiği noktalar gibi özel bazı noktaları işaretleyin.

Çözüm $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ var olduğundan f sürekli. f 'nin tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ 'dur, ayrıca f'' 'nin tanım kümesi de $(-\infty, \infty)$ dur. Böylece, f 'nin kritik noktaları sadece f' 'nin sıfırlarında görülür.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

olduğundan, birinci türev $x = 0$ ve $x = 3$ 'te sıfırdır.

Aralıklar	$x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
f' 'nin işareti	–	–	+
f 'nin davranışı	azalan	azalan	artan

- (a) Yerel ekstremumlar için Birinci Türev Testini ve yukarıdaki tabloyu kullanarak, $x = 0$ 'da bir yerel ekstremum bulunmadığını ve $x = 3$ 'te bir yerel minimum bulunduğunu görürüz.
- (b) Yukarıdaki tabloyu kullanarak, f 'nin, $(-\infty, 0]$ ve $[0, 3]$ üzerinde azalan ve $[3, \infty)$ üzerinde artan olduğunu görürüz.
- (c) $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$, $x = 0$ ve $x = 2$ 'de sıfırdır.

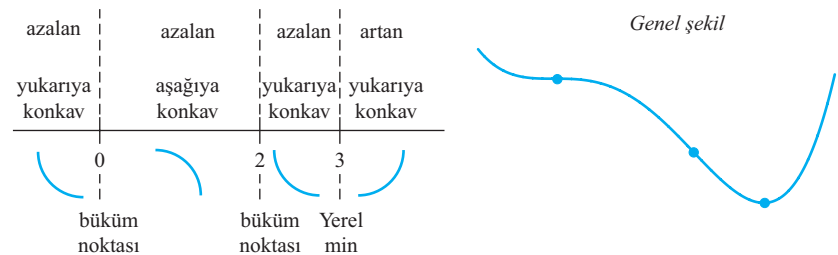
Aralıklar	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
f'' 'nin işareti	+	–	+
f 'nin davranışı	yukarıya konkav	aşağıya konkav	yukarıya konkav

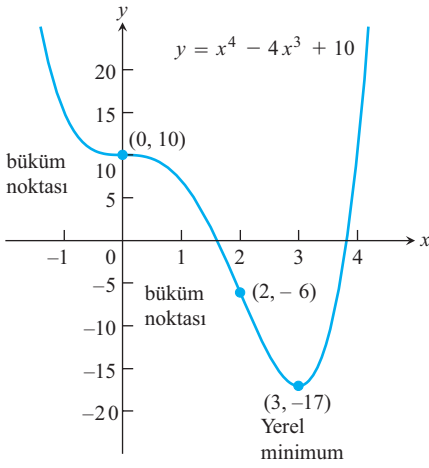
f 'nin, $(-\infty, 0)$ ve $(2, \infty)$ aralıklarında yukarıya konkav, $(0, 2)$ aralığında aşağıya konkav olduğunu görürüz.

- (d) Yukarıda iki tablodaki bilgileri özetleyerek şunları elde ederiz;

$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x$
azalan	azalan	azalan	artan
yukarıya konkav	aşağıya konkav	yukarıya konkav	yukarıya konkav

Eğrinin genel şekli şöyledir;





ŞEKİL 4.30 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ 'un grafiği (Örnek 6).

- (e) Eğrinin eksenleri kestiği noktaları (mümkünse), y' ve y'' 'nin sıfır olduğu noktaları çizin. Ekstremum değerleri ve büküm noktalarını gösterin. Eğriyi çizmek için genel şekli bir kılavuz olarak kullanın. (Gerektiğinde ilave noktalar çizin.) Şekil 4.30 f' 'nin grafiğini göstermektedir. ■

Örnek 6'daki adımlar, bir fonksiyonun ve grafiğinin başlıca özelliklerinin ortaya koyan grafik çiziminde bir prosedür vermesi bakımından yardımcı olurlar.

$y = f(x)$ Grafiğini Çizme Stratejisi

1. f' 'nin tanım kümesini ve olabilecek simetrileri belirleyin
2. y' ve y'' 'nü bulun.
3. f' 'nin kritik noktalarını bulun ve her birinde fonksiyonun davranışını belirleyin
4. Eğrinin nerede arttığını ve nerede azaldığını bulun.
5. Büküm noktalarını (varsa) bulun ve eğrinin konkavlığını belirleyin.
6. Asimptotları tanımlayın.
7. Eksenleri kesim noktalarını ve 3–5 adımlarında bulunanlar gibi, özel noktaları işaretleyin ve eğriyi çizin.

ÖRNEK 7 Grafik çizme Stratejisini Kullanmak

$f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$ 'in grafiğini çizin.

Çözüm

1. f' 'nin tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ dur ve eksenlere veya orijine göre simetri yoktur (Bölüm 1.4).
2. f' ve f'' 'nü bulun.

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1+x^2) \cdot 2(x+1) - (x+1)^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2 \cdot 2(-2x) - 2(1-x^2)[2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

x -kesim $x = -1$ 'de,
 y -kesim $(y = 1) x = 0$ da

Kritik noktalar:
 $x = -1, x = 1$

Biraz hesaptan sonra

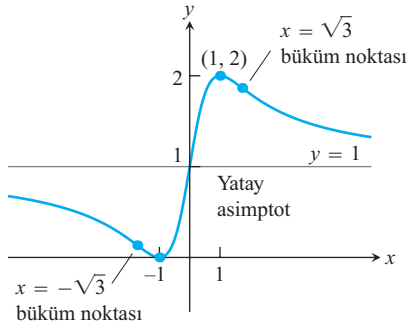
3. *Kritik noktalarda davranış.* f' , tanım kümesinin her yerinde tanımlı olduğundan, kritik noktalar yalnızca $f'(x) = 0$ olduğu $x = \pm 1$ noktalarındadır (Adım 2). $f''(-1) = 1 > 0$ olduğundan İkinci Türev Testine göre $x = -1$ de, bir yerel minimum vardır. $f''(1) = -1 < 0$ olduğundan İkinci Türev Testine göre $x = 1$ de, bir yerel maksimum vardır. Adım 6 da, ikisinin de aynı zamanda mutlak ekstremum olduklarını göreceğiz.

4. *Artanlık ve azalanlık.* $(-\infty, -1)$ aralığında $f'(x) < 0$ olduğunu ve eğrinin azalan olduğunu görürüz. $(-1, 1)$ aralığında, $f'(x) > 0$ dır ve eğri artandır; $(1, \infty)$ aralığında tekrar $f'(x) < 0$ dır ve azalandır.
5. *Büküm noktaları.* İkinci türevin paydasının (Adım 2) daima pozitif olduğuna dikkat edin. İkinci türev, f'' , $x = -\sqrt{3}, 0$ ve $\sqrt{3}$ 'te sıfır olur. İkinci türev bu noktaların her birinde işaret değiştirir: $(-\infty, -\sqrt{3})$ üzerinde negatif, $(-\sqrt{3}, 0)$ üzerinde pozitif, $(0, \sqrt{3})$ üzerinde negatif ve $(\sqrt{3}, \infty)$ üzerinde tekrar pozitifdir. Böylece, her nokta bir büküm noktasıdır. Eğri, $(-\infty, -\sqrt{3})$ üzerinde aşağıya konkav, $(-\sqrt{3}, 0)$ üzerinde yukarıya konkav, $(0, \sqrt{3})$ üzerinde aşağıya konkav ve $(\sqrt{3}, \infty)$ üzerinde tekrar yukarıya konkavdır.
6. *Asimptotlar.* $f(x)$ 'in payını açarak ve sonra pay ve paydayı x^2 ile bölerek

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x+1)^2}{1+x^2} = \frac{x^2 + 2x + 1}{1+x^2} && \text{Payı açmak} \\ &= \frac{1 + (2/x) + (1/x^2)}{(1/x^2) + 1}. && x^2 \text{ ile bölmek} \end{aligned}$$

elde edilir. $x \rightarrow \infty$ iken $f(x) \rightarrow 1^+$ ve $x \rightarrow -\infty$ iken $f(x) \rightarrow 1^-$ olduğunu görürüz. Böylece $y = 1$ doğrusu yatay asimptottur.

f , $(-\infty, -1)$ üzerinde azaldığından ve sonra $(-1, 1)$ üzerinde arttığından, $f(-1) = 0$ 'ın bir yerel minimum olduğunu biliyoruz. f , $(1, \infty)$ üzerinde azalmasına rağmen bu aralık üzerinde $y = 1$ yatay asimptotunu asla kesmez (asimptota üstten yaklaşır). Grafik asla negatif olmadığından, aynı $f(-1) = 0$ zamanda bir mutlak minimumdur. Benzer şekilde, $f(1) = 2$ bir mutlak maksimumdur çünkü grafik $(-\infty, -1)$ üzerinde alttan yaklaştığı $y = 1$ yatay asimptotunu asla kesmez. Bu nedenle, dikey asimptotlar yoktur (f 'nin değer kümesi $0 \leq y \leq 2$ dir).



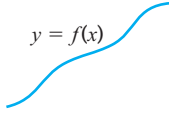
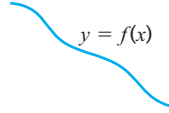
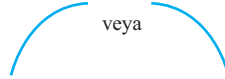
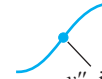
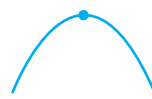
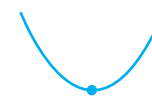
ŞEKİL 4.31 $y = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$ 'in grafiği

(Örnek 7).

7. f 'nin grafiği Şekil 4.31'de çizilmiştir. $x \rightarrow -\infty$ iken $y = 1$ yatay asimptotuna yaklaşan grafiğin, nasıl aşağıya konkav olduğuna ve $x \rightarrow \infty$ iken $y = 1$ 'e yaklaşımında nasıl yukarıya konkav olduğuna dikkat edin. ■

Türevlerden Fonksiyonlar Hakkında Bilgi Edinmek

Örnek 6 ve 7'de gördüğümüz gibi, iki defa türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonu hakkında neredeyse gereken her şeyi, birinci türevini inceleyerek öğrenebiliriz. Grafiğin nerede yükselip alçaldığını ve yerel ekstremum değerlerin nerede olduklarını bulabiliriz. Yükselme ve alçalma aralıklarını geçerken grafiğin nasıl büküldüğünü öğrenmek için y' 'nin türevini alabiliriz. Fonksiyonun grafiğinin şeklini belirleyebiliriz. Türevden elde edemeyeceğimiz tek bilgi grafiği xy -düzlemine nasıl yerleştireceğimizdir. Fakat Bölüm 4.2'de gördüğümüz gibi, grafiği yerleştirmek için gerekli olan tek ek bilgi f 'nin bir noktadaki değeridir. Türev, limitler kullanılarak bulunan asimptotlar hakkında bize bilgi vermez (Bölüm 2.4 ve 2.5).

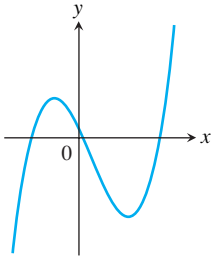
 $y = f(x)$ Türevlenebilir $\Rightarrow$ düzgün, bağlantılı; yükselip alçalabilir	 $y = f(x)$ $y' > 0 \Rightarrow$ soldan sağa doğru yükselir; dalgalı olabilir.	 $y = f(x)$ $y' < 0 \Rightarrow$ soldan sağa doğru alçalır; dalgalı olabilir.
 veya $y'' > 0 \Rightarrow$ yukarı konkav; dalga yok; grafik yükselip alçalabilir	 veya $y'' < 0 \Rightarrow$ aşağı konkav; dalga yok; grafik yükselip alçalabilir	 y'' işaret değiştirir büküm noktası
 veya y' işaret değiştirir $\Rightarrow$ yerel maksimum veya yerel minimum	 bir noktada $y' = 0$ ve $y'' < 0$; Yerel maksimum	 bir noktada $y' = 0$ ve $y'' > 0$; Yerel minimum

ALİŞTIRMALAR 4.4

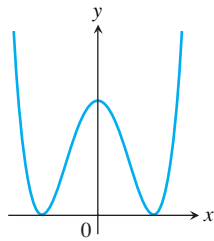
Grafikleri Çizilmiş Fonksiyonları İncelemek

1–8 alıştırmalarında grafikleri verilen fonksiyonların büküm noktalarını, yerel maksimum ve minimumlarını belirleyin. Fonksiyonların aşağı konkav ve yukarı konkav oldukları aralıkları belirleyin.

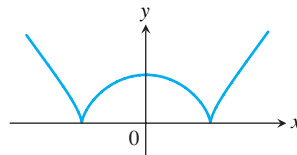
1. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$



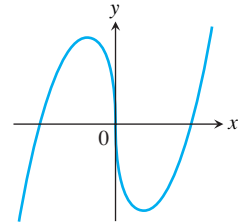
2. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$



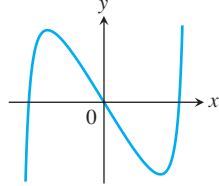
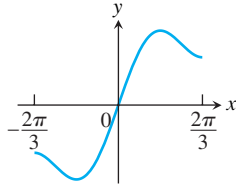
3. $y = \frac{3}{4}(x^2 - 1)^{2/3}$



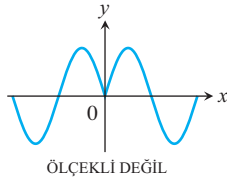
4. $y = \frac{9}{14}x^{1/3}(x^2 - 7)$



5. $y = x + \sin 2x, -\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ 6. $y = \tan x - 4x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

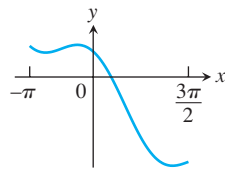


7. $y = \sin |x|, -2\pi \leq x \leq 2\pi$



ÖLÇEKLİ DEĞİL

8. $y = 2 \cos x - \sqrt{2}x, -\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$



Denklemlerin Grafiklerini Çizmek

Sayfa 272'deki grafik çizme yönteminin adımlarını izleyerek 9–40 alıştırmalarındaki denklemlerin grafiğini çizin. Bütün yerel ekstremum ve büküm noktalarının koordinatlarını belirtin.

9. $y = x^2 - 4x + 3$
10. $y = 6 - 2x - x^2$
11. $y = x^3 - 3x + 3$
12. $y = x(6 - 2x)^2$
13. $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$
14. $y = 1 - 9x - 6x^2 - x^3$
15. $y = (x - 2)^3 + 1$
16. $y = 1 - (x + 1)^3$
17. $y = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$
18. $y = -x^4 + 6x^2 - 4 = x^2(6 - x^2) - 4$
19. $y = 4x^3 - x^4 = x^3(4 - x)$
20. $y = x^4 + 2x^3 = x^3(x + 2)$
21. $y = x^5 - 5x^4 = x^4(x - 5)$
22. $y = x\left(\frac{x}{2} - 5\right)^4$
23. $y = x + \sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$
24. $y = x - \sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$
25. $y = x^{1/5}$
26. $y = x^{3/5}$
27. $y = x^{2/5}$
28. $y = x^{4/5}$
29. $y = 2x - 3x^{2/3}$
30. $y = 5x^{2/5} - 2x$
31. $y = x^{2/3}\left(\frac{5}{2} - x\right)$
32. $y = x^{2/3}(x - 5)$
33. $y = x\sqrt{8 - x^2}$
34. $y = (2 - x^2)^{3/2}$
35. $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}, x \neq 2$
36. $y = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$
37. $y = |x^2 - 1|$
38. $y = |x^2 - 2x|$
39. $y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$
40. $y = \sqrt{|x - 4|}$

y' Biliniyorsa Genel Şekli Çizmek

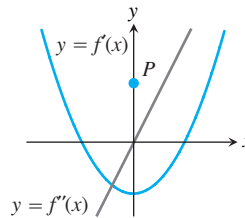
41–62 alıştırmalarının her biri sürekli bir $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevini vermektedir. y'' 'nü bulun ve sayfa 214'teki grafik çizme yönteminin 2–4 adımlarını kullanarak f 'nin grafiğinin genel şeklini bulun.

41. $y' = 2 + x - x^2$
42. $y' = x^2 - x - 6$
43. $y' = x(x - 3)^2$
44. $y' = x^2(2 - x)$
45. $y' = x(x^2 - 12)$
46. $y' = (x - 1)^2(2x + 3)$
47. $y' = (8x - 5x^2)(4 - x)^2$
48. $y' = (x^2 - 2x)(x - 5)^2$
49. $y' = \sec^2 x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
50. $y' = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
51. $y' = \cot \frac{\theta}{2}, 0 < \theta < 2\pi$
52. $y' = \csc^2 \frac{\theta}{2}, 0 < \theta < 2\pi$
53. $y' = \tan^2 \theta - 1, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
54. $y' = 1 - \cot^2 \theta, 0 < \theta < \pi$
55. $y' = \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$
56. $y' = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$
57. $y' = (x + 1)^{-2/3}$
58. $y' = (x - 2)^{-1/3}$
59. $y' = x^{-2/3}(x - 1)$
60. $y' = x^{-4/5}(x + 1)$
61. $y' = 2|x| = \begin{cases} -2x, & x \leq 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$
62. $y' = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

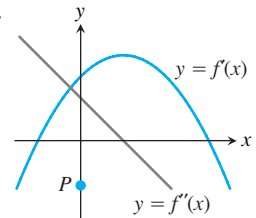
y' ve y'' Grafiklerinden y'yi Çizmek

63–66 alıştırmalarının her birinde bir $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevlerinin grafikleri verilmektedir. Resmi kopyalayın ve P noktasından geçmek üzere, f 'nin yaklaşık grafiğini çizin.

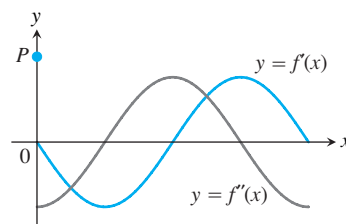
63.

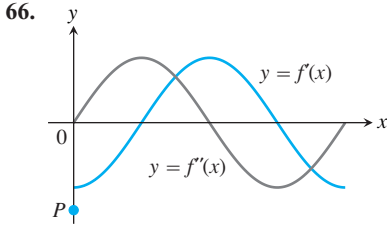


64.



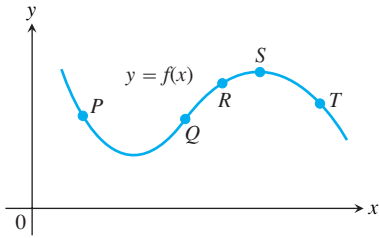
65.





Teori ve Örnekler

67. Aşağıdaki şekil iki kere türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin bir parçasını göstermektedir. İşaretlenmiş beş noktada y' ve y'' 'nü pozitif, negatif veya sıfır olarak belirleyin.



68. Aşağıda verilenlerle düzgün birleştirilmiş bir $y = f(x)$ grafiği çizin.

$$\begin{array}{ll} f(-2) = 8, & f'(2) = f'(-2) = 0, \\ f(0) = 4, & |x| < 2 \text{ için } f'(x) < 0 \\ f(2) = 0, & x < 0 \text{ için } f''(x) < 0 \\ |x| > 2 \text{ için } f'(x) > 0 & x > 0 \text{ için } f''(x) > 0 \end{array}$$

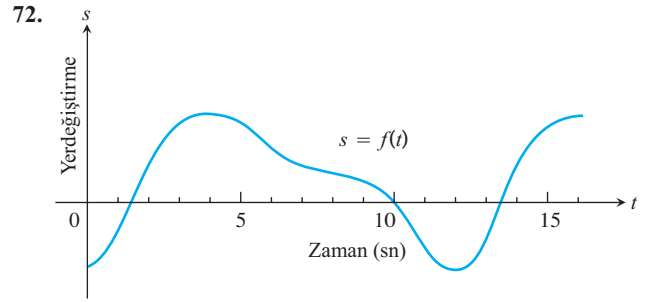
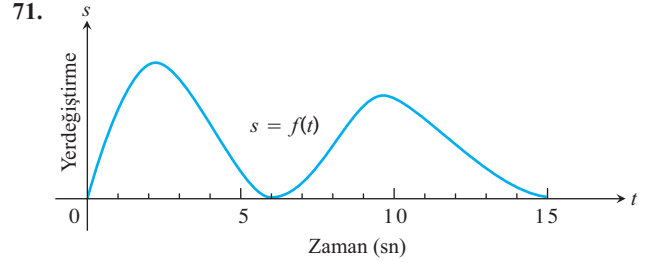
69. Aşağıda verilenlerle iki kere türevlenebilen bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizin. Mümkün olduğu yerde koordinatları belirtin.

x	y	Türevler
$x < 2$		$y' < 0, y'' > 0$
2	1	$y' = 0, y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0, y'' > 0$
4	4	$y' > 0, y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0, y'' < 0$
6	7	$y' = 0, y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0, y'' < 0$

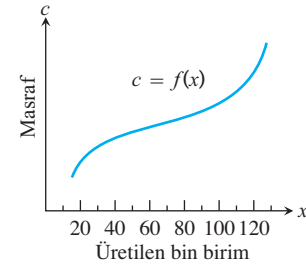
70. $(-2, 2)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ ve $(2, 2)$ noktalarından geçen ve ilk iki türevi aşağıdaki işaret şekillerine uyan iki kere türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizin.

$$\begin{array}{l} y': \quad + \quad - \quad 0 \quad + \quad - \\ \quad \quad -2 \quad 0 \quad 2 \\ y'': \quad - \quad + \quad - \\ \quad \quad -1 \quad 1 \end{array}$$

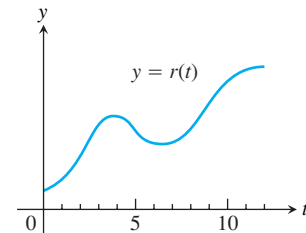
Bir Doğru Boyunca Hareket 71 ve 72 alıştırmalarındaki grafiklerde bir koordinat doğrusu üzerinde ileri geri ilerleyen bir cismin $s = f(t)$ konumu görülmektedir. (a) Cisim ne zaman orijinden uzaklaşır, ne zaman orijine yaklaşır? Yaklaşık hangi anlarda (b) hız sıfıra eşittir? (c) ivme sıfıra eşittir? (d) İvme ne zaman pozitif, ne zaman negatiftir?



73. **Marjinal maliyet** Aşağıdaki grafik x adet mal üretmenin $c = f(x)$ hayali masrafını göstermektedir. Yaklaşık hangi üretim seviyesinde marjinal masraf azalmayı bırakıp artmaya başlar?



74. Aşağıdaki grafik Widget Şirketi'nin son 12 yıl içindeki aylık kazancını göstermektedir? Yaklaşık olarak hangi zaman aralıklarında marjinal kazanç artmakta, hangilerinde azalmaktadır?



75. $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi

$$y' = (x - 1)^2(x - 2)$$

olduğunu varsayın. Varsa, hangi noktalarda f 'nin grafiğinin yerel bir minimumu, yerel bir maksimumu veya bir büküm noktası vardır? (Yol gösterme: y' için işaret tablosu çizin.)

76. $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi

$$y' = (x - 1)^2(x - 2)(x - 4)$$

olduğunu varsayın. Varsa, hangi noktalarda f 'nin grafiğinin yerel bir minimumu, yerel bir maksimumu veya bir büküm noktası vardır?

77. $x > 0$ için, $f(1) = 0$ ve $f'(x) = 1/x$ olan bir $y = f(x)$ eğrisi çizin. Böyle bir eğrinin konkavlığı hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

78. Hiçbir yerde sıfır olmayan sürekli bir ikinci türeve sahip olan bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

79. b , c ve d birer sabitse, hangi b değerinde $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ eğrisinin $x = 1$ 'de bir büküm noktası vardır? Yanıtınızı açıklayın.

80. **Yatay teğetler** Doğru mu, yanlış mı? Açıklayın.

- a. Çift mertebeli (en büyük üssü çift) her polinomun grafiğinin en az bir yatay teğeti vardır.
- b. Tek mertebeli (en büyük üssü tek) her polinomun grafiğinin en az bir yatay teğeti vardır.

81. **Paraboller**

- a. $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ parabolünün tepe noktasının koordinatlarını bulun.
- b. Parabol ne zaman yukarı konkav, ne zaman aşağı konkavdır? Yanıtınızı açıklayın.

82. İki kere türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin konkavlığının her $f''(x) = 0$ olduğunda değiştiği doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.

83. **Kuadratik eğriler** Bir $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ kuadratik eğrisinin büküm noktaları hakkında ne söyleyebilirsiniz? Yanıtınızı açıklayın.

84. **Kübik eğriler** Bir $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$ kübik eğrisinin büküm noktaları hakkında ne söyleyebilirsiniz? Yanıtınızı açıklayın.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

85–88 alıştırmaalarında, fonksiyonunun grafiği üzerindeki (varsa) büküm noktalarını ve fonksiyonun bir yerel minimum veya bir yerel maksimum değerinin bulunduğu noktaların koordinatlarını bulun. Sonra bu noktaların hepsinin aynı anda görülebileceği kadar büyük bir bölgede fonksiyonun grafiğini çizin. Çiziminize fonksiyonun birinci ve ikinci türevlerini de ekleyin. Bu grafiklerin x -eksenini kestikleri değerler ile fonksiyonun grafiği arasında nasıl bir ilişki vardır? Türevlerin grafikleri başka hangi yönlerden fonksiyonun grafiğiyle ilişkilidir?

85. $y = x^5 - 5x^4 - 240$

86. $y = x^3 - 12x^2$

87. $y = \frac{4}{5}x^5 + 16x^2 - 25$

88. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 20$

89. $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ fonksiyonunu ve ilk iki türevini birlikte çizin. f' ve f'' 'nin işaretleri ve değerlerine bağlı olarak f fonksiyonunun davranışını yorumlayın.

90. $f(x) = x \cos x$ fonksiyonunu ve ikinci türevini $0 \leq x \leq 2\pi$ aralığında birlikte çizin. f'' 'nin işaretleri ve değerlerine bağlı olarak f fonksiyonunun davranışını yorumlayın.

91. a. Ortak bir ekranda, $k = 0$ ve civarındaki negatif ve pozitif değerler için $f(x) = x^3 + kx$ fonksiyonunu çizin. k 'nin değeri grafiğin şeklini nasıl etkilemektedir?

b. $f'(x)$ 'i bulun. Göreceğiniz gibi, $f'(x)$ x 'in kuadratik bir fonksiyonudur. Bu kuadratik denklemin diskriminantını bulun ($ax^2 + bx + c$ 'nin diskriminantı $b^2 - 4ac$ 'dir). Hangi k değerlerinde diskriminant pozitif, hangilerinde sıfır veya negatiftir? Hangi k değerlerinde f'' 'nin iki sıfırı ya da tek sıfırı vardır, hangilerinde hiç sıfırı yoktur? Şimdi k değerlerinin f fonksiyonunun grafiğinin şekliyle olan ilişkilerini açıklayın.

c. Başka k değerlerini deneyin. $k \rightarrow -\infty$ ve $k \rightarrow \infty$ iken ne olur?

92. a. Ortak bir ekranda, $k = -4$ ve civarındaki değerler için $f(x) = x^4 + kx^3 + 6x^2$, $-2 \leq x \leq 2$ fonksiyonunu çizin. k 'nin değeri grafiğin şeklini nasıl etkilemektedir?

b. $f''(x)$ 'i bulun. Göreceğiniz gibi, $f''(x)$ x 'in kuadratik bir fonksiyonudur. Bu kuadratik denklemin diskriminantını bulun (Alıştırma 91(b)'ye bakın). Hangi k değerlerinde diskriminant pozitif, hangilerinde sıfır veya negatiftir? Hangi k değerlerinde $f''(x)$ 'in iki sıfırı ya da tek sıfırı vardır, hangilerinde hiç sıfırı yoktur? Şimdi k değerlerinin f fonksiyonunun grafiğinin şekliyle olan ilişkilerini açıklayın.

93. a. $y = x^{2/3}(x^2 - 2)$ fonksiyonunu $-3 \leq x \leq 3$ aralığında çizin. Ekranda konkavlık, yükselme ve alçalma ile ilgili gördüklerinizi analiz kullanarak doğrulayın (Grafik çizicinize bağlı olarak, x 'in negatif değerlerinde bir çizim elde etmek için $x^{2/3}$ 'ü $(x^2)^{1/3}$ olarak yazmak zorunda kalabilirsiniz).

b. Eğrinin $x = 0$ 'da bir sivri ucu mu, yoksa sadece sağdan ve soldan türevleri farklı olan bir köşesi mi vardır?

94. a. $y = 9x^{2/3}(x - 1)$ fonksiyonunu $-0.5 \leq x \leq 1.5$ aralığında çizin. Ekranda konkavlık, yükselme ve alçalma ile ilgili gördüklerinizi analiz kullanarak doğrulayın. Orijinin soluna doğru eğrinin konkavlığı nedir? (Grafik çizicinize bağlı olarak, x 'in negatif değerlerinin bir çizimini elde etmek için $x^{2/3}$ 'ü $(x^2)^{1/3}$ olarak yazmak zorunda kalabilirsiniz).

b. Eğrinin $x = 0$ 'da bir sivri ucu mu, yoksa sadece sağdan ve soldan türevleri farklı olan bir köşesi mi vardır?

95. $y = x^2 + 3 \sin 2x$ eğrisinin $x = -3$ civarında yatay bir teğeti var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

4.5

Uygulamalı Optimizasyon Problemleri

Bir şeyi optimize etmek demek onu bir yönden minimize veya maksimize etmek demektir. Çevresi sabit olan maksimum alanlı bir dikdörtgenin boyutları nedir? Silindirik bir kutu için en ucuz şekil nedir? En karlı üretim veriminin boyutu nedir? Diferansiyel hesap, bir fonksiyonun maksimizasyonunu veya minimizasyonunu isteyen problemlerin çözümü için güçlü bir araçtır. Bu bölümde, iş hayatından, matematikten fizik ve ekonomiden çeşitli optimizasyon problemler çözüyoruz.

İş ve Endüstriden Örnekler

ÖRNEK 1 Bir Kutu Üretmek

Üstü açık bir kutu 12×12 inç²'lik bir teneke levhanın köşelerinden eş büyüklükte küçük kareler kesilip, kenarları kıvrılarak yapılacaktır. Kutunun mümkün olduğunca fazla şey alabilmesi için köşelerden kesilen kareler ne büyüklükte olmalıdır?

Çözüm İşe bir resimle başlarız (Şekil 4.32). Şekilde, kenar karelerinin köşeleri x inçtir. Kutunun hacmi bu değişkenin bir fonksiyonudur:

$$V(x) = x(12 - 2x)^2 = 144x - 48x^2 + 4x^3 \quad V = hbw$$

Teneke levhanın kenarları sadece 12 inç uzunluğunda olduğu için, $x \leq 6$ ve V 'nin tanım aralığı $0 \leq x \leq 6$ aralığı olur.

V 'nin grafiği (Şekil 4.33) $x = 0$ 'da ve $x = 6$ 'da 0 değerli birer minimum ve $x = 2$ yakınında bir maksimum olduğunu gösterir. Daha fazlasını öğrenmek için, V 'nin x 'e göre birinci türevini inceleriz:

$$\frac{dV}{dx} = 144 - 96x + 12x^2 = 12(12 - 8x + x^2) = 12(2 - x)(6 - x).$$

$x = 2$ ve $x = 6$ köklerinden, sadece $x = 2$ fonksiyonun değer aralığında bulunur ve kritik nokta listesini oluşturur. Bu tek kritik noktada ve iki uç noktada V 'nin değerleri şöyledir:

$$\text{Kritik nokta değeri: } V(2) = 128$$

$$\text{Uç nokta değerleri: } V(0) = 0, \quad V(6) = 0.$$

Maksimum hacim 128 inç³ olur. Kesilen karelerin bir kenarı 2 inç olmalıdır. ■

ÖRNEK 2 Randımanlı Bir Silindirik Kutu Tasarlamak

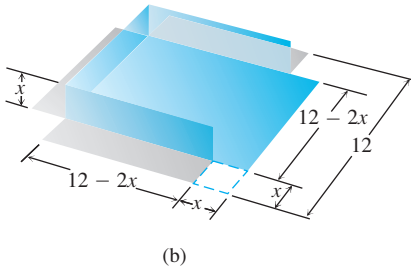
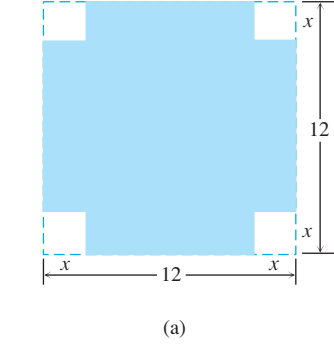
Bir dik silindir şeklinde bir 1 litrelik kutu yapmanız isteniyor (Şekil 4.34). Hangi boyutlarda en az malzeme kullanılır?

Çözüm Kutunun hacmi: r ve h santimetre olarak ölçülürse, kutunun hacmi cm^3 olarak

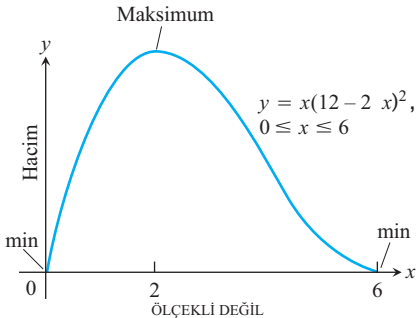
$$\pi r^2 h = 1000 \quad 1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$$

olur.

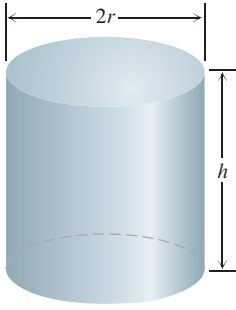
$$\text{Kutunun yüzey alanı: } A = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{daireesel tabanlar}} + \underbrace{2\pi rh}_{\text{daireesel duvar}}$$



ŞEKİL 4.32 Kare şeklindeki ince bir teneke levhanın köşeleri kesilerek yapılan açık kutu. Hacmi maksimize eden köşe ölçüleri nedir (Örnek 1)?



ŞEKİL 4.33 Şekil 4.32'deki kutunun hacminin, x 'in fonksiyonu olarak grafiği



ŞEKİL 4.34 Bu 1 litrelik kutu $h = 2r$ olduğunda en az malzeme gerektirir (Örnek 2).

“En az malzeme” terimini nasıl yorumlayacağız? Bir olasılık malzemenin kalınlığını ve üretimdeki artıkları göz ardı etmektir. Bu durumda, $\pi r^2 h = 1000$ koşulunu sağlayan ve toplam yüzey alanını olabildiğince küçük yapan r ve h boyutlarını ararız.

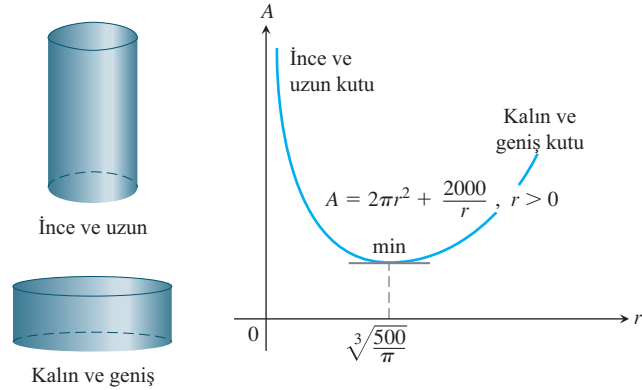
Yüzey alanını tek değişkenin fonksiyonu olarak ifade etmek için, $\pi r^2 h = 1000$ den bir değişkeni çözer ve bunu yüzey alanı formülünde yerine yazarız. h 'yi çözmek daha kolaydır:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Böylece A 'nın formülü şu hale gelir:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{1000}{\pi r^2} \right) \\ &= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \end{aligned}$$

Amacımız, A 'nın değerini minimize eden bir $r > 0$ değeri bulmaktır. Şekil 4.35 böyle bir değer varlığını ileri sürer.



ŞEKİL 4.35 $A = 2\pi r^2 + 2000/r$ 'nin grafiği yukarıya konkavdır.

Grafikte şuna dikkat edin: küçük bir r değeri için (bir boru parçası gibi ince uzun bir kap), $2000/r$ terimi baskın çıkar ve A büyük olur. Daha büyük r değerlerinde (pizza tabağı gibi kısa geniş bir kap), $2\pi r^2$ terimi baskındır ve A yine büyük olur.

A , uç noktaları bulunmayan bir aralık, $r > 0$ üzerinde türevlenebilir olduğundan, sadece birinci türevinin sıfır olduğu yerde bir minimumu olabilir.

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$$0 = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \quad dA/dr = 0 \text{ yazın}$$

$$4\pi r^3 = 2000 \quad r^2 \text{ ile çarpın}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5.42 \quad r'yi \text{ çözün.}$$

$r = \sqrt[3]{500/\pi}$ 'de ne olur?

İkinci türev

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

A 'nın bütün tanım aralığında pozitifdir. Bu nedenle, A 'nın grafiği her yerde yukarı konkavdır ve A 'nın $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ 'deki değeri bir mutlak minimumdur.

h 'nin karşı gelen değeri (biraz işlemten sonra)

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

dir. En az malzeme kullanılan 1-litrelik en randımanlı kutunun yüksekliği çapına eşittir, burada $r \approx 5.42$ cm ve $h \approx 10.84$ cm. ■

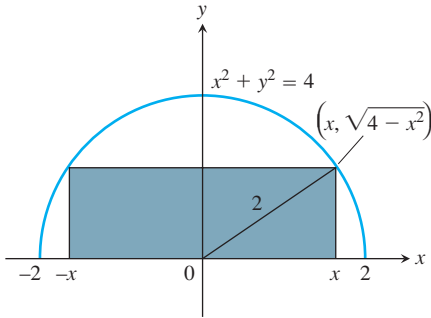
Uygulamalı Optimizasyon Problemlerini Çözmek

1. *Problemi okuyun.* Anlayana kadar problemi okuyun. Neler verilmiştir? Optimize edilecek bilinmeyen niceliği nedir?
2. *Bir resim çizin.* Problem için önemli olabilecek noktaları isimlendirin.
3. *Değişkenleri belirleyin.* Resimdeki ve problemdeki her bağıntıyı bir denklem veya cebirsel bir ifade olarak yazın ve bilinmeyen değişkeni tanımlayın.
4. *Bilinmeyen nicelik için bir denklem yazın.* Yapabiliyorsanız, bilinmeyenleri problemdeki bir değişken cinsinden veya iki bilinmeyenli iki denklem şeklinde ifade edin. Bu oldukça işlem gerektirebilir.
5. *Tanım kümesindeki kritik noktaları ve uç noktalarını test edin.* Fonksiyonun grafiğinin şekli hakkında bildiklerinizi kullanın. Kritik noktaları belirlemek ve sınıflandırmak için birinci ve ikinci türevleri kullanın.

Matematikten ve Fizikten Örnekler

ÖRNEK 3 Dikdörtgen yerleştirmek

2 yarıçaplı bir yarı çemberin içine bir dikdörtgen yerleştirilecektir. Bu dikdörtgenin alanı en fazla ne olabilir ve boyutları nedir?



ŞEKİL 4.36 Örnek 3'teki yarı çember içine çizilen dikdörtgen.

Çözüm Çemberin ve dikdörtgenin koordinat sistemine yerleştirilmesiyle elde edilen dikdörtgenin köşesinin koordinatları $(x, \sqrt{4-x^2})$ olsun (Şekil 4.36). Bu durumda, dikdörtgenin uzunluğu, yüksekliği ve alanı sağ alt köşenin koordinatı x cinsinden ifade edilebilir:

$$\text{Uzunluk: } 2x, \quad \text{Yükseklik: } \sqrt{4-x^2}, \quad \text{Alan: } 2x \cdot \sqrt{4-x^2}$$

x 'in değerlerinin, dikdörtgenin seçilen köşesinin bulunduğu $0 \leq x \leq 2$ aralığında olması gerektiğine dikkat edin.

Amacımız, $[0, 2]$ tanım kümesi üzerinde

$$A(x) = 2x\sqrt{4-x^2}$$

fonksiyonunun mutlak maksimum değerini bulmaktır.

$$\frac{dA}{dx} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2}$$

türevi, $x = 2$ olduğunda tanımsız ve

$$\begin{aligned} \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2} &= 0 \\ -2x^2 + 2(4-x^2) &= 0 \\ 8 - 4x^2 &= 0 \\ x^2 &= 2 \quad \text{veya } x = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

olduğunda sıfırdır. İki kök $x = \sqrt{2}$ ve $x = -\sqrt{2}$ ’den sadece $x = \sqrt{2}$ A ’nın tanım aralığında bulunur ve kritik nokta listesine katılır. A ’nın uç noktadaki ve bu tek noktadaki değerleri şöyledir:

$$\text{Kritik nokta değeri: } A(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\sqrt{4-2} = 4$$

$$\text{Uç nokta değerleri: } A(0) = 0, \quad A(2) = 0.$$

Dikdörtgenin yüksekliği $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2}$ ve uzunluğu $2x = 2\sqrt{2}$ olduğunda, alanın maksimum değeri 4 olur. ■

TARİHSEL BİYOGRAFI

Willebrord Snell van Royen
(1580–1626)

ÖRNEK 4 Fermat Prensibi ve Snell Yasası

Işığın hızı içinde dolaştığı ortama bağlıdır ve daha yoğun ortamlarda daha yavaş olma eğilimi vardır.

Optikteki Fermat prensibi ışığın her zaman bir noktadan diğerine en çabuk gidebileceği yoldan gittiğini söyler. Bir ışık demetinin, ışık hızının c_1 olduğu bir ortamdaki A noktasından hızının c_2 olduğu bir ortamdaki B noktasına giderken izleyeceği yolu bulun.

Çözüm A ’dan B ’ye giden ışık bu işi en çabuk gidebileceği yoldan yaptığına göre, yolculuk zamanını minimize edecek bir yol arayacağız. A ve B ’nin xy -düzleminde bulunduklarını ve iki ortamı ayıran doğrunun x eksenini olduğunu varsayacağız (Şekil 4.37).

Düzgün bir ortamda, yani ışığın hızının sabit kaldığı bir ortamda, “en kısa zaman” “en kısa yol” anlamına gelir ve ışık demeti bir doğru izleyecektir. Dolayısıyla, A ’dan B ’ye giden yol A ’dan bir P sınır noktasına giden bir doğru parçası ve oradan da B ’ye giden bir başka doğru parçasından oluşur. Mesafe eşittir sürat çarpı zaman formülünden

$$\text{Zaman} = \frac{\text{mesafe}}{\text{sürat}}$$

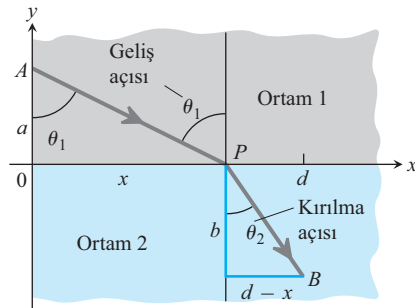
olarak bulunur. Işığın A ’dan P ’ye gitmesi için gereken zaman buradan

$$t_1 = \frac{AP}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1}$$

şeklinde bulunur. P ’den B ’ye gitmesi için gereken zaman ise

$$t_2 = \frac{PB}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c_2}$$

olur.



ŞEKİL 4.37 Bir ortamdan daha yoğun bir ortama geçerken kırılan (yolu değişen) bir ışın demeti (Örnek 4).

A' 'dan B' 'ye gitmesi için gereken zaman bunların toplamıdır:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_2}.$$

Bu denklem t' 'yi x 'in, tanım aralığı $[0, d]$ olan bir fonksiyonu olarak tanımlar ve biz de t' 'nin bu kapalı aralıktaki minimumunu bulmak istiyoruz. Buradan

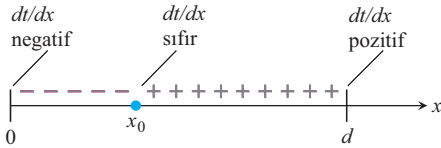
$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{c_2 \sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

türevini elde ederiz. Şekil 4.37'teki θ_1 ve θ_2 açıları cinsinden

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sin \theta_1}{c_1} - \frac{\sin \theta_2}{c_2}$$

bulunur. x 'i $0 \leq x \leq d$ aralığına kısıtlıysak, t' 'nin $x = 0$ 'da bir negatif türevi ve $x = d$ 'de bir pozitif türevi vardır. Dolayısıyla, Türevler İçin Ara Değer Teoremine göre (Bölüm 3.1) $dt/dx = 0$ olduğu bir $x_0 \in [0, d]$ noktası vardır (Şekil 4.38). Böyle tek bir nokta bulunur, çünkü dt/dx x 'in artan bir fonksiyonudur (Alıştırma 54'e bakın). Bu noktada

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}.$$



ŞEKİL 4.38 Örnek 4'teki dt/dx 'in işaret düzeni

olur. Bu denklem **Snell yasası** veya **Kırılma Yasası**dır ve optik teoride önemli bir prensiptir. Işık demetinin izlediği yolu tanımlar ■

Ekonomiden Örnekler

Bu örneklerde, analizin ekonomi teorisine katkıda bulunduğu iki noktaya dikkat çekmek istiyoruz. İlki, kârı maksimize etmek için yapılması gerekenler, ikincisi ortalama maliyeti minimize etmek için yapılması gerekler.

$r(x) = x$ birim satmanın kazancı

$c(x) = x$ birim üretmenin maliyeti

$p(x) = r(x) - c(x) = x$ birim üretme ve satmanın kârı

olduğunu varsayın. **Marjinal gelir**, **marjinal maliyet** ve **marjinal kâr**

$$\frac{dr}{dx} = \text{marjinal gelir},$$

$$\frac{dc}{dx} = \text{marjinal maliyet},$$

$$\frac{dp}{dx} = \text{marjinal kâr}$$

olarak verilir. İlk gözlem p kârının bu türevlerle olan ilişkisi hakkındadır.

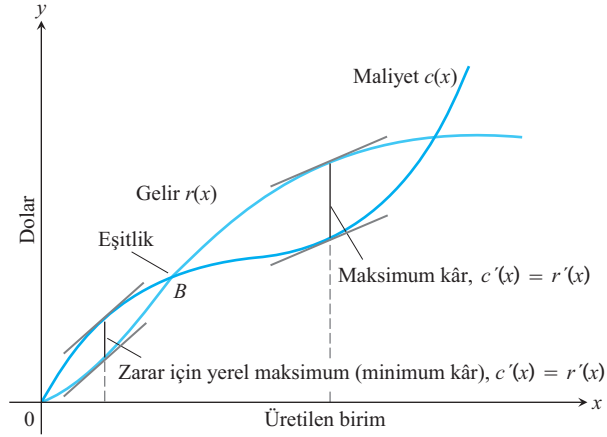
$r(x)$ ve $c(x)$ her $x > 0$ için türevlenebiliyorsa ve $p(x) = r(x) - c(x)$ 'in maksimum bir değeri varsa, bu $p'(x) = 0$ olduğu bir üretim seviyesinde ortaya çıkar. $p'(x) = r'(x) - c'(x)$ olduğundan, $p'(x) = 0$

$$r'(x) - c'(x) = 0 \quad \text{veya} \quad r'(x) = c'(x)$$

gerektirir.

Bu nedenle

Maksimum kârı yol açan üretim seviyesinde, marjinal gelir marjinal maliyete eşittir (Şekil 4.39)



ŞEKİL 4.39 Tipik bir maliyet fonksiyonunun grafiği aşağı konkav başlar ve daha sonra yukarı konkav olur. Eşitlik noktası B 'de gelir eğrisini keser. B 'nin solunda, şirket zararla çalışmaktadır. Sağda ise şirket, maksimum kâr $c'(x) = r'(x)$ 'te gerçekleşmek üzere, kârla çalışmaktadır. Daha da sağda, maliyet geliri geçer (belki pazar doyumu, işgücü artımı ve malzeme maliyetlerinin bir birleşiminden dolayı) ve üretim seviyesi yine kârsız bir hale gelir.

ÖRNEK 5 Kârı Maksimize Etmek

x , bin birimi temsil etmek üzere

$$r(x) = 9x \text{ ve } c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

olsun. Kârı maksimize edecek bir üretim seviyesi var mıdır? Varsa, nedir?

Çözüm $r'(x) = 9$ ve $c'(x) = 3x^2 - 12x + 15$ olduğuna dikkat edin.

$$3x^2 - 12x + 15 = 9 \quad c'(x) = r'(x) \text{ koyun.}$$

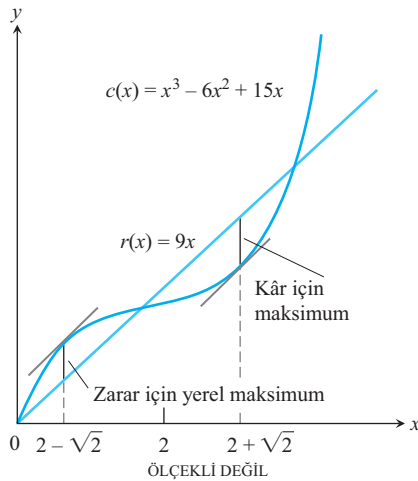
$$3x^2 - 12x + 6 = 0$$

Kuadratik denklemin iki çözümü

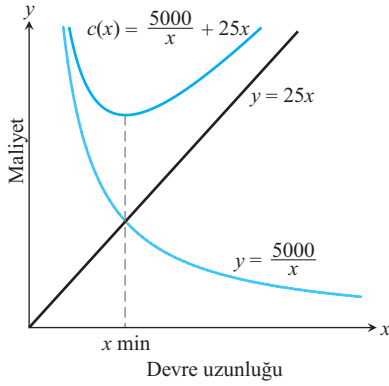
$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{72}}{6} = 2 - \sqrt{2} \approx 0.586 \quad \text{ve}$$

$$x_2 = \frac{12 + \sqrt{72}}{6} = 2 + \sqrt{2} \approx 3.414$$

tür. En fazla kar için olası üretim seviyeleri $x \approx 0.586$ bin birim veya $x \approx 3.414$ bin birimdir. $p(x) = r(x) - c(x)$ 'in ikinci türevi, $r''(x)$ her yerde sıfır olduğundan $p''(x) = -c''(x)$ dir. Böylece, $p''(x) = 6(2 - x)$, $x = 2 + \sqrt{2}$ de pozitif ve $x = 2 - \sqrt{2}$ de negatiftir. İkinci Türev Testine göre, yaklaşık olarak $x = 3.414$ yakınlarında bir maksimum kâr (gelirin maliyeti aştığı yer) ve yaklaşık olarak $x = 0.586$ yakınlarında maksimum zarar gözükür. $r(x)$ 'in grafiği Şekil 4.40'ta gösterilmiştir. ■



ŞEKİL 4.40 Örnek 5 için maliyet ve gelir eğrileri.



ŞEKİL 4.41 Ortalama günlük maliyet $c(x)$, bir hiperbol ve bir lineer fonksiyonun toplamıdır (Örnek 6).

ÖRNEK 6 Maliyeti Minimize Etmek

Bir marangoz, her gün 5 mobilya üretmek için fidan-üretimi maun kullanmaktadır. Her bir tahta konteynerinin teslimatı 5000 \$ iken bu malzemenin depolama ücreti gün başına bir birim için 10\$'dır. Bir birim, bir mobilya üretmek için gereken malzemedir. Teslimatlar arasındaki üretim devresinde, günlük ortalama maliyeti minimize etmek için her defasında ne kadar malzeme sipariş edilmelidir ve ne sıklıkta teslimat yapılmalıdır?

Çözüm Her x günde bir teslimat yapılması istenirse, bu üretim devresinde yeterli malzemenin bulunması için $5x$ birim sipariş edilmelidir. *Ortalama* depolama miktarı yaklaşık olarak teslimatın yarısı kadar, veya $5x/2$ dir. Böylece, her bir devrenin teslimat ve depolama maliyeti yaklaşık olarak

Devre başına maliyet = teslimat maliyeti + depolama maliyeti

$$\text{Devre başına maliyet} = \underbrace{5000}_{\text{teslimat maliyeti}} + \underbrace{\left(\frac{5x}{2}\right)}_{\text{depolanan ortalama miktar}} \cdot \underbrace{x}_{\text{depolanan gün sayısı}} \cdot \underbrace{10}_{\text{gün başına depolama maliyeti}}$$

Ortalama günlük maliyet $c(x)$ 'i devre başına maliyeti devredeki gün sayısı x 'e bölerek buluruz (Bkz. Şekil 4.41).

$$c(x) = \frac{5000}{x} + 25x, \quad x > 0.$$

$x \rightarrow 0$ iken ve $x \rightarrow \infty$ iken günlük ortalama maliyet çok büyür. Dolayısıyla bir minimum olmasını bekleriz, fakat nerede? Amacımız, mutlak minimum maliyeti sağlayan, teslimatlar arası x gün sayısını belirlemektir.

Türevin nerede sıfır olduğunu belirleyerek kritik noktaları buluruz:

$$c'(x) = -\frac{5000}{x^2} + 25 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{200} \approx \pm 14.14.$$

İki kritik noktadan sadece $\sqrt{200}$ $c(x)$ 'in tanım kümesindedir. Ortalama günlük maliyetin kritik nokta değeri

$$c(\sqrt{200}) = \frac{5000}{\sqrt{200}} + 25\sqrt{200} = 500\sqrt{2} \approx \$707.11.$$

dır. $c(x)$ 'in tanım kümesi $(0, \infty)$ dur ve $c''(x) = 10000/x^3 > 0$ dır. Böylece, $x = \sqrt{200} \approx 14.14$ gün de bir mutlak minimum vardır.

Marangoz, egzotik tahtadan her 14 günde $5(14) = 70$ birim teslimatlık bir program yapmalıdır. ■

Örnek 5 ve 6'da birim sayısı x 'in herhangi bir pozitif reel sayı olmasına izin verdik. Gerçekte, genellikle x 'in sadece pozitif tamsayı (veya sıfır) olması durumunda bir anlam vardır. Cevabımızı yuvarlamamız gerekirse, yukarı mı yoksa aşağı mı yuvarlamalıyız?

ÖRNEK 7 Minimum Maliyetin Hassasiyeti

Örnek 6 da en iyi çözüm için, teslimatlar arasındaki gün sayısını yukarı mı yoksa aşağı mı yuvarlamalıyız?

Çözüm 14.14 ten 14'e yuvarlarsak ortalama günlük maliyet yaklaşık olarak 0.03 \$ kadar artar:

$$c(14) = \frac{5000}{14} + 25(14) = \$707.14$$

ve

$$c(14) - c(14.14) = \$707.14 - \$707.11 = \$0.03$$

olur.

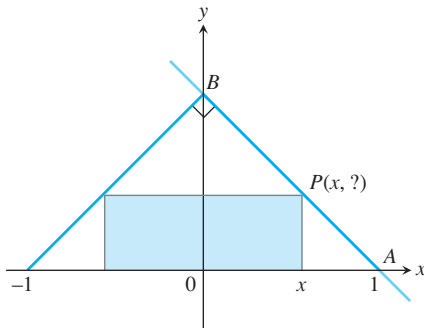
Öte yandan, $c(15) = \$708.33$ dir ve yukarı yuvarlarsak maliyetimiz $\$708.33 - \$707.11 = \$1.22$ artar. Böylece, x 'i aşağıya, 14 güne yuvarlamamız daha iyidir. ■

ALİŞTIRMALAR 4.5

Tek değişkenli bir fonksiyonu maksimize veya minimize ederken, çözdüğünüz probleme uygun bir tanım aralığında fonksiyonun grafiğini çizmenizi tavsiye ederiz. Grafik hesaplamalarınıza bir öngörü getirecek ve yanıtınızı anlamana yardımcı olacak görsel bir kapsam sağlayacaktır.

Geometrik Uygulamalar

1. **Çevreyi minimize etmek** Alanı 16 in^2 olan bir dikdörtgenin olası en küçük çevresi ve boyutları nedir?
2. Çevreleri 8 m olan bütün dikdörtgenler arasında alanı en büyük olanının bir kare olduğunu gösterin.
3. Aşağıda verilen şekil, hipotenüsü 2 birim uzunluğunda bir ikizkenar dik üçgenin içine yerleştirilmiş bir dikdörtgeni göstermektedir.
 - a. P 'nin y koordinatını x cinsinden ifade edin (*Yol gösterme: AB doğrusu için bir denklem yazın*).
 - b. Dikdörtgenin alanını x cinsinden ifade edin.
 - c. Dikdörtgenin alabileceği en büyük alan ve boyutları nedir?



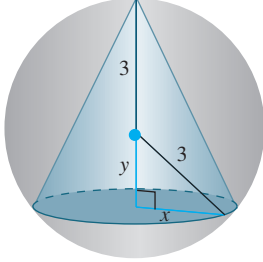
4. Bir dikdörtgenin tabanı x -ekseninde ve üst iki köşesi $y = 12 - x^2$ parabolünün üzerine bulunmaktadır. Dikdörtgenin alabileceği en büyük alan ve boyutları nedir?
5. Kenarları 8 inç ve 15 inç olan dikdörtgen bir kartonun köşelerinden eş büyüklükte kareler kesip, kenarları katlayarak açık bir dik-

dörtgen kutu yapmayı planlıyorsunuz. Bu şekilde yapabileceğiniz en büyük hacimli kutunun boyutları ve hacmi nedir?

6. Birinci dördte bir bölgenin köşesini $(a, 0)$ 'dan $(0, b)$ 'a giden 20 birim uzunluğunda bir doğru parçasıyla kapatmayı planlıyorsunuz. Doğru parçasıyla çevrelenen üçgenin alanının $a = b$ olduğunda en büyük olduğunu gösterin.
7. **En iyi çit planı** Dikdörtgen bir tarla parçası bir kenarından bir nehir ve diğer üç kenarından elektrikli çitle çevrelenecektir. Elinizde 800 m tel bulunuyorsa, en fazla ne kadar bir alanı çevreleyebilirsiniz? Boyutları nedir?
8. **En kısa çit** 216 m^2 'lik dikdörtgen bir bezelye tarlı bir çitle çevrelenecek ve kenarlarından birine paralel başka bir çitle eşit iki parçaya ayrılacaktır. En küçük toplam çit uzunluğunu sağlamak için dış dikdörtgenin boyutları ne olmalıdır? Ne kadar çit gerekecektir?
9. **Bir tank tasarlamak** Demir fabrikanız bir kağıt fabrikası için 500 ft^3 hacminde, kare tabanlı, üstü açık, bir dikdörtgen şeklinde çelik tank yapmak için anlaşmıştır. Tank, paslanmaz çelik tabakaların kenarlarından birbirlerine lehimlenmesiyle yapılacaktır. Üretim mühendisi olarak işiniz tankın olabildiğince hafif ağırlıkta olmasını sağlayacak taban ve yükseklik boyutlarını bulmaktır.
 - a. Fabrikaya kullanmaları için hangi boyutları bildirirsiniz?
 - b. Ağırlığı nasıl hesaba kattığınızı kısaca açıklayın.
10. **Yağmur suyu toplamak** 1125 ft^3 'lük üstü açık, tabanı bir kenarı x ft olan bir kareden oluşan ve y ft derinlikte dikdörtgen şeklinde bir tank yağmur suyu toplamak için üstü yerle aynı seviyede olacak şekilde yapılacaktır. Tankın maliyeti sadece tankın yapıldığı malzemeden değil, xy çarpımıyla orantılı kazma masrafından da oluşmaktadır.
 - a. Toplam maliyet

$$c = 5(x^2 + 4xy) + 10xy$$
 ise, hangi x ve y değerleri bunu minimize eder?
 - b. (a) daki maliyet fonksiyonu için olası bir senaryo verin.

11. **Bir poster tasarlamak** Kenar payları yukarıda ve aşağıda 4-inç ve diğer iki kenarda 2-inç olmak üzere, 50 inç² baskı içerecek bir poster tasarımı yapıyorsunuz. Kullanılacak kağıdın miktarını minimize edecek tüm boyutlar nedir?
12. 3 yarıçaplı bir kürenin içine oturtulabilecek en büyük dik koninin hacmini bulun.

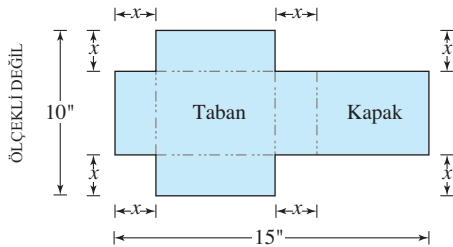


13. Bir üçgenin iki kenarının uzunlukları a ve b , ve aralarındaki açı θ 'dır. Hangi θ değeri üçgenin alanını maksimize eder? (İpucu: $A = (1/2)ab \sin \theta$).
14. **Bir kutu tasarlamak** 1000 cm³'lük bir hacim içerebilecek en hafif (en az malzemeyle yapılmış), üstü açık, dik bir silindirik kutunun boyutları nedir? Buradaki sonucunuzu Örnek 2'deki sonuçla karşılaştırın.
15. **Bir kutu tasarlamak** Üretim sürecindeki fireyi de hesaba katarak, 1000 cm³ hacimli dik silindirik kutu tasarımı yapıyorsunuz. Yanlar için alüminyum keserken fire olmamaktadır, ancak r yarıçaplı taban ve tavan kenarları $2r$ uzunluğunda olan karelerden kesilecektir. Dolayısıyla her kutu için kullanılacak toplam alüminyum miktarı Örnek 2'deki $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ yerine

$$A = 8r^2 + 2\pi rh$$

olacaktır. Örnek 2'de en ekonomik kutu için h 'nin r 'ye oranı 2'ye 1'di. Şimdi bu oran nedir?

- T 16. Kapaklı bir kutu tasarlamak** Bir mukavva parçası 10 inç e 15 inç ölçülerindedir. Şekilde gösterildiği gibi ölçüsü 10 inç olan kenarın köşelerinden eş kareler çıkarılıyor. Çıkıntılar katlanarak kapaklı bir dikdörtgensel kutu elde edecek şekilde diğer köşelerden eş dikdörtgenler çıkarılıyor.

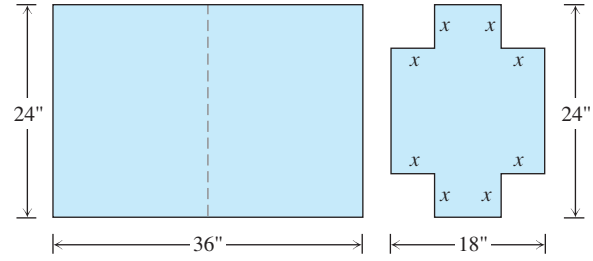


- a. Kutunun hacmi için bir $V(x)$ formülü yazın
- b. Problemdeki durum için V 'nin tanım kümesini bulun ve bu tanım kümesi üzerinde V 'yi çizin.

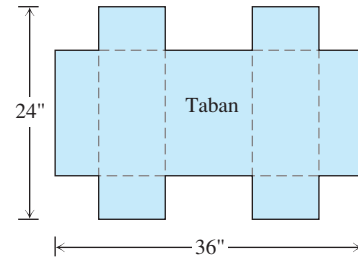
- c. Maksimum hacmi bulmak için bir grafik yöntem kullanın ve bu değeri veren x 'i bulun.
- d. (c) deki cevabınızı analitik olarak doğrulayın.

- T 17. Bir bavul tasarlamak** 24-inç'e 36-inç bir karton tabaka, şekilde gösterildiği gibi 24-inç'e 18-inç bir dikdörtgen elde edilecek şekilde ikiye katlanıyor. Sonra, katlı dikdörtgenin köşelerinden kenar uzunluğu x olan dört eş kare çıkarılıyor. Daha sonra karton açılıyor ve altı çıkıntı, yanları ve bir kapağı olan bir kutu oluşturmak üzere yukarıya katlanıyor.

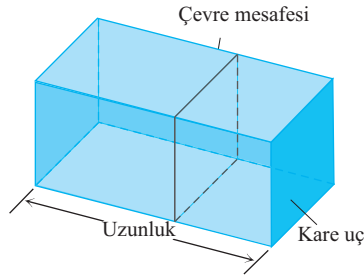
- a. Kutunun hacmi için bir $V(x)$ formülü yazın.
- b. Problemdeki durum için V 'nin tanım kümesini bulun ve bu tanım kümesi üzerinde V 'yi çizin.
- c. Maksimum hacmi bulmak için bir grafik yöntem kullanın ve bu değeri veren x 'i bulun.
- d. (c) deki cevabınızı analitik olarak doğrulayın.
- e. 1120 inç³ hacim veren bir x değeri bulun.
- f. (b)'de ortaya çıkan durumu tanımlayan bir paragraf yazın.



Sonra karton tabaka açılıyor



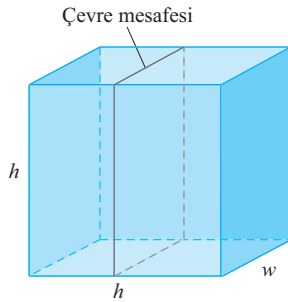
18. $x = -\pi$ 'den $x = \pi$ 'ye kadar $y = 4 \cos(0.5x)$ eğri yayının altına bir dikdörtgen çizilecektir. En büyük alanlı dikdörtgenin boyutları ve en büyük alan nedir?
19. 10 cm yarıçaplı bir kürenin içine oturtulacak en büyük hacimli dik dairesel silindirin boyutlarını bulun. En büyük hacim nedir?
20. a. Amerikan Posta Servisi ancak, uzunluğu ve çevre mesafesinin toplamı 108 inç aşmayan kutuları yurtiçi taşıma için kabul etmektedir. Hangi boyutlar, uçları birer kare olan kutuya olası en büyük hacmi verir?



- T b.** 108 inçlik (uzunluk artı çevre mesafesi 108-inç olacak) bir kutunun hacminin grafiğini, uzunluğunun bir fonksiyonu olarak çizin ve gördüklerinizi (a)'daki yanıtınızla karşılaştırın.

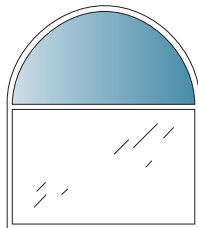
21. (Örnek 20'nin devam.)

- a.** Ucu kare olan bir kutu almak yerine, boyutları $h \times h \times w$ ve çevre mesafesi $2h + 2w$ olacak şekilde kenarları kare olan bir kutu aldığınızı varsayın. Bu durumda kutuya en büyük hacmi sağlayacak boyutlar nedir?



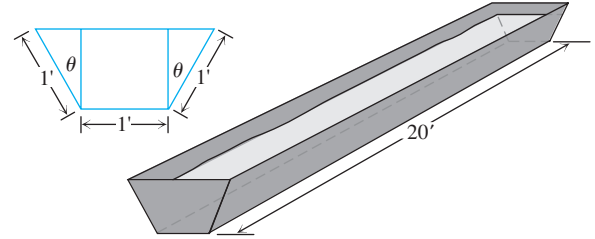
- T b.** Hacmin grafiğini, h 'nin bir fonksiyonu olarak çizin ve gördüğünüzü (a) daki cevabınızla karşılaştırın.

- 22.** Bir pencere üzerine bir yarım çember konulmuş bir dikdörtgen-den oluşmaktadır. Dikdörtgen şeffaf camdan yapılmışken, yarım çember birim alan başına şeffaf camın yarısı kadar ışık geçiren buzlu camdan yapılmıştır. Toplam çevre sabittir. En fazla ışık verecek pencere boyutlarını bulun. Çerçevenin kalınlığını dikkate almayın.



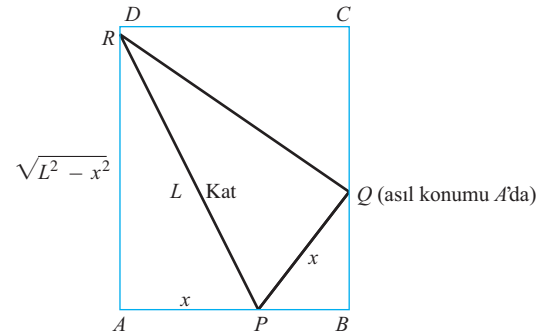
- 23.** Bir silo (taban dahil değil) üzerine bir yarım küre oturtulmuş bir silindirden oluşacak şekilde yapılacaktır. Yüzey alanının birim kare başına yapım maliyeti yarım küre için silindir yan duvarınınkinin iki katıdır. Hacim sabit ve yapım maliyeti minimum olarsa, kullanılması gereken boyutları bulun. Silonun kalınlığını ve yapımdaki fireyi dikkate almayın.

- 24.** Aşağıdaki oluk gösterilen boyutlarda yapılacaktır. Sadece θ açısı değiştirilebilir. Hangi θ değeri oluğun hacmini maksimize edecektir?



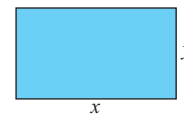
- 25. Kağıt katlamak** Aşağıda gösterilen 8.5'e-11-inçlik dikdörtgen kağıt parçası düz bir yüzeye konulmuş ve köşelerinden biri, şekilde gösterildiği gibi, karşısındaki uzun kenarın üzerine konmuş ve kağıt düzleştirilirken orada tutulmuştur. Problemimiz katın olabildiğince küçük olmasını sağlamaktır. Uzunluğa L deyin. Bunu kağıt ile deneyin

- a.** $L^2 = 2x^3/(2x - 8.5)$ olduğunu gösterin.
b. Hangi x değeri L^2 'yi minimize eder?
c. L 'nin minimum değeri nedir?

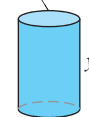


- 26. Silindirler kurmak** Aşağıdaki iki kurulum probleminin cevaplarını karşılaştırın.

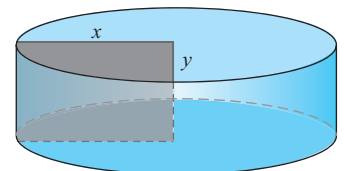
- a.** Boyutları x cm'ye y cm ve çevresi 36 cm olan dikdörtgensel bir kağıt, şekilde (a) kısmında gösterildiği gibi, bir silindir yapmak üzere yuvarlanacaktır. x ve y 'nin hangi değerleri en büyük hacmi verir?
b. Aynı kağıt, şekilde (b) kısmında gösterildiği gibi, y uzunluğundaki kenarlarından biri etrafında, bir silindir tarayacak şekilde döndürülecektir. x ve y 'nin hangi değerleri en büyük hacmi verir?



Çevre = x

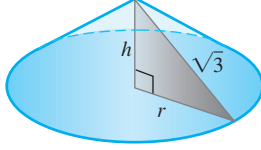


(a)



(b)

- 27. Koniler Kurmak** Hipotenüs $\sqrt{3}$ m uzunluğunda olan bir dik üçgen, dik kenarlarından biri etrafında, bir dik dairesel koni elde etmek üzere çevriliyor. Bu yolla yapılabilecek en büyük hacimli koninin yarıçapını, yüksekliğini ve hacmini bulun.



- 28.** Hangi a değerlerinde $f(x) = x^2 + (a/x)$ fonksiyonunun
- $x = 2$ 'de yerel bir minimumu vardır?
 - $x = 1$ 'de bir büküm noktası bulunur?
- 29.** $f(x) = x^2 + (a/x)$ fonksiyonunun hiçbir a değerinde bir yerel maksimumu olamayacağını gösterin.
- 30.** Hangi a ve b değerlerinde $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ fonksiyonunun
- $x = -1$ 'de bir yerel maksimumu, $x = 3$ 'te bir yerel minimumu vardır?
 - $x = 4$ 'te bir yerel minimumu ve $x = 1$ 'de bir büküm noktası vardır?

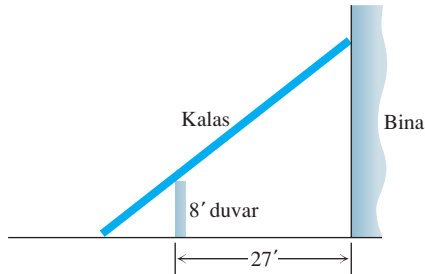
Fiziksel Uygulamalar

- 31. Dikey hareket** Dikey olarak hareket eden bir cismin yüksekliği, s feet ve t saniye olmak üzere

$$s = -16t^2 + 96t + 112$$

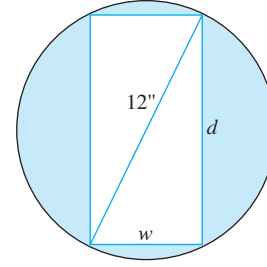
ile verilmektedir. Aşağıdakileri bulun

- cismin $t = 0$ anındaki hızını
 - maksimum yüksekliğini ve zamanını
 - $s = 0$ iken hızını
- 32. En çabuk rota** Jane, kıyıdan 2 mil açıktaki bir bottadır ve kıyı şeridinde bota en yakın noktadan 6 mil ileride bir sahil köyüne ulaşmak istemektedir. Saatte 2 mil hızla kürek çekebilme ve saatte 5 mil hızla yürüyebilmektedir. Köye en kısa zamanda ulaşabilmesi için, botla kıyıdaki hangi noktaya çıkmalıdır.
- 33. Kısa kalas** Aşağıda gösterilen 8-ft'lik duvar binadan 27-ft uzaktadır. Duvarın dışındaki bir yerden binanın kenarına ulaşabilecek en kısa kalasın uzunluğunu bulun.



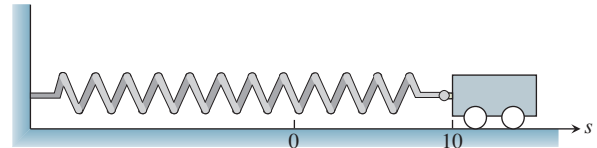
- T 34. Bir kalasın kuvveti** Dikdörtgen şeklinde tahta bir kalasın kuvveti S , genişliği kere kalınlığının karesi ile orantılıdır (Şekle bakınız).

- 12-inç-çaplı silindir şeklinde bir kütükten kesilebilecek en kuvvetli kalasın boyutlarını bulun.
- S 'yi kalasın eni w 'nın bir fonksiyonu olarak çizin. Orantı sabitini $k = 1$ olarak alın. Gördüklerinizi (a)'daki yanıtınızla karşılaştırın.
- Aynı ekranda, veya farklı bir ekranda, S 'yi kalasın kalınlığı d 'nin fonksiyonu olarak çizin. Yine $k = 1$ alın. Grafiklerinizi birbiriyle ve (a)'daki yanıtınızla karşılaştırın. k için başka bir değer seçmenin etkisi ne olurdu? Deneyin.



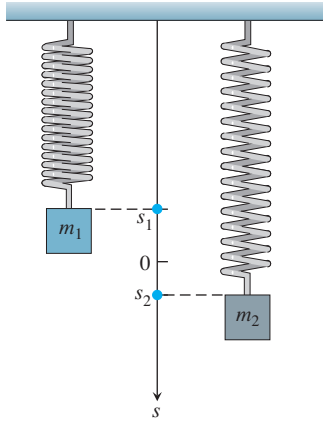
- T 35. Bir kalasın sertliği** Bir kalasın sertliği S genişliği kere kalınlığının kübü ile orantılıdır.

- 12-inç-çaplı silindir şeklinde bir kütükten kesilebilecek en sert kalasın boyutlarını bulun.
 - S 'yi kalasın eni w 'nın bir fonksiyonu olarak çizin. Orantı sabitini $k = 1$ olarak alın. Gördüklerinizi (a)'daki yanıtınızla karşılaştırın.
 - Aynı ekranda, veya farklı bir ekranda, S 'yi kalasın kalınlığı d 'nin fonksiyonu olarak çizin. Yine $k = 1$ alın. Grafiklerinizi birbiriyle ve (a)'daki yanıtınızla karşılaştırın. k için başka bir değer seçmenin etkisi ne olurdu? Deneyin.
- 36. Bir doğru üzerinde hareket** İki parçacığın s -ekseni üzerindeki konumları, s_1 ve s_2 metre, t saniye olmak üzere $s_1 = \sin t$ ve $s_2 = \sin(t + \pi/3)$ 'dir.
- $0 \leq t \leq 2\pi$ aralığının hangi an(lar)ında iki parçacık buluşur?
 - Parçacıklar arasındaki uzaklık en fazla ne olur?
 - $0 \leq t \leq 2\pi$ aralığında, parçacıklar arasındaki uzaklık ne zaman en hızlı değişir?
- 37. Sürtünmesiz araba** Duvara bir yayla bağlı sürtünmesiz küçük bir araba durgun konumundan 10 cm çekiliyor ve $t = 0$ anında 4 saniye için salınıma bırakılıyor. t anındaki konumu $s = 10 \cos \pi t$ 'dir.
- Arabanın maksimum hızı nedir? Araba bu hızla ne zaman ulaşır? O anda nerededir ve ivmesinin büyüklüğü nedir?
 - Araba, ivmesinin büyüklüğü maksimum olduğunda nerededir? O anda arabanın sürati nedir?



38. Yanyana yaylarla asılı olan iki kütlein konumları $s_1 = 2 \sin t$ ve $s_2 = \sin 2t$ 'dir.

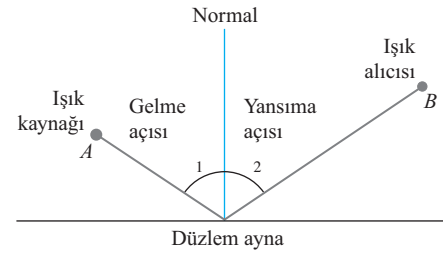
- $0 < t$ aralığının hangi anında iki kütle birbirini geçer?
(İpucu: $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$)
- $0 \leq t \leq 2\pi$ aralığında hangi anda kütleler arasındaki dikey uzaklık en büyüktür? Bu uzaklık nedir?
(İpucu: $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$)



39. **İki gemi arasındaki uzaklık** Öğleyin, A gemisi B gemisinin 12 deniz mili kuzeyindedir. A gemisi gün boyu güneye doğru 12 not (saatte deniz mili; bir deniz mili 2000 yardadır) hızla gitmektedir. B gemisi de doğuya doğru 8 notla gitmektedir.

- Zamanı öğleyin $t = 0$ olarak alın ve gemiler arasında uzaklık s 'yi t 'nin bir fonksiyonu olarak ifade edin.
- Öğle vakti ve 1 saat sonra gemiler arasındaki uzaklık hangi hızla değişmektedir?
- O günkü görüş mesafesi 5 deniz milidir. Gemiler hiç birbirini görebildi mi?
- $-1 \leq t \leq 3$ aralığında s ve ds/dt 'nin grafiklerini t 'nin fonksiyonları olarak birlikte ve mümkünse farklı renklerde çizin. Grafikleri karşılaştırın ve gördüklerinizi (a) ve (b)'deki yanıtlarla bağdaştırın.
- ds/dt 'nin grafiğinin birinci bölgede yatay bir asimptotu varmış gibi görünmektedir. Bu $t \rightarrow \infty$ iken ds/dt 'nin bir limit değere ulaştığını belirtir. Bu değer nedir? Bu değer gemilerin tek tek hızlarıyla ilişkisi nedir?

40. **Optikteki Fermat prensibi** Optikteki Fermat prensibi ışığın bir noktadan diğerine giderken yolculuk zamanını minimize edecek bir yol izlediğini söyler. Bir A kaynağından çıkan ışık, şekilde gösterildiği gibi, bir düzlem ayna tarafından bir B noktadaki alıcıya yansıtılmaktadır. Işığın Fermat prensibini gerçekleştirmesi için, gelme açısının yansıma açısına eşit olması gerektiğini gösterin. (Bu sonuç analiz kullanmadan da çıkartılabilir. İsterseniz tamamen geometrik bir yaklaşım da vardır.)



41. **Teneke zehirlenmesi** Metalik teneke 13.2° 'nin altında tutulduğunda, zamanla kırılğan hale gelir ve gri bir toza parçalanır. Teneke cisimler yıllarca soğuk bir iklimde tutulursa kendiliğinden bu gri toza parçalanır. Yıllar önce kiliselerindeki teneke org borularının parçalandığını gören Avrupalılar bu değişikliğe *teneke zehirlenmesi* adını verdiler, çünkü zehirli gibi görünüyordu. Aslında gerçekten zehirliydi, çünkü gri toz kendi oluşumunun katalizörüdür.

Bir kimyasal reaksiyonun *katalizörü* kendisi değişime uğramadan tepkime hızını kontrol eden bir maddedir. Bir *otokatalitik tepkime* ürünü kendi oluşumunun katalizörü olan bir tepkimedir. Böyle bir tepkime başlangıçta katalizör miktarı azsa yavaş gelişebilir ve en sonunda da esas maddenin çoğu kullanıldığı zaman yine yavaşlar. Ancak, arada, hem madde hem de katalizör ürünü bol bulunduğu anda, tepkime daha hızlı ilerler.

Bazı durumlarda, reaksiyonun $v = dx/dt$ hızı hem ortamda bulunan esas madde hem de ürün miktarı ile orantılıdır. Yani, v yalnızca x 'in bir fonksiyonu olarak kabul edilebilir ve

$$v = kx(a - x) = kax - kx^2$$

yazılabilir. Burada

x = ürün miktarı

a = başlangıçtaki madde miktarı

k = pozitif bir sabit.

Hangi x değerlerinde v hızının bir maksimumu vardır? v 'nin maksimum değeri nedir?

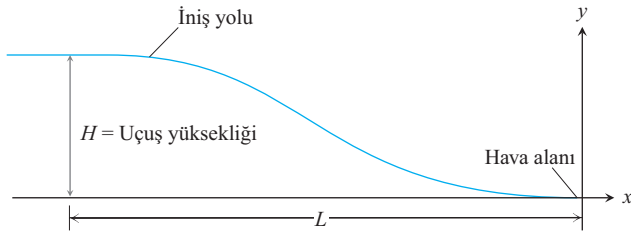
42. **Uçağın iniş yolu** Bir uçak, şekilde gösterildiği gibi, bir hava alanının, yatay olarak L uzaklığındaki pistine iniş için alçalmaya başladığında H yüksekliğindedir. Uçağın iniş yolunun (rotası) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $y(-L) = H$ ve $y(0) = 0$ şeklinde bir kübik polinom fonksiyonun grafiği olduğunu varsayın.

a. $x = 0$ da dy/dx nedir?

b. $x = -L$ da dy/dx nedir?

c. $y(x) = H \left[2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$ olduğunu göstermek için

dy/dx 'in $x = 0$ 'daki ve $x = -L$ 'deki değerlerini $y(0) = 0$ ve $y(-L) = H$ ile birlikte kullanın.



İş ve Ekonomi

43. Her bir sırt çantasını üretmek ve dağıtmak size c dolara mal olmaktadır. Sırt çantalarının her biri x dolara satılıyorsa, satılan çanta sayısı, a ve b belirli pozitif sabitler olmak üzere,

$$n = \frac{a}{x - c} + b(100 - x)$$

ile veriliyor. Hangi satış fiyatı maksimum kâr getirecektir?

44. Aşağıdaki fiyatları öneren bir tur hizmeti veriyorsunuz.

50 kişi (turu gerçekleştirmek için minimum sayı) tura katılırsa, kişi başı 200\$.

Maksimum toplam 80 kişiye kadar her ek kişi için, kişi başı fiyat 2\$ azalır.

Turu yapmak 6000\$ (sabit maliyet) artı kişi başına 32\$ tutmaktadır. Kârınızı maksimize etmek için kaç kişi gereklidir?

45. **Wilson sipariş miktarı formülü** Envanter yönetiminin formüllerinden biri malların ortalama haftalık siparişinin, ödemesinin ve depolanmasının maliyetinin

$$A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$$

olduğunu söyler. Burada q elinizdekiler azaldığında ısmarladığınız şeylerin (ayakkabılar, radyolar, süpürgeler, veya her ne olursa) miktarı, k bir sipariş vermenin maliyeti (aynısı, her ne kadar sıklıkta sipariş verirsiniz verin), c bir malın maliyeti (bir sabit), m her hafta satılan mal sayısı (bir sabit) ve h de mal başına haftalık depolama maliyetidir (yer, sigorta, imkanlar ve güvenlik gibi şeylerde içeren bir sabit).

- a. Mağazanızın envanter müdürü olarak işiniz $A(q)$ 'yu minimize edecek miktarı bulmaktır. Bu nedir? (Yanıt bulacağınız formüle *Wilson lot boyutu formülü* denir).
- b. Sipariş maliyetleri bazen sipariş miktarına bağlıdır. Böyle olduğunda, k 'yi, k ve q 'nın sabit bir katının toplamı $k + bq$ ile değiştirmek daha gerçekçidir. Bu durumda, ısmarlanacak en ekonomik miktar nedir?
46. **Üretim seviyesi** Ortalama maliyetin en küçük olduğu üretim seviyesinin (varsa), ortalama maliyetin marjinal maliyete eşit olduğu, seviyede olduğunu gösterin.
47. $r(x) = 6x$ ve $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ sizin gelir ve maliyet fonksiyonlarınız ise, yapabileceğiniz en iyi şeyin başa baş kalmak (gelirle maliyetin eşit olması) olduğunu gösterin.

48. **Üretim seviyesi** $c(x) = x^3 - 20x^2 + 20,000x$ fonksiyonunun x adet mal üretmenin maliyeti olduğunu varsayın. x adet mal üretmenin ortalama maliyetini minimize edecek bir üretim seviyesi bulun.

49. **Ortalama günlük maliyet** Örnek 6'da, herhangi bir malzemenin teslimatının d kadar bir maliyete maruz kaldığını varsayın, depolama maliyeti gün başına bir birim için s \$ ve üretim oranı günde p birimdir.

- a. Her x günde ne kadar teslimat yapılmalıdır.
- b. Eşitliği gösterin

$$\text{devre başına maliyet} = d + \frac{px}{2}sx$$

- c. Teslimatlar arasındaki, teslimat ve depolamanın *ortalama günlük maliyetini* minimize eden x^* zamanını ve teslimat miktarını bulun.

- d. x^* 'in $y = d/x$ hiperbolü ve $y = psx/2$ doğrusunun kesim noktasında ortaya çıktığını gösterin.

50. **Ortalama maliyeti minimize etmek** x , bin birim olmak üzere $c(x) = 2000 + 96x + 4x^{3/2}$ olduğunu varsayın. Ortalama maliyeti minimize edecek bir üretim seviyesi var mıdır?

Tıp

51. **İlaça duyarlılık** (Bölüm 3.2, *Alıştırma 50'nin devamı*) dR/dM türevini maksimize eden M değerini bularak vücudun en duyarlı olduğu ilaç miktarını bulun. Burada

$$R = M^2 \left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3} \right)$$

ile verilir ve C bir sabittir.

52. **Nasıl öksürüyoruz**

- a. Öksürdüğümüzde, trake (soluk borusu) dışarı çıkan havanın hızını arttıracak şekilde kasılır. Bu hızı maksimize etmek için ne kadar kasılması gerektiği ve öksürdüğümüzde gerçekten bu kadar kasılıp kasılmadığı sorusunu akla getirir.

Soluk borusu duvarının esnekliği ve duvarın yakınında havanın sürtünmeyle nasıl yavaşlatıldığı hakkında yapılan uygun varsayımlar altında, ortalama akış hızı v

$$v = c(r_0 - r)r^2 \text{ cm/sn} \quad \frac{r_0}{2} \leq r \leq r_0$$

denklemleri modellenenir. Burada r_0 trakenin cm olarak yarıçapı ve c de değeri kısmen trakenin uzunluğuna bağlı olan pozitif bir sabittir.

$r = (2/3)r_0$ olduğunda, yani trake %33 oranında kasıldığında v 'nin en büyük olduğunu gösterin. Bunun en güzel yanı, x -ışını fotoğraflarının öksürdüğümüzde trakenin bu kadar kasıldığını doğrulamasıdır.

- T** b. $r_0 = 0.5$ ve $c = 1$ olarak alın ve v 'yi $0 \leq r \leq 0.5$ aralığında çizin. Gördüklerinizi $r = (2/3)r_0$ olduğunda v 'nin maksimum olduğu iddiasıyla karşılaştırın.

Teori ve Örnekler

53. **Pozitif tam sayılar için bir eşitsizlik** a, b, c ve d pozitif tam sayılarsa, şu ifadeyi doğrulayın:

$$\frac{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1)}{abcd} \geq 16$$

54. **Örnek 4'teki dt/dx türevi**

a.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \text{nin}$$

x 'in artan bir fonksiyonu olduğunu gösterin.

b.

$$g(x) = \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}, \text{nin}$$

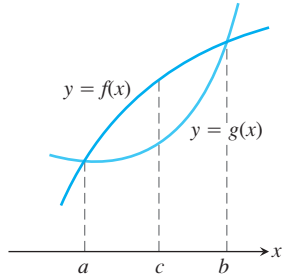
x 'in azalan bir fonksiyonu olduğunu gösterin.

c.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{c_2 \sqrt{b^2 + (d - x)^2}}, \text{nin}$$

x 'in artan bir fonksiyonu olduğunu gösterin.

55. $f(x)$ ve $g(x)$ aşağıda şekilleri verilen türevlenebilir fonksiyonlar olsun. c noktası eğriler arasındaki dikey mesafenin en büyük olduğu yerdir. İki eğrinin c noktasındaki teğetlerinin bir özelliği var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.



56. $f(x) = 3 + 4 \cos x + \cos 2x$ fonksiyonunun hiç negatif olup olmadığını bulmanız istensin.

- a. Neden sadece $[0, 2\pi]$ aralığındaki x değerlerini ele almanız gerektiğini açıklayın.
b. f hiç negatif olur mu? Açıklayın.

57. a. $y = \cot x - \sqrt{2} \csc x$ fonksiyonunun $0 < x < \pi$ aralığında bir mutlak maksimumu bulunmaktadır. Bunu bulun.

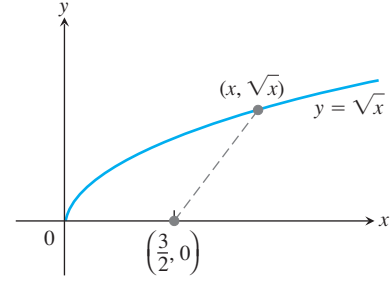
- T** b. Fonksiyonun grafiğini çizin ve gördüklerinizi (a)'daki yanıtınızla karşılaştırın.

58. a. $y = \tan x + 3 \cot x$ fonksiyonunun $0 < x < \pi/2$ aralığında bir mutlak minimumu bulunmaktadır. Bunu bulun.

- T** b. Fonksiyonun grafiğini çizin ve gördüklerinizi (a)'daki yanıtınızla karşılaştırın.

59. a. $y = \sqrt{x}$ eğrisi $(3/2, 0)$ noktasına ne kadar yaklaşır? (Yol gösterme: Uzaklığın karesini minimize ederseniz, kareköklerden kurtulursunuz)

- T** b. $y = \sqrt{x}$ 'i ve uzaklık fonksiyonunu birlikte çizin ve gördüklerinizi (a)'daki cevabınızla bağdaştırın.



60. a. $y = \sqrt{16 - x^2}$ yarıçemberi $(1, \sqrt{3})$ noktasına ne kadar yaklaşır?

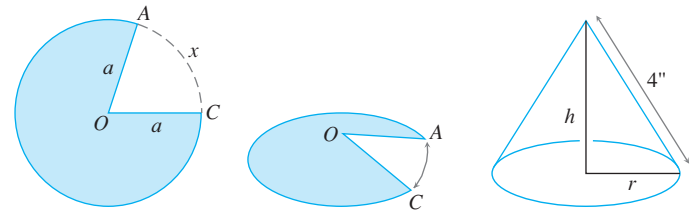
- T** b. $y = \sqrt{16 - x^2}$ 'i ve uzaklık fonksiyonunu birlikte çizin ve gördüklerinizi (a)'daki cevabınızla bağdaştırın.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

61 ve 62 alıştırmalarında bir BCS kullanmak faydalı olabilir.

61. **Genelleştirilmiş koni problemi** Yüksekliği h ve yarıçapı r olan bir koni, yarıçapı a inç olan yassı bir dairesel diskten, yay uzunluğu x inç olan bir AOC dilimi çıkarılarak ve sonra OA ve OC kenarları birleştirilerek yapılmıştır.

- a. Koninin hacmi V 'nin bir formülünü x ve a cinsinden bulun.
b. $a = 4, 5, 6, 8$ için, maksimum hacimli konide r ve h 'yi bulun.
c. Maksimum hacimli koni için, r ve h arasında a 'dan bağımsız basit bir bağıntı bulun.

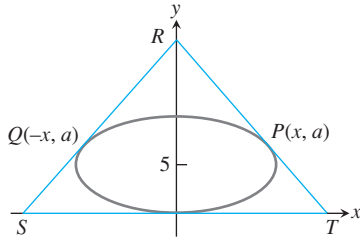


ÖLÇEKLİ DEĞİL

62. **Bir elipsi sınırlamak** $P(x, a)$ ve $Q(-x, a)$ $(0, 5)$ merkezli

$$\frac{x^2}{100} + \frac{(y - 5)^2}{25} = 1$$

elipsin üst yarısı üzerinde iki nokta olsun. Elipsin P ve Q noktalarındaki teğetler kullanılarak, şekilde gösterildiği gibi, bir RST üçgeni oluşturuluyor.



- a. $y = f(x)$ elipsin üst yarısını temsil eden fonksiyon olmak üzere, üçgenin alanının

$$A(x) = -f'(x) \left[x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right]^2$$

olduğunu gösterin.

- b. A 'nın tanım kümesi nedir? Grafiğin asimptotları problemin konusu ile nasıl ilişkilidir?
- c. En küçük alanlı üçgenin yüksekliğini belirleyin. Elips merkezinin y koordinatıyla nasıl ilişkilidir?
- d. (a), (b) ve (c) şıklarını, $(0, 13)$ merkezli

$$\frac{x^2}{C^2} + \frac{(y - B)^2}{B^2} = 1$$

elipsi için tekrarlayın. Yükseklik $3B$ iken, üçgenin alanının minimum olduğunu gösterin.

4.6

Belirsiz Şekiller ve L'Hôpital Kuralı

TARİHSEL BİYOGRAFI

Guillaume François
Antoine de l'Hôpital
(1661–1704)

Onyedinci yüzyılın sonlarında, John Bernoulli hem payları hem de paydaları sıfıra veya $+\infty$ giden kesirlerin limitlerini bulmak için bir yol keşfetti. Kural günümüzde, kuralın ilk kez basılı olarak yayınlandığı ilk diferansiyel analize giriş kitabını yazan bir Fransız soy-lusunun, Guillaume François **Antoine de l'Hôpital**'in adıyla l'Hôpital Kuralı olarak bilin-mektedir.

0/0 Belirsiz Şekli

$f(x)$ ve $g(x)$ sürekli fonksiyonlarının ikisi de $x = a$ 'da sıfırsa,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$x = a$ yazılarak bulunamaz. Bunu yazmak 0/0 verir ki bu da **belirsiz form** olarak adlandırılan, hesaplayamadığımız anlamsız bir ifadedir. Bazen, fakat her zaman değil, belirsiz formlara yol açan limitler kısaltma, terimleri yeniden düzenlenme veya başka cebirsel işlemler yardımıyla bulunabilir. Bu, Bölüm 2'den edindiğimiz tecrübedir. Bölüm 2.4'te $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x$ 'i bulmak önemli ölçüde analiz gerektirdi. Fakat türevleri hesapladığımız ve $x = a$ yazdığımızda her zaman 0/0'ın eşdeğerini veren

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

limitinde hatırı sayılır bir başarı gösterdik. l'Hôpital kuralı türevlerle sağladığımız başarıyı, belirsiz formlara yol açan limitleri hesaplarken kullanmamızı sağlar.

TEOREM 6 L'Hôpital Kuralı (Birinci Şekil)

$f(a) = g(a) = 0$ olduğunu, $f'(a)$ ve $g'(a)$ 'nın var olduğunu ve $g'(a) \neq 0$ olduğunu varsayın. Bu durumda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

olur.

Dikkat

f/g 'ye L'Hôpital Kuralını uygulamak için, f 'nin türevini g 'nin türevine bölün. f/g 'nin türevini alma tuzağına düşmeyin. Kullanılacak bölüm f'/g' 'dür, $(f/g)'$ değil.

İspat Kendileri de birer limit olan $f'(a)$ ve $g'(a)$ 'dan geriye doğru gidersek,

$$\begin{aligned}\frac{f'(a)}{g'(a)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}\end{aligned}$$

buluruz.

ÖRNEK 1 L'Hôpital Kuralını Kullanmak

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{x} = \frac{3 - \cos x}{1} \Big|_{x=0} = 2$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

Bazen, bir türev alma işleminden sonra, Örnek 2 de gördüğümüz gibi, yeni pay ve payda'nın ikisi birden $x = a$ da sıfırdır. Bu durumda L'Hôpital Kuralının daha kuvvetli bir şeklini uygulayız.

TEOREM 7 L'Hôpital Kuralı (Daha Kuvvetli Şekil)

$f(a) = g(a) = 0$ olduğunu, f ile g 'nin a noktasını içeren bir I açık aralığında türevlenebilir olduklarını varsayın. Ayrıca $x \neq a$ ise, I 'da $g'(x) \neq 0$ olduğunu varsayın. Bu durumda, sağdaki limitin var olması koşuluyla

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olur.

Teorem 7'yi ispatlamadan önce bir örneği inceleyelim.

ÖRNEK 2 L'Hôpital Kuralının Kuvvetli Şeklini Uygulamak

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1/2)(1+x)^{-1/2} - 1/2}{2x}$$

Hala $\frac{0}{0}$; tekrar türev alın.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1/4)(1+x)^{-3/2}}{2} = -\frac{1}{8}$$

$\frac{0}{0}$ değil; limit bulundu.

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$$

Hala $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x}$$

Hala $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

$\frac{0}{0}$ değil; limit bulundu. ■

TARİHSEL BİYOGRAFI

Augustin-Louis Cauchy
(1789–1857)

L'Hôpital Kuralının kuvvetli şeklinin ispatı, Cauchy'nin Ortalama Değer Teoremine dayanır. Bir fonksiyon yerine iki fonksiyon içeren bir Ortalama Değer Teoremi. Önce Cauchy Teoremini ispat ediyoruz ve sonra nasıl L'Hôpital Kuralına yol açtığını gösteriyoruz.

TEOREM 8 Cauchy Ortalama Değer Teoremi

f ve g fonksiyonlarının $[a, b]$ aralığında sürekli, (a, b) 'de türevlenebilir olduklarını ve ayrıca (a, b) 'de $g'(x) \neq 0$ olduğunu varsayın. Bu durumda, (a, b) 'de

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

olacak şekilde bir c sayısı bulunur.

İspat Bölüm 4.2'deki Ortalama Değer Teoremini iki kere uyguluyoruz. İlk olarak, $g(a) \neq g(b)$ olduğunu göstermek için kullanırız. Eğer $g(a) = g(b)$ olsaydı, Ortalama Değer Teoremi, a ile b arasındaki bir c sayısı için

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0$$

verirdi. Oysa (a, b) 'de $g'(x) \neq 0$ olduğu için, bu doğru olamaz.

Sonra, Ortalama Değer Teoremini

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)]$$

fonksiyonuna uyguluyoruz. Bu fonksiyon f ve g ile aynı yerlerde sürekli ve türevlenebilirdir ve $F(b) = F(a) = 0$ 'dır. Dolayısıyla a ve b arasında $F'(c) = 0$ olduğu bir c sayısı vardır. f ve g cinsinden ifade edildiğinde bu denklem

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g'(c)] = 0$$

veya

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

haline dönüşür.

Şuna dikkat edin, Bölüm 4.2'deki Ortalama Değer Teoremi, $g(x) = x$ ile Teorem 8 dir.

Cauchy Ortalama Değer Teoremi'nin, $x = (t)$ ve $y = f(t)$ parametrik denklemleri ile tanımlanan bir C eğrisi için bir geometrik yorumu vardır. Bölüm 3.5 Denklem (2) den, parametrik eğrinin t deki eğimi

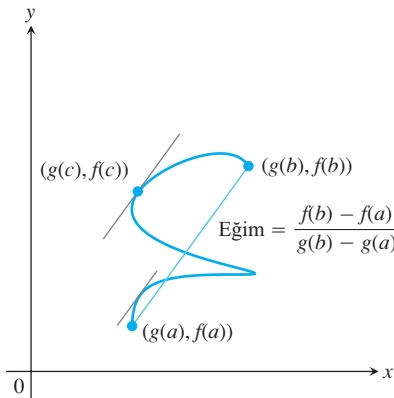
$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

ile verilir, bundan dolayı $f'(c)/g'(c)$, $t = c$ için eğrinin teğetinin eğimidir. C üzerindeki $(g(a), f(a))$ ve $(g(b), f(b))$ noktalarını birleştiren kirişin eğimi

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

dır. Teorem 8, (a, b) aralığında, eğrinin $(g(c), f(c))$ 'deki teğetinin eğiminin, $(g(a), f(a))$ ve $(g(b), f(b))$ noktalarını birleştiren kirişin eğimi ile aynı olduğu, bir c parametre değerinin var olduğunu söyler. Bu geometrik sonuç Şekil 4.42 de gösterilmiştir. Parametrenin, bu şekilde birden fazla c değerinin olabileceğine dikkat edin.

Şimdi Teorem 7'yi ispat edelim.



ŞEKİL 4.42 $(g(c), f(c))$ 'deki teğetinin eğiminin, $(g(a), f(a))$ ve $(g(b), f(b))$ noktalarını birleştiren kirişin eğimi ile aynı olduğu en az bir $t = c$, $a < c < b$ parametre değeri vardır.

L'Hôpital Kuralının Daha Kuvvetli Şeklinin İspatı Önce limit denklemini $x \rightarrow a^+$ durumu için gerçekleriz. Bu yöntemi $x \rightarrow a^-$ 'ye uygulamak için neredeyse hiç değişikliğe gerek yoktur ve bu iki durumun birleştirilmesi sonucu verir.

x 'in a 'nın sağında bulunduğunu varsayın. Bu durumda $g'(x) \neq 0$ olur ve a 'dan x 'e kadar olan kapalı aralıkta Cauchy Ortalama Değer Teoremini uygulayabiliriz. Bu adım, a ile x arasında

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)},$$

olacak şekilde bir c sayısı sağlar. Ama $f(a) = g(a) = 0$ 'dır, dolayısıyla

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

olur. x a 'ya yaklaşırken, c de a 'ya yaklaşır çünkü x ile a arasındadır. Böylece

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olur. Bu l'Hôpital kuralını x 'in a 'ya üstten yaklaştığı durum için doğrular. x 'in a 'ya alttan yaklaştığı durum ise Cauchy Ortalama Değer Teoremini $[x, a]$, $x < a$, kapalı aralığına uygulanarak ispatlanır. ■

Gerçek hayatta karşılaşılan bir çok fonksiyon ve bu kitaptaki bir çok fonksiyon, l'Hôpital kuralının koşullarını sağlar.

L'Hôpital Kuralını Kullanmak

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limitini l'Hôpital kuralı ile bulmak için, $x = a$ da $0/0$ formunu elde ettiğiniz sürece f ve g 'nin türevlerini almaya devam edin. Fakat, bu türevlerden biri veya öteki $x = a$ da sıfırdan farklı olduğunda türev almayı durdururuz. Payın veya paydanın sıfırdan farklı sonlu bir limitinin olması durumunda l'Hôpital Kuralı uygulanamaz.

ÖRNEK 3 L'Hôpital Kuralının Kuvvetli Şeklinin Yanlış Uygulanması

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + 2x} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} 0 \\ 0 \text{ değil; limit bulundu} \end{array}$$

Buraya kadar hesaplama doğrudur, fakat l'Hôpital kuralını bir kere daha uygulamak için türev almaya devam edersek,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

buluruz, ki bu da yanlıştır. L'Hôpital Kuralı sadece belirsiz şekiller veren limitlere uygulanabilir ve $0/1$ bir belirsiz şekil değildir. ■

Teorem 7'nin ispatından açıkça görüldüğü gibi, l'Hôpital kuralı, ayrıca tek taraflı limitlere de uygulanır.

ÖRNEK 4 l'Hôpital Kuralının Tek-Taraflı Limitlerle Kullanmak

∞ ve $+\infty$ 'un aynı şey demek olduğunu hatırlayın.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{2x} = \infty \quad x > 0 \text{ için pozitif} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x^2} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{2x} = -\infty \quad x < 0 \text{ için negatif} \end{aligned}$$

∞/∞ , $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$ Belirsiz Şekilleri

Bazen, $x = a$ yazarak $x \rightarrow a$ iken limit hesaplamaya çalıştığımızda, $0/0$ yerine ∞/∞ , $\infty \cdot 0$ veya $\infty - \infty$ gibi ne olduğu belirsiz ifadeler elde ederiz. Önce ∞/∞ formunu ele alıyoruz.

Daha ileri seviyede kitaplarda l'Hôpital Kuralının $0/0$ 'a olduğu gibi ∞/∞ 'a uygulandığı da ispatlanmaktadır. $x \rightarrow a$ iken $f(x) \rightarrow \pm\infty$ ve $g(x) \rightarrow \pm\infty$ ise, sağdaki limitin var olması koşuluyla

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dir. $x \rightarrow a$ notasyonunda a sonlu veya sonsuz olabilir. Ayrıca, $x \rightarrow a$ ifadesi $x \rightarrow a^+$ veya $x \rightarrow a^-$ tek taraflı limitleri ile değiştirilebilir.

ÖRNEK 5 ∞/∞ Belirsiz Şekli ile Çalışmak

$$\text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x}{1 + \tan x}$$

$$\text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2}{3x^2 + 5x}$$

limitlerini bulun.

Çözüm

(a) Pay ve payda $x = \pi/2$ 'de süresizdir, bu yüzden burada tek taraflı limitleri inceleriz. l'Hôpital Kuralını uygulamak için, bir uç noktası $x = \pi/2$ olan herhangi bir I açık aralığı seçebiliriz.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\sec x}{1 + \tan x} & \quad \text{soldan } \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \sin x = 1 \end{aligned}$$

Bir belirsiz şekil olarak $(-\infty)/(-\infty)$ ile sağdan türevde 1 dir. Bu nedenle, iki taraflı limit 1'e eşittir.

$$\text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2}{3x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 4x}{6x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Şimdi dikkatimizi $\infty \cdot 0$ ve $\infty - \infty$ belirsiz şekillerine çeviriyoruz. Bazen bu şekiller, cebirsel işlemler yardımıyla $0/0$ veya ∞/∞ belirsiz şekillerine dönüştürülmek üzere ele alınabilir. Burada yine, $\infty \cdot 0$ 'ın veya $\infty - \infty$ 'un birer sayı olduğunu ileri sürmek niyetinde değiliz. Bunlar sadece, limitleri düşünürken fonksiyonların davranışlarını tanımlayan notasyonlardır. Bu belirsiz şekillerle nasıl çalışmamız gerektiğini gösteren örnekler aşağıdadır.

ÖRNEK 6 $\infty \cdot 0$ Belirsiz Şekli ile Çalışmak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right)$$

limitini bulun.

Çözüm

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) & \quad \infty \cdot 0 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{h} \sin h \right) \quad h = 1/x. \\ &= 1 \end{aligned}$$

ÖRNEK 7 $\infty - \infty$ Belirsiz Şekli ile Çalışmak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

limitini bulun.

Çözüm $x \rightarrow 0^+$ ise $\sin x \rightarrow 0^+$ dir ve

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \rightarrow \infty - \infty$$

olur. Benzer şekilde $x \rightarrow 0^-$ ise $\sin x \rightarrow 0^-$ dir ve

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \rightarrow -\infty - (-\infty) = -\infty + \infty$$

olur. İki şekilde limitte ne olduğunu göstermez. Limiti bulmak için, önce kesirleri birleştiririz:

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} \quad \text{ortak payda } x \sin x \text{ dir.}$$

Sonra, sonuca l'Hôpital Kuralını uyguluyoruz:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \quad \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \quad \text{Hala } \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

ALİŞTIRMALAR 4.6

Limitleri Bulmak

1–6 alıştırmalarında, limiti bulmak için l'Hôpital Kuralını kullanın. Sonra, limiti Bölüm 2'de öğrendiğimiz bir yöntemle hesaplayın.

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-3x}{7x^2+1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{4x^3-x-3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+3x}{x^3+x+1}$$

l'Hôpital Kuralını Uygulamak

7–26 alıştırmalarındaki limitleri l'Hôpital kuralıyla bulun.

$$7. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t^2}{t}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2x-\pi}{\cos x}$$

$$9. \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{\sin \theta}{\pi - \theta}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{x - \pi/4}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\cos x - 0.5}{x - \pi/3}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow (\pi/2)} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \tan x$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x + 7\sqrt{x}}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - (3x+1)\sqrt{x} + 2}{x-1}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a(a+x)} - a}{x}, \quad a > 0$$

$$18. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{10(\sin t - t)}{t^3}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cos x - 1)}{\sin x - x}$$

$$20. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$$

$$21. \lim_{r \rightarrow 1} \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \quad n \text{ pozitif bir tam sayı}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \infty} x \tan \frac{1}{x}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x-5}{2x^2-x+2}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\tan 11x}$$

Teori ve Uygulamalar

l'Hôpital Kuralının 27–30 alıştırmalarındaki limitlere yardımı olmaz. Deneyin; bir döngü içinde kalırsınız. Limitleri bir başka yolla bulun.

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\sec x}{\tan x}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot x}{\csc x}$$

31. Hangisi doğru, hangisi yanlıştır? Cevabınızı açıklayın.

$$a. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{2x} = \frac{1}{6}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-3} = \frac{0}{6} = 0$$

32. ∞/∞ Şekli $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ olan ve aşağıdakileri sağlayan türevlenebilir iki f ve g fonksiyonu bulun.

$$a. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$$

$$b. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$c. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

33. **Süreklili genişleme** Aşağıdaki fonksiyonu $x = 0$ da sürekli kıla-
cak bir c değeri bulun. c değerinizin neden işe yaradığını açıkla-
yın.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9x - 3 \sin 3x}{5x^3}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

34. $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ve $g(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ olsun.

$$a. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 \quad \text{fakat} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$$

olduğunu gösterin.

b. Bunun neden l'Hôpital Kuralı ile çelişmediğini açıklayın.

T 35. **0/0 Şekli** Grafik çizerek

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - (3x+1)\sqrt{x} + 2}{x-1}$$

limiti için bir tahminde bulunun. Sonra tahmininizi l'Hôpital Kuralı ile doğrulayın.

T 36. **$\infty - \infty$ Şekli**

a. $f(x) = x - \sqrt{x^2 + x}$ 'in grafiğini uygun, geniş bir x değerleri aralığında çizerek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$$

limiti için tahminde bulunun.

b. Şimdi, limiti l'Hôpital Kuralı ile bularak tahmininizi doğrula-
yın. İlk adım olarak, $f(x)$ 'i $(x + \sqrt{x^2 + x}) / (x + \sqrt{x^2 + x})$
kesri ile çarpın ve yeni pay'ı sadeleştirin.

T 37. $f(x) = \frac{1 - \cos x^6}{x^{12}}$ olsun. f 'nin bazı grafiklerinin $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

limiti hakkında neden yanlış bilgi verdiğini açıklayın. (İpucu: $[-1, 1]$ 'e $[-0.5, 1]$ çerçevesini deneyin)

38. Aşağıda verilen fonksiyonlar ve aralıklar için, Cauchy Ortalama Değer Teoreminin sonucunu sağlayan bütün c değerlerini bulun.

a. $f(x) = x, \quad g(x) = x^2, \quad (a, b) = (-2, 0)$

b. $f(x) = x, \quad g(x) = x^2, \quad (a, b)$ keyfi

c. $f(x) = x^3/3 - 4x, \quad g(x) = x^2, \quad (a, b) = (0, 3)$

39. Şekilde, çemberin OA yarıçapı 1 dir ve AB çembere A da teğettir. AC yayının radyan ölçüsü ve AB doğru parçasının uzunluğu θ . B ve C den geçen doğru, x -eksenini $P(x, 0)$ noktasında kesmektedir.

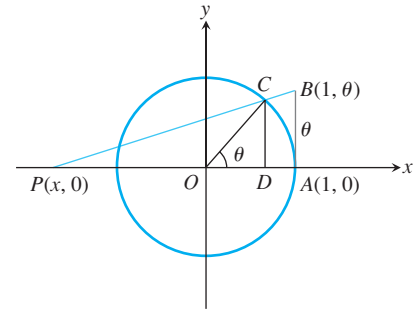
a. PA uzunluğunun

$$1 - x = \frac{\theta(1 - \cos \theta)}{\theta - \sin \theta}$$

b. $\lim_{\theta \rightarrow 0} (1 - x)$ 'i bulun.

c. $\lim_{\theta \rightarrow \infty} [(1 - x) - (1 - \cos \theta)] = 0$ olduğunu gösterin.

Bunu geometrik olarak yorumlayın.

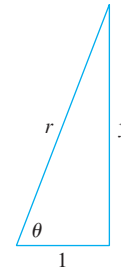


40. Bir dik üçgenin bir dik kenarının uzunluğu 1, diğerinin uzunluğu y ve hipotenüsünün uzunluğu r dir. y 'nin karşısındaki açının radyan ölçüsü θ dir. $\theta \rightarrow \pi/2$ iken aşağıdaki limitleri bulun.

a. $r - y$.

b. $r^2 - y^2$.

c. $r^3 - y^3$.



4.7

Newton Yöntemi

TARİHSEL BİYOGRAFI

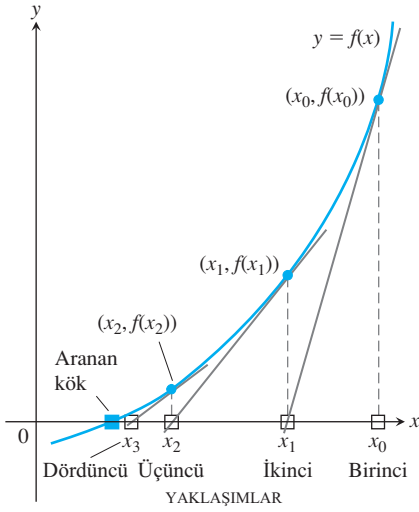
Niels Henrik Abel
(1802–1829)

Matematiğin temel problemlerinden biri denklemler çözmektir. Kuadratik kök formülünü kullanarak, $x^2 - 3x + 2 = 0$ denklemini sağlayan bir noktayı (çözümü) nasıl bulacağımızı biliyoruz. Kübik ve dördüncü dereceden denklemleri (3. veya 4. dereceden polinomlar) çözmek için de daha karmaşık formüller vardır, fakat Norveçli matematikçi Neils Abel beşinci dereceden polinomları çözmek için basit formüllerin bulunmadığını gösterdi. Ayrıca, $\sin x = x^2$ gibi, hem transandant fonksiyonlar ve hem de polinomlar veya başka cebirsel fonksiyonlar içeren denklemleri çözmek için de basit formüller yoktur.

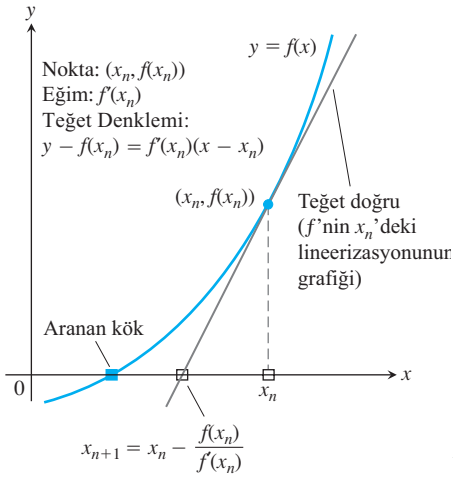
Bu bölümde, *Newton yöntemi*, ya da *Newton-Raphson yöntemi* denen ve bir $f(x) = 0$ denkleminin çözümüne yaklaşmak için bir teknik olan bir sayısal yöntem çalışacağız. Aslında bu yöntem, f 'nin sıfır olduğu noktaların yakınlarında $y = f(x)$ grafiğinin yerine teğetleri kullanır (f 'nin sıfır olduğu bir x değeri, f fonksiyonunun bir kökü ve $f(x) = 0$ denkleminin bir çözümüdür).

Newton Yönteminin İşleyişi

Bir $f(x) = 0$ denkleminin bir çözümünü tahmin ederken Newton yönteminin amacı çözüme yaklaşan bir yaklaşımlar dizisi üretmektir. Dizinin birinci sayısı x_0 'ı seçeriz. Sonra, uygun koşullar altında, yöntem f 'nin grafiğinin x eksenini kestiği bir noktaya doğru adım adım ilerleyerek geri kalanını halleder (Şekil 4.43).



ŞEKİL 4.43 Newton yöntemi bir x_0 başlangıç tahmini ile başlar ve (uygun durumlarda) bir zaman aralığında tahmini bir adım geliştirir.



ŞEKİL 4.44 Newton yönteminin art arda adımlarının geometrisi. Eğri üzerinde x_n 'den yukarı doğru çıkar ve teğeti aşağı doğru izleyerek x_{n+1} 'i buluruz.

Yöntem, her adımda lineerizasyonlarından birinin sıfırı ile f 'nin sıfırına yaklaşır. Nasıl çalıştığı aşağıdadır.

Başlangıç tahmini, x_0 grafik çizerek veya sadece tahmin edilerek seçilebilir. Yöntem daha sonra $y = f(x)$ eğrisinin $(x_0, f(x_0))$ noktasındaki teğetini, eğriye yaklaşımda bulunmakta kullanır ve teğetin x eksenini kestiği noktaya x_1 der (Şekil 4.43). x_1 noktası genelde çözüme x_0 'dan daha yakındır. Eğrinin $(x_1, f(x_1))$ noktasındaki teğetinin x -eksenini kestiği nokta olan x_2 noktası dizideki bir sonraki yaklaşımdır. Her yaklaşımı bir sonrakini hesaplamada kullanıp, köke yeterince yaklaşıp durabilecek noktaya gelene dek bu işe devam ederiz.

Art arda yaklaşımları üretmek için aşağıdaki şekilde bir formül geliştirebiliriz. x_n yaklaşımı verilmişse, eğrinin $(x_n, f(x_n))$ noktasındaki teğetinin nokta-eğim denklemi

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

dir. Teğetin x eksenini kestiği noktayı $y = 0$ yazarak buluruz (Şekil 4.44).

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x - x_n$$

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$f'(x_n) \neq 0$ ise

x 'in bu değeri bir sonraki yaklaşım olan x_{n+1} 'dir.

Burada Newton'un metodunun bir özeti vardır.

Newton Yönteminin İşleyişi

1. $f(x) = 0$ denkleminin bir köküne bir ilk yaklaşım için bir tahminde bulunun. Bir $y = f(x)$ grafiği size yardımcı olacaktır.
2. İlk yaklaşımı kullanarak bir ikincisini, ikinciyi kullanarak üçüncüsünü ve bu şekilde devam ederek kökü bulmak için aşağıdaki denklemi kullanın.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0 \text{ ise} \quad (1)$$

Newton Yöntemini Uygulama

Newton yönteminin uygulamaları genellikle, bunları bilgisayar veya hesap makinelerine daha uygun hale getiren, çok sayıda sayısal hesaplamalar içerir. İlk örneğimizde $\sqrt{2}$ 'ye ondalık yaklaşımları $f(x) = x^2 - 2 = 0$ denkleminin pozitif kökünü tahmin ederek bulacağız. Yine de, hesaplamalar elle yapıldığında dahi (çok sıkıcı olabilir), denklemlerin çözümlerini bulmak için güçlü bir yol verirler.

İlk örneğimizde $f(x) = x^2 - 2 = 0$ denkleminin pozitif kökünü tahmin ederek $\sqrt{2}$ 'ye ondalık yaklaşımlar bulacağız.

ÖRNEK 1 2'nin Kare Kökünü Bulmak

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

denkleminin pozitif kökünü bulun.

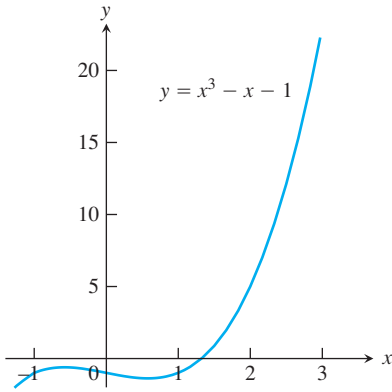
Çözüm $f(x) = x^2 - 2$ ve $f'(x) = 2x$ ile, (1) denklemi

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \\ &= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \\ &= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \end{aligned}$$

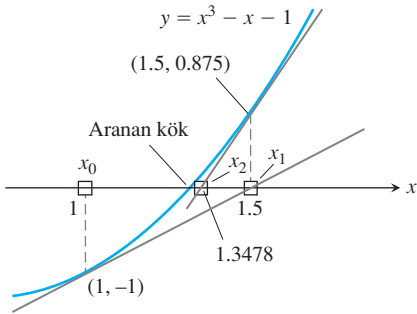
halini alır.

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

denklemi, her yaklaşımdan bir sonrakine birkaç tuşa basarak ulaşmamızı sağlar. $x_0 = 1$ başlangıç değeri ile, aşağıdaki tablonun ilk sütunundaki sonuçları elde ederiz (5 ondalık basamağa kadar, $\sqrt{2} = 1.41421$ 'dir).



ŞEKİL 4.45 $f(x) = x^3 - x - 1$ fonksiyonunun grafiği x -eksenini bir defa keser; bu bulmak istediğimiz köktür. (Örnek 2).



ŞEKİL 4.46 Tablo 4.1'deki ilk üç x değeri (dört ondalığa kadar).

	Hata	Doğru rakam sayısı
$x_0 = 1$	-0.41421	1
$x_1 = 1.5$	0.08579	1
$x_2 = 1.41667$	0.00246	3
$x_3 = 1.41422$	0.00001	5

Newton yöntemi çok çabuk yakınsadığı için (bunun hakkında daha fazlası daha sonra) çoğu hesap makinesinin kök bulmakta kullandığı yöntemdir. Örnek 1'deki tablodaki aritmetik, 5 ondalık basamak yerine 13 ondalık basamağa kadar götürülseydi, bir adım daha gitmek $\sqrt{2}$ 'yi 10 dan daha fazla ondalık basamağa kadar doğru verecekti.

ÖRNEK 2 Newton Yöntemini Kullanmak

$y = x^3 - x$ eğrisinin $y = 1$ yatay doğrusunu kestiği noktanın x koordinatını bulun.

Çözüm Eğri doğruyu $x^3 - x = 1$ veya $x^3 - x - 1 = 0$ olduğunda keser. $f(x) = x^3 - x - 1$ ne zaman sıfır olur? $f(1) = -1$ ve $f(2) = 5$ olduğundan, Ara Değer Teoremine göre aralığında bir kökün var olduğunu biliyoruz (Şekil 4.45).

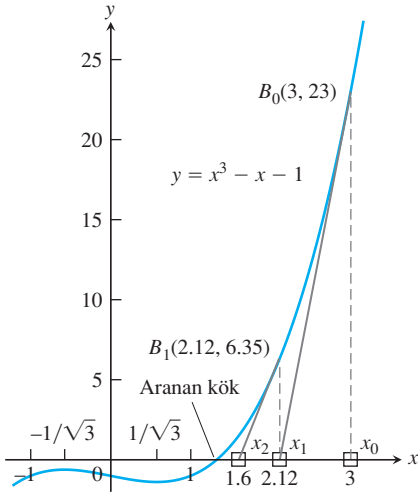
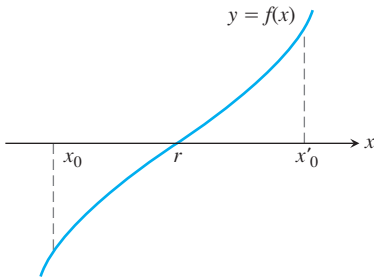
Newton yöntemini, $x_0 = 1$ başlangıç değeri ile f' 'ye uyguluyoruz. Sonuçlar Tablo 4.1 ve Şekil 4.6'da görülmektedir.

$n = 5$ iken, $x_6 = x_5 = 1.324717957$ sonucuna ulaşırız. $x_{n+1} = x_n$ olduğunda (1) denklemi $f(x_n) = 0$ olduğunu gösterir. $f(x) = 0$ 'ın 9 ondalık basamağa kadar çözümünü bulduk.

Şekil 4.7'de Örnek 2'deki işlemin $x_0 = 3$ ile eğri üzerindeki $B_0(3, 23)$ noktasından başlamış olabileceğini belirttik. B_0 noktası x ekseninden oldukça uzaktır, fakat B_0 'daki teğet x eksenini $(2.12, 0)$ yakınında keser, dolayısıyla x_1 x_0 'a göre daha gelişmiştir. $f(x) = x^3 - x - 1$ ve $f'(x) = 3x^2 - 1$ olmak üzere, (1) denklemini daha önceki gibi üst üste kullanırsak, 9 ondalıklı çözüm $x_7 = x_6 = 1.324717957$ 'yi yedi adımda doğrularız.

TABLO 4.1 $x_0 = 1$ ile $f(x) = x^3 - x - 1$ fonksiyonuna Newton yöntemini uygulamanın sonuçları

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	-1	2	1.5
1	1.5	0.875	5.75	1.3478 26087
2	1.3478 26087	0.1006 82173	4.4499 05482	1.3252 00399
3	1.3252 00399	0.0020 58362	4.2684 68292	1.3247 18174
4	1.3247 18174	0.0000 00924	4.2646 34722	1.3247 17957
5	1.3247 17957	-1.8672E-13	4.2646 32999	1.3247 17957

**ŞEKİL 4.47** $x = 1/\sqrt{3}$ 'ün sağındaki herhangi bir x_0 başlama değeri bizi köke götürecektir.**ŞEKİL 4.48** Newton yöntemi iki başlama noktasından da r 'ye yakınsayacaktır.

Şekil 4.47'deki eğrinin $x = -1/\sqrt{3}$ 'te yerel bir maksimumu ve $x = 1/\sqrt{3}$ 'te yerel bir minimumu vardır. x_0 bu noktalar arasındayken Newton yönteminden iyi bir sonuç alamayabiliriz, fakat $x = 1/\sqrt{3}$ 'ün sağındaki herhangi bir noktadan başlayarak sonucu elde ederiz. Bunu yapmak pek akıllıca olmaz ama B_0 'ın daha da sağından, örneğin $x_0 = 0$ 'dan da başlayabilirdik. Bu daha uzun sürerdi, fakat yine aynı sonuca yakınsardı.

Newton Yönteminin Yakınsaklığı

Pratikte, Newton yöntemi genellikle etkileyici bir hızla yakınsar, fakat bu garantili olmadığından yakınsamanın gerçekten bulunduğunu test etmeniz gerekir. Bunu yapmanın bir yolu fonksiyonu çizerek x_0 için uygun bir başlama değeri bulmaktır. $|f(x_n)|$ 'e değeri vererek fonksiyonun bir sıfırına yaklaşıp yaklaşmadığınızı test edebilir, $|x_n - x_{n+1}|$ 'i hesaplayarak yöntemin yakınsayıp yakınsamadığını kontrol edebilirsiniz.

Ancak, teori biraz yardım sağlar. İleri analizin bir teoremi bir r kökü civarında bir aralıktaki her x için

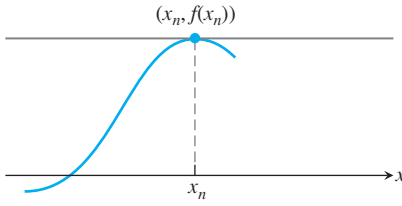
$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1 \quad (2)$$

ise, yöntemin bu aralıktaki herhangi bir x_0 başlama değeri için r 'ye yakınsayacağını söyler. f 'nin grafiği, x -eksenini kestiği noktanın yakınlarında çok yatay değilse bu koşulun sağlandığına dikkat edin.

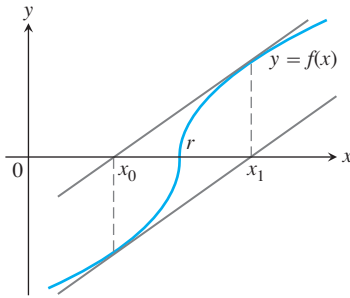
r ve x_0 r ile arasında, $f(x_0) > 0$ iken f 'nin grafiği yukarıya konkav, $f(x_0) < 0$ iken f 'nin grafiği aşağıya konkav ise Newton yöntemi daima yakınsar. (Bkz. Şekil 4.48.) Çoğu durumda, r köküne yakınsamanın hızı

$$\underbrace{|x_{n+1} - r|}_{\text{hata } e_{n+1}} \leq \frac{\max |f''|}{2 \min |f'|} |x_n - r|^2 = \text{sabit} \cdot \underbrace{|x_n - r|^2}_{\text{hata } e_n}, \quad (3)$$

ileri analiz formülü ile ifade edilir. Burada maks ve min, r 'yi içeren aralıktaki maksimum ve minimum değerleri göstermektedir. Formül, $n + 1$. adımdaki hatanın, bir sabit kere n . adımdaki hatanın karesinden büyük olmadığını söyler. Sabit, 1 den küçük veya eşit ise ve $|x_n - r| < 10^{-3}$ ise $|x_{n+1} - r| < 10^{-6}$ 'dır. Formül bir adımda üç ondalık basamak doğruluktan altı ondalık basamağa ilerler ve her başarılı adımda, doğruluk basamak sayısı ikiye katlanmaya devam eder.



ŞEKİL 4.49 $f'(x_n) = 0$ ise x_{n+1} 'i tanımlayacak bir kesim noktası yoktur.



ŞEKİL 4.50 Newton yöntemi yakınsamaz. r 'ye herhangi bir yaklaşıma elde etmeden x_0 'dan x_1 'e ve tekrar x_0 'a gidilir.

Fakat İşler Kötüye Gidebilir

$f'(x_n) = 0$ ise, Newton yöntemi durur (Şekil 4.49). Bu durumda, yeni bir başlama noktası deneyin. Elbette, f 'nin ve f' 'nin ortak bir kökü bulunabilir. Bunun böyle olup olmadığını belirlemek için, önce $f'(x) = 0$ 'ın çözümlerini bulabilir ve f 'yi bu değerlerde kontrol edebilirsiniz. Ya da f ve f' 'nü birlikte çizebilirsiniz.

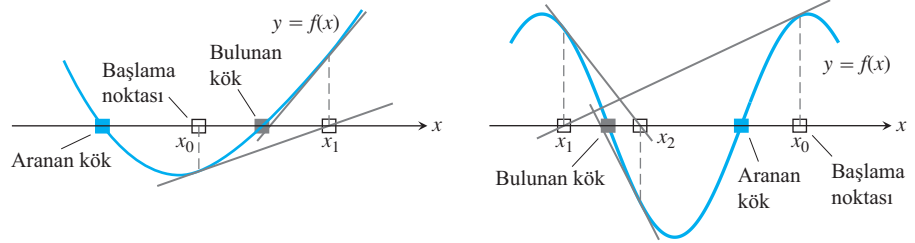
Newton yöntemi her zaman yakınsamaz. Örneğin,

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{r-x}, & x < r \\ \sqrt{x-r}, & x \geq r \end{cases}$$

ise, grafik Şekil 4.50'deki gibi olacaktır. $x_0 = r - h$ ile başlarsak, $x_1 = r + h$ buluruz ve art arda yaklaşımlar bu iki değer arasında gidip gelecektir. Herhangi bir iterasyon sayısı bizi aradığımız köke ilk tahminimizden daha fazla yaklaştırmaz.

Newton yöntemi yakınsarsa, bir köke yakınsar. Yinede dikkatli olun. Yöntemin yakınsar gibi görüldüğü ancak orada bir kök bulunmadığı durumlar bulunmaktadır. Neyse ki, böyle durumlar nadirdir.

Newton yöntemi bir köke yakınsarsa, bu düşündüğünüz kök olmayabilir. Şekil 4.51 bunun olabileceği iki durumu göstermektedir.



ŞEKİL 4.51 Çok uzaktan başlarsanız, Newton yöntemi aradığınız kökü bulamayabilir.

Fraktal Havuzlar ve Newton Yöntemi

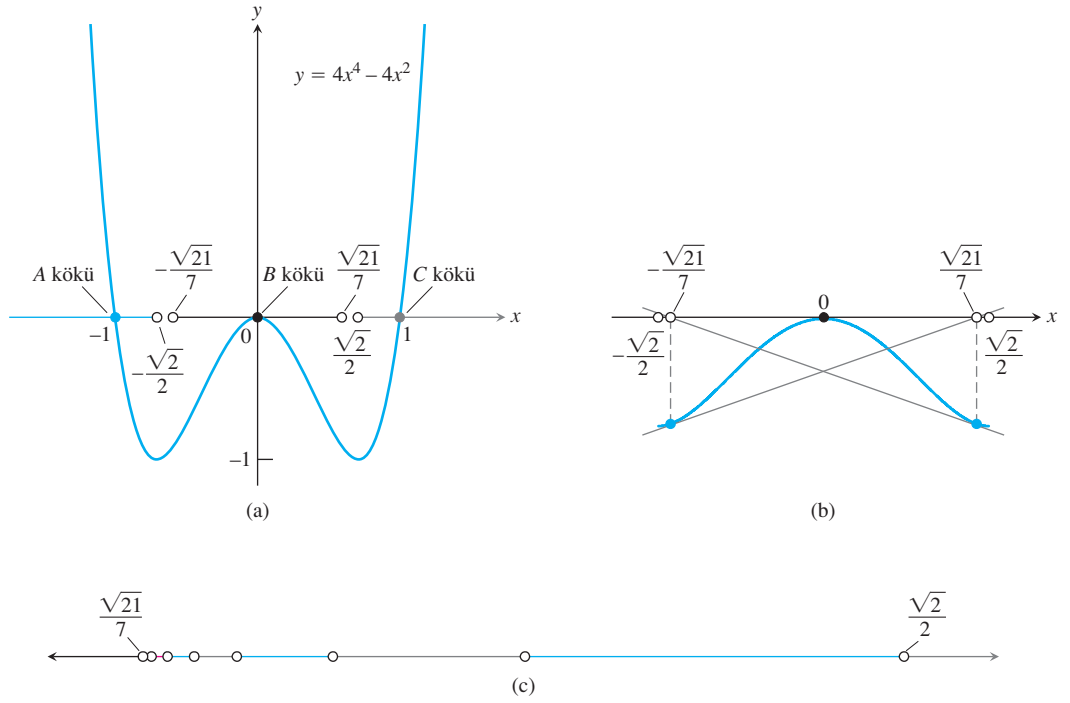
Newton yöntemiyle kök bulma işlemi kaotik olabilir, yani bazı denklemler için son çıktı başlama değerinin yerine fazlasıyla bağlı olabilir.

$4x^4 - 4x^2 = 0$ denklemi buna bir örnektir (Şekil 4.52a). x -eksenindeki mavi bölgedeki başlama değerleri A köküne giderler. Siyah bölgedeki başlama değerleri B köküne, kırmızı bölgedeki başlama değerleri ise C köküne giderler. $\pm \sqrt{2}/2$ noktaları yatay teğetleri verir. $\pm \sqrt{21}/7$ noktaları “dönerler”, yani ikisi de birbirini verir (Şekil 4.52b).

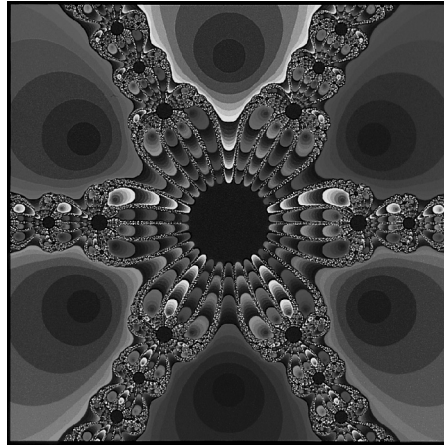
$\sqrt{21}/7$ ve $\sqrt{2}/2$ arasındaki aralık, C köküne giden noktaların açık aralıklarının arasında bulunan sonsuz sayıda A köküne giden noktaların açık aralıklarını içerir (Şekil 4.52c). Birbirini izleyen aralıkların sınır noktaları (bunlardan sonsuz sayıda vardır) köklere gitmeyip, bir değerden diğerine dönüp dururlar. Üstelik, $\sqrt{21}/7$ 'ye sağdan yaklaşan noktaları seçtiğimizde, hangi noktaların A 'ya, hangi noktaların C 'ye gittiklerini ayırt etmek oldukça güçleşir. $\sqrt{21}/7$ 'nin aynı tarafında, hedefleri birbirinden çok uzakta olan birbirlerine keyfi derecede yakın noktalar buluruz.

Kökleri diğer noktaların “çekicileri” olarak düşünürsek, Şekil 4.52'deki renklendirme çektikleri noktaların aralıklarını (“çekme aralıkları”) gösterir. A ve B kökleri arasındaki aralıkların, ya A 'ya ya da B 'ye çekileceklerini düşünebilirsiniz, fakat gördüğümüz gibi, durum böyle değildir. A ve B arasında C 'ye çekilen noktaların sonsuz sayıda aralığı vardır. Aynı şekilde, B ile C arasında da A 'ya çekilen noktaların sonsuz sayıda aralığı bulunmaktadır.

Newton yöntemini kompleks $z^6 - 1 = 0$ denklemini çözmek için kullandığımızda daha dramatik bir kaotik davranış örneğiyle karşılaşırız. Bu denklemin altı çözümü vardır: 1, -1, ve dört kompleks sayı, $\pm(1/2) \pm (\sqrt{3}/2)i$.



ŞEKİL 4.52 (a) $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$, $(-\sqrt{21}/7, \sqrt{21}/7)$ ve $(\sqrt{2}/2, \infty)$ 'daki başlama değerleri sırasıyla A , B ve C köklerini verir. (b) $x = \pm\sqrt{21}/7$ değerleri sadece birbirini verir. (c) $\sqrt{21}/7$ ve $\sqrt{2}/2$ değerleri arasında, C 'ye giden noktaların açık aralıkları arasında yer alan sonsuz sayıda A 'ya giden değerlerin açık aralığı bulunur. Bu davranış $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{21}/7)$ aralığında da görülür.



ŞEKİL 4.53 Bilgisayarla üretilen bu başlangıç değer portresi, $z^6 - 1 = 0$ denklemini çözmek için Newton yöntemi kullanıldığında, kompleks düzlemdeki farklı noktaların başlama değeri olarak kullanıldıklarında nereye gittiklerini göstermek için renklendirilmiştir. Kırmızı noktalar 1 'e, yeşil noktalar $(1/2) + (\sqrt{3}/2)i$ 'ye, koyu mavi noktalar $(-1/2) + (\sqrt{3}/2)i$ 'ye gider ve böyle devam eder. 32 adımdan sonra bir kökün 0.1 birim yakınına ulaşmayan diziler yaratan başlama noktaları siyahla gösterilmiştir.

Şekil 4.53'ün (bundan önceki sayfada) gösterildiği gibi, altı kökten her birinin sonsuz sayıda çekim “havuzu” vardır (Ek 5). Kırmızı havuzlardaki başlama noktaları 1 köküne çekilirler, yeşil havuzdakiler $(1/2) + (\sqrt{3}/2)i$, köküne çekilirler ve böyle devam eder. Her havuzun karmaşık şekli art arda büyütme altında kendini sonsuza kadar tekrar eden bir sınırı vardır.

ALİŞTIRMALAR 4.7

Kök Bulmak

1. Newton yöntemini kullanarak $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin çözümlerini tahmin edin. Soldaki çözüm için $x_0 = -1$ ve sağdaki çözüm için $x_0 = 1$ ile başlayın. Sonra, her iki durumda da x_2 'yi bulun.
2. Newton yöntemiyle $x^3 + 3x + 1 = 0$ denkleminin tek reel kökünü tahmin edin. $x_0 = 0$ ile başlayın ve x_2 'yi bulun.
3. Newton yöntemiyle $f(x) = x^4 + x - 3$ fonksiyonunun iki sıfırını tahmin edin. Soldaki sıfır için $x_0 = -1$ ve sağdaki sıfır için $x_0 = 1$ ile başlayın. Sonra, her iki durumda da x_2 'yi bulun.
4. Newton yöntemiyle $f(x) = 2x - x^2 + 1$ fonksiyonunun iki sıfırını tahmin edin. Soldaki sıfır için $x_0 = 0$ ve sağdaki sıfır için $x_0 = 2$ ile başlayın. Sonra, her iki durumda da x_2 'yi bulun.
5. Newton yöntemiyle, 2'nin pozitif dördüncü kökünü $x^4 - 2 = 0$ denklemini çözerek bulun. $x_0 = 1$ alın ve x_2 'yi bulun.
6. Newton yöntemiyle, 2'nin negatif dördüncü kökünü $x^4 - 2 = 0$ denklemini çözerek bulun. $x_0 = -1$ alın ve x_2 'yi bulun.

Teori, Örnekler ve Uygulamalar

7. **Bir kök tahmin etmek** İlk tahmininizde şanslı olduğunuzu varsayın, yani x_0 $f(x) = 0$ denkleminin çözümü olsun. $f'(x_0)$ 'in tanımlı olduğunu ve 0 olmadığını varsayarak, x_1 'e ve daha sonraki yaklaşımlara ne olur?
8. **pi'yi tahmin etmek** $\cos x = 0$ denklemini çözmek için Newton yöntemini kullanarak $\pi/2$ 'yi beş ondalık basamak hassaslıkta bulmayı düşünüyorsunuz. Başlama değerinizin ne olduğu fark eder mi? Yanıtınızı açıklayın.
9. **Salınım** $h > 0$ ise

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

denkleminde Newton yöntemini uygulamanın, $x_0 = h$ ise $x_1 = -h$ ve $x_0 = -h$ ise $x_1 = h$ vereceğini gösterin. Tersliğin nerede olduğunu gösteren bir resim çizin.

10. **Giderek kötüleşen yaklaşımlar** $x_0 = 1$ alarak $f(x) = x^{1/3}$ fonksiyonuna Newton yöntemini uygulayın ve x_1, x_2, x_3 ve x_4 'ü hesaplayın. $|x_n|$ için bir formül bulun. $n \rightarrow \infty$ iken, $|x_n|$ 'ye ne olur? Neler olduğunu gösteren bir şekil çizin.
11. Aşağıdaki dört ifadenin neden aynı bilgiye gerek duyduğunu açıklayın:
 - i) $f(x) = x^3 - 3x - 1$ 'in köklerini bulun.
 - ii) $y = x^3$ eğrisi ile $y = 3x + 1$ doğrusunun kesişim noktalarının x koordinatlarını bulun.

iii) $y = x^3 - 3x$ eğrisinin $y = 1$ yatay doğrusunu kestiği noktaların x koordinatlarını bulun.

iv) $g(x) = (1/4)x^4 - (3/2)x^2 - x + 5$ fonksiyonunun türevinin sıfır olduğu x değerlerini bulun.

12. **Bir gezegenin yerini bulmak** Bir gezegenin uzay koordinatlarını bulmak için, $x = 1 + 0.5 \sin x$ gibi denklemleri çözmemiz gerekir. $f(x) = x - 1 - 0.5 \sin x$ fonksiyonunun grafiğini çizmek fonksiyonun $x = 1.5$ civarlarında bir kökü olduğunu gösterir. Bu tahmini geliştirmek için Newton yönteminin bir uygulamasını kullanın. Yani, $x_0 = 1.5$ ile başlayarak x_1 'i bulun (Kökün değeri 5 ondalık basamağa kadar 1.49870'tir). Radyan kullanmayı unutmayın.

T 13. Bir grafik çizer üzerinde Newton yöntemini kullanmak için bir program $f(x) = x^3 + 3x + 1$ olsun. Newton yöntemindeki hesaplamalar için bir program

- a. $y_0 = f(x)$ ve $y_1 = \text{NDER } f(x)$ olsun.
- b. $x'e$ $x_0 = -0.3$ girin.
- c. Sonra $x'e$ $x - (y_0/y_1)$ girin ve Enter tuşuna tekrar tekrar basın. Sayılar f' 'nin sıfırına yaklaşırken izleyin.
- d. Farklı x_0 'lar için (b) ve (c) adımlarını tekrarlayın.
- e. Kendi denkleminizi yazın ve bunu Newton yöntemiyle çözmek için bu yaklaşımı kullanın. Cevaplarınızı, hesap makinesinin kendisinde bulunan, fonksiyonların sıfırlarını veren özelliğin verdiği cevaplarla karşılaştırın.

T 14. (Alıştırma 11'in devamı)

- a. $f(x) = x^3 - 3x - 1$ 'in iki negatif kökünü 5 ondalık basamağa kadar bulmak için Newton yöntemini kullanın.
- b. $f(x) = x^3 - 3x - 1$ 'in grafiğini $-2 \leq x \leq 2.5$ aralığında çizin. f' 'nin 5 ondalık basamağa kadar sıfırlarını tahmin etmek için ZOOM ve TRACE kullanın.
- c. $g(x) = 0.25x^4 - 1.5x^2 - x - 5$ 'in grafiğini çizin. Uygun ölçeklemeyle beraber ZOOM ve TRACE kullanarak 5 ondalık basamağa kadar grafiğin yatay teğetlerinin bulunduğu x değerlerini bulun.

T 15. Eğrileri Kesiştirmek $y = \tan x$ eğrisi $y = 2x$ doğrusunu $x = 0$ ile $x = \pi/2$ arasında keser. Newton yöntemini kullanarak tam yerini bulun.

T 16. Bir kuadratiğin gerçek çözümleri Newton yöntemini kullanarak $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$ denkleminin iki reel çözümünü bulun.

T 17. a. $\sin 3x = 0.99 - x^2$ denkleminin kaç çözümü vardır?
b. Bunları bulmak için Newton yöntemini kullanın.

T 18. Eğrileri Kesiştirmek

- a. $\cos 3x$ hiç x 'e eşit olur mu? Yanıtınızı açıklayın.
 b. Newton yöntemini kullanarak nerede olduğunu bulun.

T 19. $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ fonksiyonunun 4 reel kökünü bulun.**T 20. π 'yi tahmin etmek** $x_0 = 3$ ile $\tan x = 0$ denklemini çözmek için Newton yöntemini kullanarak, hesap makinenizin gösterdiği basamağa kadar π 'yi tahmin edin.

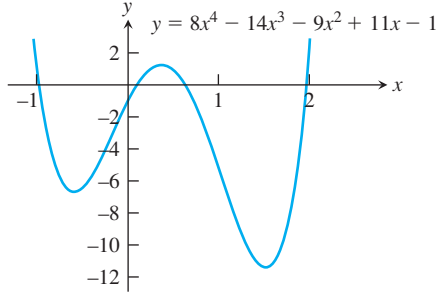
21. Hangi x değer(ler)inde $\cos x = 2x$ olur?

22. Hangi x değer(ler)inde $\cos x = -x$ olur?

23. Bölüm 2.6'daki Ara Değer Teoremini kullanarak, $f(x) = x^3 + 2x - 4$ 'ün $x = 1$ ve $x = 2$ arasında bir kökü olduğunu gösterin. Kökü 5 ondalık basamağa kadar bulun.

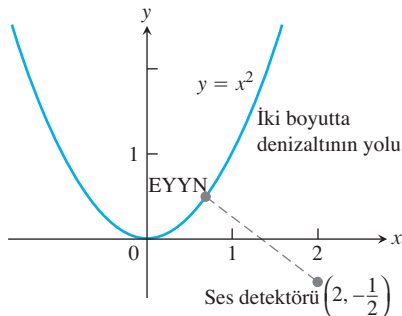
24. Dördüncü meretebe polinomu çarpanlara ayırmak Aşağıdaki çarpanlara ayırmada r_1 'den r_4 'e değerleri tahmin edin.

$$8x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 11x - 1 = 8(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4).$$

**T 25. Farklı sınırlara yakınsama** Verilen başlama değerlerini kullanarak $f(x) = 4x^4 - 4x^2$ fonksiyonunun sıfırlarını bulmak için Newton yöntemini kullanın (Şekil 4.52).

- a. $x_0 = -2$ ve $x_0 = -0.8$, $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$ içinde
 b. $x_0 = -0.5$ ve $x_0 = 0.25$, $(-\sqrt{21}/7, \sqrt{21}/7)$ içinde
 c. $x_0 = 0.8$ ve $x_0 = 2$, $(\sqrt{2}/2, \infty)$ içinde
 d. $x_0 = -\sqrt{21}/7$ ve $x_0 = \sqrt{21}/7$ de

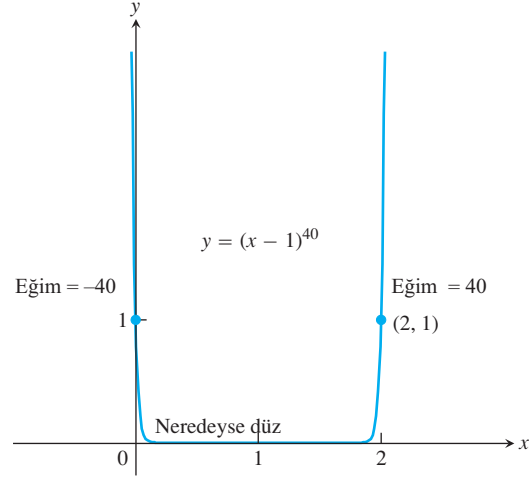
26. **Ses detektörü problemi** Denizaltı bulma problemlerinde, sık sık bir denizaltının su altındaki bir ses detektörüne en yakın yaklaşma noktasını (EYYN) bulmak gereklidir. Denizaltının $y = x^2$ parabolik yolunu izlediğini ve detektörün $(2, -1/2)$ noktasında bulunduğunu varsayın.



a. Denizaltı ve detektör arasındaki mesafeyi minimize eden x değerinin $x = 1/(x^2 + 1)$ denkleminin çözümü olduğunu gösterin.

b. $x = 1/(x^2 + 1)$ denklemini Newton yöntemiyle çözün.

27. **Kökünde neredeyse düz olan eğriler** Bazı eğriler o kadar düzdür ki, pratikte, Newton metodu kökten doğru bir yaklaşım veremeyecek kadar uzak bir yerde durur. $f(x) = (x - 1)^{40}$ fonksiyonuna $x_0 = 2$ başlama değeriyle Newton denklemini uygulayarak makinenizin $x = 1$ köküne ne kadar yaklaştığını bakın.



28.

Aranan kökten başkasını bulmak $f(x) = 4x^4 - 4x^2$ fonksiyonunun üç kökü de Newton yöntemi, $x = \sqrt{21}/7$ civarında başlatılarak bulunabilir. Deneyin. (Şekil 4.52'ye bakın.)

29. **İyon konsantrasyonu bulmak** Hidroklorik asit içinde doymuş bir magnezyum hidroksit çözeltisinin asitliliğini bulurken hidronyum iyonu konsantrasyonu $[H_3O^+]$ için

$$\frac{3.64 \times 10^{-11}}{[H_3O^+]^2} = [H_3O^+] + 3.6 \times 10^{-4}$$

denklemini çıkarırsınız. $[H_3O^+]$ 'nin değerini bulmak için, $x = 10^4[H_3O^+]$ alırsınız ve denklemi

$$x^3 + 3.6x^2 - 36.4 = 0$$

haline getirirsiniz. Sonra da bunu Newton yöntemini kullanarak çözersiniz. x ve $[H_3O^+]$ için ne bulursunuz? (2 ondalık basamağa kadar.)

T 30. Kompleks kökler Kompleks sayılarla aritmetik yapabilecek bir bilgisayar veya hesap makineniz varsa, $z^6 - 1 = 0$ denklemini Newton yöntemiyle çözmek için deneyler yapın. Kullanılacak rekürans bağıntısı

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^6 - 1}{6z_n^5} \quad \text{veya} \quad z_{n+1} = \frac{5}{6}z_n + \frac{1}{6z_n^5}$$

olarak verilmektedir. (Diğerleri yanında) şu değerleri de kullanın $2, i, \sqrt{3} + i$.