

ÇÖZÜMLER:

Tanım 2.1.2 : (a) (x_n) dizisi yakınsaktır $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0$ için (x_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer bütün terimleri a noktasının $U_\epsilon(a)$ komşuluğu içindedir.

(b) (x_n) dizisi iraksaktır $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \exists \epsilon \in \mathbb{R}_+$ öyleki (x_n) dizisinin sonsuz sayıdaki terimleri a noktasının $U_\epsilon(a)$ komşuluğu dışındadır (veya $\mathbb{R} \setminus U_\epsilon(a)$ içindedir).

Örnek 2.1.3 : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm: Bu nedenle verilen herhangi $\epsilon > 0$ sayısı için ϵ na bağlı $\forall n > n_\epsilon$ ($n \in \mathbb{N}$) için $\left| \frac{2n+1}{3n+1} - \frac{2}{3} \right| < \epsilon$ eşitsizliğini sağlayacak bir $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısının bulunabileceğini göstermemiz gerekir. Buna göre,

$$\left| \frac{2n+1}{3n+1} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{1}{3(3n+1)} \right| = \frac{1}{3(3n+1)}$$

olduğundan, sözkonusu $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısı olarak $\frac{1}{3(3n+1)} < \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan en küçük (genel olarak herhangi) bir doğal sayının alınması yeterlidir.

$$\frac{1}{3(3n+1)} < \epsilon \Leftrightarrow 3n+1 > \frac{1}{3\epsilon} \Leftrightarrow 3n > \frac{1}{3\epsilon} - 1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3\epsilon} - 1 \right)$$

yazabiliriz. Eğer, $n_\epsilon = \left\lceil \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3\epsilon} - 1 \right) \right\rceil$ dersek her $n > n_\epsilon$ ($n \in \mathbb{N}$) için ($\epsilon > \frac{1}{12}$ iken $n_\epsilon = 0$ olduğundan, $\forall n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) için

$$\left| \frac{2n+1}{3n+1} - \frac{2}{3} \right| < \epsilon$$

olur. Buradan, istenen eşitliğin doğru olduğu elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.4 : $q \in \mathbb{R}, |q| < 1$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ olğunu gösterelim.

Çözüm: Eğer, $q = 0$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $q^n = 0$ olduğundan, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ olur. $0 < |q| < 1$ olsun. $|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n$ olduğundan, herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde $n > n_\epsilon$ ($n \in \mathbb{N}$) için $|q|^n < \epsilon$ olacak şekilde bir $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısının seçilmesi yeterlidir. $0 < a < 1$ olmak üzere $y = \log_a x$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ üzerinde azalan olduğundan,

$$|q|^n < \epsilon \Rightarrow \log_{|q|}(|q|^n) > \log_{|q|} \epsilon \Rightarrow n > \log_{|q|} \epsilon$$

bulunur. Buradan da görüldüğü gibi $n_\epsilon = \lceil \log_{|q|} \epsilon \rceil$ dersek, $\forall n > n_\epsilon$ ($n \in \mathbb{N}$) için ($\epsilon \leq |q|$ için $n_\epsilon = 0$ olduğundan, $\forall n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) için) $|q|^n < \epsilon$ olur. Tanım 2.1.1 dolayısıyla, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ olduğu elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.5 : Terimleri $x_1 = 0, 3; x_2 = 0, 33; \dots; x_n = 0, \underbrace{33 \dots 3}_{n\text{-kez}}; \dots$ biçiminde

tanımlanan (x_n) dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm: Herhangi $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\forall n > n_\epsilon$ ($n \in \mathbb{N}$) için $|x_n - \frac{1}{3}| < \epsilon$ olacak şekilde ϵ 'a bağlı $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısının bulunabileceğini gösterelim.

$\frac{1}{3}$ sayısı $0, 333 \dots$ şeklinde ondalık sayı ile ifade edilebileceğinden $\forall n \in \mathbb{N}$ için

olduğu elde edilir. $\forall n > n_\epsilon$ için $\frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^{n_\epsilon}}$ olduğundan, istenen $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısının $\frac{1}{10^{n_\epsilon}} < \epsilon$ komşuluğundan seçilmesi yeterlidir.

Eğer, $n_\epsilon = \lceil \log \frac{1}{\epsilon} \rceil + 1$ dersek $\forall n > n_\epsilon$ ($n \in \mathbb{N}$) için ($\epsilon \geq 1$ için $n_\epsilon = 0$ olduğundan, $\forall n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) için)

$$|x_n - \frac{1}{3}| < \epsilon$$

olur. Buradan da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}$ olduğu elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.6 : $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ dizisinin iraksak olduğunu gösterelim.

Çözüm: $a = -1$ sayısı (x_n) dizisinin limiti olamaz. Çünkü -1 noktasının $U_{1/2}(-1)$ komşuluğunun dışında dizinin sonsuz sayıda (çift indisli) $x_{2k} = 1$, $k \in \mathbb{N}$ terimleri bulunmaktadır. Benzer şekilde, $a = 1$ sayısının da (x_n) dizisinin bir limiti olmayacağı gösterilebilir.

Herhangi $a \in (-1, 1)$ sayısı verilsin. $\delta = \min\{a+1, 1-a\}$ olmak üzere a noktasının $U_\delta(a)$ komşuluğu için $x_n \notin U_\delta(a)$, $n \in \mathbb{N}$ olduğundan, $a \in (-1, 1)$ sayısı (x_n) dizisinin limiti olamaz.

Şimdi herhangi $a > 1$ ($a < -1$) sayısı verilmiş olsun. Bu durumda, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \notin U_{a-1}(a)$ ($x_n \notin U_{-(a+1)}(a)$) olduğundan, $a > 1$ ($a < -1$) sayısı (x_n) dizisinin bir limiti olamaz.

Böylece, her $\forall a \in \mathbb{R}$ sayısı için $a \neq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ olduğu ve buradan da Tanım 2.1.2(b) gereğince (x_n) dizisinin iraksak olduğu elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.7 : n inci terimi $x_n = n^{(-1)^n}$ şeklinde verilen $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \dots, 2k, \frac{1}{2k+1}, \dots$ dizisinin iraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Herhangi $a \neq 0$ sayısı x_n dizisinin bir limiti olamaz. Çünkü, $\epsilon = \frac{|a|}{2} > 0$ olmak üzere (x_n) dizisinin $\frac{1}{2k+1} < \frac{|a|}{2}$ olacak şekilde bütün terimleri $a \neq 0$ noktasının $U_\epsilon(a)$ komşuluğu dışında bulunmaktadır. $a = 0$ noktasıda (x_n) dizisinin bir limiti olamaz. Çünkü, $a = 0$ noktasının, örneğin, $U_1(0)$ komşuluğunun dışında (x_n) dizisinin sonsuz sayıda terimleri (çift indisli terimleri) bulunmaktadır.

Böylece, Tanım 2.1.2(b) gereğince (x_n) dizisi iraksaktır. $\diamond$

Örnek 2.1.10 : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 7n}{4n^2 - 1}$ limitini bulunuz.

Çözüm: Verilen dizinin n . terimini

$$x_n = \frac{3n^2 + 7n}{4n^2 - 1} = \frac{3 + \frac{7}{n}}{4 - \frac{1}{n^2}}$$

şeklinde yazalım. O halde, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n} = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ olduğundan Teorem 2.1.9 un (d) önermesini kullanırsak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{7}{n}}{4 - \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (3 + \frac{7}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (4 - \frac{1}{n^2})} = \frac{3}{4}$$

olduğu elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.11 : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n^n} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\forall n \geq 6$ ($n \in \mathbb{N}$) için

$$0 < \left(\frac{3}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizliğin sol ve sağ tarafındaki dizilerin (yani (0) ve $(\frac{1}{2})^n$ dizilerinin) limiti sıfır olduğundan, Teorem 2.1.9 un (f) önermesine göre $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n^n} = 0$ dir. $\diamond$

Örnek 2.1.12 : $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq -1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ olsun. Herhangi $p \in \mathbb{N}$ sayısı için $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{p}} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Eğer, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq 0$ ise, (bu durumda $1 + x_n \geq 1$ dir) ve

$$1 \leq (1 + x_n)^{\frac{1}{p}} \leq ((1 + x_n)^{\frac{1}{p}})^p = 1 + x_n = 1 + |x_n|$$

olur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $-1 \leq x_n < 0$ ise, (bu durumda $0 \leq 1 + x_n < 1$ dir) ve

$$1 > (1 + x_n)^{\frac{1}{p}} \geq ((1 + x_n)^{\frac{1}{p}})^p = 1 + x_n = 1 - |x_n|$$

olduğundan, $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x_n \geq -1$ için

$$1 - |x_n| \leq (1 + x_n)^{\frac{1}{p}} \leq 1 + |x_n|$$

elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ (Bkz. Teorem 2.1.9(h)) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - |x_n|) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + |x_n|) = 1$ olur. O halde, Teorem 2.1.9 un (f) önermesi gereğince

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{p}} = 1$$

olduğu bulunur. $\diamond$

Örnek 2.1.13 : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sqrt{n^2 + n} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$$

ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)} = \frac{1}{2}$$

elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.14 : $a > 1$ sayısı için $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\sqrt[n]{a} - 1 = \alpha_n$ alalım. O halde, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n > 0$ ve Bernoulli eşitsizliği gereğince $n \in \mathbb{N}$ için

$$a = (1 + \alpha_n)^n \geq n \cdot \alpha_n$$

olur ve buradan da $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 < \alpha_n \leq \frac{a}{n}$ olduğu elde edilir. O halde, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n) = 1$$

bulunur. $\diamond$

Örnek 2.1.15 : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\sqrt[n]{n} - 1 = \alpha_n$ alalım. O halde, $\alpha_n \geq 0$ ve $\forall n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) için

$$\begin{aligned} n &= (1 + \alpha_n)^n = 1 + n \cdot \alpha_n + \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2 + \dots + \alpha_n^n \\ &\geq \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2 \end{aligned}$$

dir. $\forall n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) için $n-1 \geq \frac{n}{2}$ olduğundan, son eşitsizlikten $n \geq \frac{n^2 \alpha_n^2}{4}$, dolayısıyla, $0 \leq \alpha_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$ olduğu görülür. Buna göre, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n) = 1$$

bulunur. $\diamond$

Örnek 2.1.16 : $a > 1$ sayısı için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $a - 1 > 0$ ve $\forall n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) için

$$a^n = (1 + (a-1))^n \geq \frac{n(n-1)}{2} (a-1)^2 \geq \frac{n^2}{4} (a-1)^2$$

olduğundan, $\forall n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) için

$$0 \leq \frac{n}{a^n} \leq \frac{4}{n(a-1)^2}$$

elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n(a-1)^2} = 0$ olduğundan, buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$ bulunur. $\diamond$

Örnek 2.1.17 : $a > 1$ sayısı için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\forall \epsilon > 0$ sayısı verilsin. $\mathbb{N}$ üzerinde

$$\frac{\log_a n}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n < (a^\epsilon)^n$$

olduğu açıktır. $a^\epsilon > 1$ olduğundan, bir önceki örnek gereğince $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(a^\epsilon)^n} = 0$ dır. O halde, Teorem 2.1.9 un (g) önermesi gereğince $\forall n > n_0$ ($n \in \mathbb{N}$) için

$$\frac{n}{(a^\epsilon)^n} < 1 \quad \text{veya} \quad n < (a^\epsilon)^n$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Buradan da $\forall n > n_0$ için $0 \leq \frac{\log_a n}{n} < \epsilon$

veya Tanım 2.1.1 gereğince $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$ olduğu elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.18 : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\forall k \geq 9$ ($k \in \mathbb{N}$) için $\frac{3}{k} \leq \frac{1}{3}$ olduğundan, $\forall n \geq 10$ ($n \in \mathbb{N}$) için

$$\begin{aligned} 0 < \frac{3^n}{n!} &= \frac{3^8}{8!} \cdot \frac{3 \cdot 3 \dots 3}{9 \cdot 10 \dots n} < \frac{3^8}{8!} \cdot \frac{3 \cdot 3 \dots 3}{9 \cdot 9 \dots 9} \\ &= \frac{3^8}{8!} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-8} = \frac{3^{16}}{8!} \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

olduğu görülür. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{16}}{8!} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ olduğundan, son eşitsizlikten $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0$ bulunur. $\diamond$

Örnek 2.1.23 : $q \in \mathbb{R}$ olmak üzere (q^n) dizisinin $|q| < 1$ durumunda sonsuz küçük ve $|q| > 1$ durumunda ise sonsuz büyük bir dizi olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Az önce, $|q| < 1$ durumunda $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ olduğunu ve dolayısı ile, (q^n) dizisinin sonsuz küçük bir dizi olduğunu göstermiştik. Şimdi $|q| > 1$ olsun. Bu durumda, (q^n) dizisi için Tanım 2.1.20 nin koşullarının sağlandığını gösterebiliriz. Bu nedenle $\forall \epsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\forall n > n_\epsilon$ ($n \in \mathbb{N}$) için $|q^n| > \epsilon$ olacak şekilde ϵ na bağlı bir $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısının var olduğunu göstermek gerekir.

$a > 1$ olmak üzere $y = \log_a x$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ üzerinde artan olduğundan

$$\begin{aligned} |q^n| = |q|^n > \epsilon &\Rightarrow \log_{|q|}(|q|^n) > \log_{|q|} \epsilon \\ &\Rightarrow n > \log_{|q|} \epsilon \end{aligned}$$

bulunur. O halde, $n_\epsilon = \lceil \log_{|q|} \epsilon \rceil$ dersek $\forall n > n_\epsilon$ ($n \in \mathbb{N}$) için $(0 < \epsilon \leq |q|)$ için $n_\epsilon = 0$ olduğundan, $\forall n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) için $|q^n| > \epsilon$ olur. Tanım 2.1.20 gereğince $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ olduğu elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.24 : n . terimi $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = -\frac{1}{n}$, $z_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $t_n = \frac{2 + (-1)^n}{n}$ ve $s_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$ şeklinde verilen (x_n) , (y_n) , (z_n) , (t_n) ve (s_n) birer sonsuz küçük diziler olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Gerçekten, herhangi $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\forall n > n_\epsilon = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$ ($n \in \mathbb{N}$) için $|x_n| < \epsilon$, $|y_n| < \epsilon$, $|z_n| < \epsilon$, $\forall n > n_\epsilon = \lceil \frac{3}{\epsilon} \rceil$ ($n \in \mathbb{N}$) için $|t_n| < \epsilon$ ve $\forall n > n_\epsilon = \lceil \frac{2}{\epsilon} \rceil$ ($n \in \mathbb{N}$) için $|s_n| < \epsilon$ olduğu görülür. $\diamond$

Örnek 2.1.25 : n . terimi $x_n = n$, $y_n = -n$, $z_n = (-1)^{n-1}n$ ve $t_n = \frac{2 + (-1)^n}{n}$ şeklinde verilen (x_n) , (y_n) , (z_n) , (t_n) ve (s_n) birer sonsuz büyük diziler olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bir önceki örneğe göre $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n}$, $\frac{1}{y_n} = -\frac{1}{n}$, $\frac{1}{z_n} = \frac{(-1)^{1-n}}{n}$ ve $\frac{1}{t_n} = \frac{2 + (-1)^n}{n}$ birer sonsuz küçük dizilerdir. $\diamond$

Örnek 2.1.26 : $0 < \alpha < 1$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x_n = (n+1)^\alpha$ ($n \in \mathbb{N}$) ve $y_n = n^\alpha$ ($n \in \mathbb{N}$) dizileri için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ olduğundan, $(n+1)^\alpha - n^\alpha = x_n - y_n$ ($n \in \mathbb{N}$) dizisi için $\infty - \infty$ şeklinde belirsizlik söz konusudur. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 < (n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \right] < n^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right] = \frac{1}{n^{1-\alpha}}$$

yazabiliriz. O halde, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}} = 0$ olduğundan, (gerçekten $\forall \epsilon > 0$ için $\forall n > n_\epsilon = \left\lceil \left(\epsilon^{\frac{1}{1-\alpha}}\right) \right\rceil$ ($n \in \mathbb{N}$) için $0 < \frac{1}{n^{1-\alpha}} < \epsilon$ dur). Teorem 2.1.9 (f) gereğince

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0$$

bulunur. $\diamond$

Örnek 2.1.27 : $x_n = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ ($n \in \mathbb{N}$) dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm: Önceki örnekten görüldüğü gibi, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ olduğundan, verilen (x_n) dizisi için $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizlik vardır. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

dir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})} \\ &= \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

Örnek 2.1.28 : $x_n = \frac{n^3}{3} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{3}{n^3}} - 1 \right)$ ($n \in \mathbb{N}$) dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{3} = +\infty$ ve

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{3}{n^3}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n^3}}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{3}{n^3}} + 1} \\ &= \frac{0}{3} = 0\end{aligned}$$

olduğundan, verilen (x_n) dizisi için $0 \cdot \infty$ şeklinde bir belirsizlik vardır. Diğer taraftan,

$$x_n = \frac{n^3}{3 \sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{3}{n^3}} + 1} = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{3}{n^3}} + 1}$$

olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{3}{n^3}} + 1 \right)} = \frac{1}{3}$$

bulunur. $\diamond$

Örnek 2.1.29 : $x_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$ ($n \in \mathbb{N}$) dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm: $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ve $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = +\infty$ olduğundan, verilen (x_n) dizisi için $\frac{\infty}{\infty}$ şeklinde bir belirsizlik mevcuttur. Öte yandan,

$$x_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

ifadesinden görüldüğü gibi $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}$ dir. $\diamond$

Şimdi $\frac{\infty}{\infty}$ şeklindeki belirsizliklerin limitinin bulunmasında sık sık kullanılan aşağıdaki teoremi verelim.

Örnek 2.1.32 : $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\frac{\infty}{\infty}$ şeklinde belirsizlik oluşturan

$$z_n = \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm: Stolz teoreminde $x_n = 1^k + 2^k + \dots + n^k$, $y_n = n^{k+1}$ olarak alırsak,

$x_n - x_{n-1} = n^k$ ve

$$y_n - y_{n-1} = n^{k+1} - (n-1)^{k+1}$$

$$\begin{aligned}
&= n^{k+1} - \left[n^{k+1} - (k+1)n^k + \frac{k(k+1)}{2}n^{k-1} - \dots + (-1)^{k+1} \right] \\
&= (k+1)n^k - \frac{k(k+1)}{2}n^{k-1} + \dots - (-1)^{k+1}
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} z_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(k+1)n^k - \frac{k(k+1)}{2}n^{k-1} + \dots - (-1)^{k+1}} = \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

Örnek 2.1.33 : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1.1! + 2.2! + \dots + n.n!}{(n+1)!} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Stolz teoreminde $x_n = 1.1! + 2.2! + \dots + n.n!$ ve $y_n = (n+1)!$ alırsak $x_n - x_{n-1} = n.n!$ ve $y_n - y_{n-1} = (n+1)! - n! = (n+1).n! - n! = n.n!$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1.1! + 2.2! + \dots + n.n!}{(n+1)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n.n!}{n.n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1
\end{aligned}$$

olduğu görülür. $\diamond$

Örnek 2.1.34 : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Stolz teoreminde $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, $y_n = n$ olarak alırsak, $x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n}$ ve $y_n - y_{n-1} = n - (n-1) = 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0
\end{aligned}$$

olduğu görülür. $\diamond$

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0$ olduğu açıktır.

$$x_{n+1} = \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{q}{n+1} \cdot x_n \quad n \in \mathbb{N}$$

ifadesinden görüldüğü gibi, $\forall n > n_q = \lceil q-1 \rceil$ için $(0 < q < 1$ olduğunda $\forall n \in \mathbb{N}$ için) $\frac{q}{n+1} < 1$ olduğundan, $x_{n+1} < x_n$ olur ve buradan da $(x_n)_{(n > n_q, n \in \mathbb{N})}$ dizisinin azalan olduğu görülür. $(x_n)_{(n > n_q, n \in \mathbb{N})}$ dizisi azalan ve alttan sınırlı olduğundan, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ sonlu limiti vardır. Şimdi bu a sayısını bulalım.

$$\begin{aligned}
&= n^{k+1} - \left[n^{k+1} - (k+1)n^k + \frac{k(k+1)}{2}n^{k-1} - \dots + (-1)^{k+1} \right] \\
&= (k+1)n^k - \frac{k(k+1)}{2}n^{k-1} + \dots - (-1)^{k+1}
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} z_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(k+1)n^k - \frac{k(k+1)}{2}n^{k-1} + \dots - (-1)^{k+1}} = \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

Örnek 2.1.33 : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1.1! + 2.2! + \dots + n.n!}{(n+1)!} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Stolz teoreminde $x_n = 1.1! + 2.2! + \dots + n.n!$ ve $y_n = (n+1)!$ alırsak $x_n - x_{n-1} = n.n!$ ve $y_n - y_{n-1} = (n+1)! - n! = (n+1).n! - n! = n.n!$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1.1! + 2.2! + \dots + n.n!}{(n+1)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n.n!}{n.n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1
\end{aligned}$$

olduğu görülür. $\diamond$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$$

ifadesi doğru olduğundan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için doğru olan $x_{n+1} = \frac{q}{n+1} \cdot x_n$ eşitliğinde $n \rightarrow \infty$ iken limit alırsak $a = 0$ olduğunu görürüz. Böylece, her $q > 0$ sayısı için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!} = 0$ dir. $\diamond$

Örnek 2.1.37 : $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $n \in \mathbb{N}$ şeklinde tanımlanan (x_n) dizisinin yakınsaklığını gösterip, limitini bulunuz.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$, $x_{n+2}^2 = 2 + x_{n+1}$ olduğundan,

$$x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2 = x_{n+1} - x_n \quad (2.1)$$

elde edilir.

Verilen (x_n) dizisinin artan olduğunu gösterelim. $x_2 = \sqrt{2 + x_1} = \sqrt{2} > x_1$ olduğu açıktır. Herhangi $k \in \mathbb{N}$ için $x_{k+1} > x_k$ olduğunu farz edelim. O halde, (2.1) eşitliği gereğince $x_{k+2}^2 > x_{k+1}^2$ olur ve buradan da $x_{k+1} > 0$ ve $x_{k+2} > 0$ olduğunu dikkate alırsak $x_{k+2} > x_{k+1}$ eşitsizliğinin doğruluğu görülür. O halde, Tümevarım yöntemine göre $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} > x_n$ olduğu, yani, (x_n) ($n \in \mathbb{N}$) dizisinin artan olduğu gösterilmiş olur. Şimdi (x_n) ($n \in \mathbb{N}$) dizisinin üstten sınırlı olduğunu gösterelim.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq 0$ ve $x_n^2 < x_{n+1}^2 = 2 + x_n$ veya $x_n^2 - x_n - 2 < 0$ olduğundan, $x_n < 2$ olur. Bu ise, (x_n) nin üstten sınırlı olması demektir.

Verilen (x_n) ($n \in \mathbb{N}$) dizisi artan ve üstten sınırlı olduğundan, Teorem 2.1.35 (a) gereğince yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ diyelim. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq 0$

olduğundan Teorem 2.1.9 (e) gereğince $a \geq 0$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için doğru olan $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$ eşitliğinde $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa o zaman

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} x_{n+1} \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} \right)^2 = a^2 \end{aligned}$$

olduğu dikkate alındığında, $a^2 = 2 + a$ veya $a^2 - a - 2 = 0$ bulunur. Buradan da $a = 2$ olduğu ve dolayısı ile $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.38 : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ limitinin varlığını ispat ediniz.

Çözüm: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall \alpha > -1$ için doğru olan $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$, $n \in \mathbb{N}$ Bernoulli eşitsizliğinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{n(n+2)^n}{(n+1)^2}\right) \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \frac{n+2}{n+1} > \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \frac{n+2}{n+1} \\ &= \frac{(n^2 + n + 1)(n+2)}{(n^2 + 2n + 1)(n+1)} > 1 \Rightarrow x_{n+1} > x_n \end{aligned}$$

olur. Demek ki, (x_n) dizisi artandır.

Şimdi (x_n) dizisinin üstten sınırlı olduğunu görelim. Binom formülünden faydalanarak

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} 1^n + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < \\ &< 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = y_n \end{aligned}$$

bulunur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $n! \geq 2^{n-1}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} y_n &< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n < 3$ dir. Yani, (x_n) dizisinin üstten sınırlı olduğu görülür. O halde, Teorem 2.1.35 (a) gereğince (x_n) dizisi yakınsaktır. Ayrıca, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $2 < x_n < 3$ olduğundan, (x_n) dizisinin limiti 2 ile 3 arasında bir reel sayıdır. Bu sayı e ile gösterilir ve değeri yaklaşık olarak $e = 2,718281828459045 \dots$ dir. Şu halde, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ dir.

bulunur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $n! \geq 2^{n-1}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} y_n &< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 3 - (\frac{1}{2})^{n-1} < 3 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n < 3$ dir. Yani, (x_n) dizisinin üstten sınırlı olduğu görülür. O halde, Teorem 2.1.35 (a) gereğince (x_n) dizisi yakınsaktır. Ayrıca, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $2 < x_n < 3$ olduğundan, (x_n) dizisinin limiti 2 ile 3 arasında bir reel sayıdır. Bu sayı e ile gösterilir ve değeri yaklaşık olarak $e = 2,718281828459045 \dots$ dir. Şu halde, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ dir.

Genel terimi $z_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, $(n \in \mathbb{N})$ şeklinde verilen (z_n) dizisi yakınsaktır ve limiti e dir. Gerçekten, $z_n = (1 + \frac{1}{n})^n (1 + \frac{1}{n}) = x_n (1 + \frac{1}{n})$ olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n (1 + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n (1 + \frac{1}{n}) = e$$

bulunur. $\diamond$

Not: $\mathbb{R}$ içindeki bir (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olup olmayacağı tanımlarını aşağıdaki şekilde de verebiliriz.

(x_n) bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\epsilon$ ve $\forall p \in \mathbb{N}$ için $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$ dir.

(x_n) bir Cauchy dizisi değildir $\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$ için $\exists n > N$ ve $\exists p \in \mathbb{N}$ öyle ki $|x_{n+p} - x_n| \geq \epsilon$ dir. $\bullet$

Örnek 2.1.39 : $a \in \mathbb{R}$ için $x_n = \frac{\sin a}{2} + \frac{\sin 2a}{2^2} + \frac{\sin 3a}{2^3} + \dots + \frac{\sin na}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\forall n, p \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)a}{2^{n+1}} + \dots + \frac{\sin(n+p)a}{2^{n+p}} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p} \right) < \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

bulunur. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ olduğundan, herhangi $\epsilon > 0$ verildiğinde $\forall n > n_\epsilon =$

$\lceil \log_2 \frac{1}{\epsilon} \rceil$ için $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ olur. Bu durumda, $\forall n > n_\epsilon$ ve $\forall p \in \mathbb{N}$ için $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon \Rightarrow (x_n)$ bir Cauchy dizisidir $\Rightarrow (x_n)$ dizisi yakınsaktır. $\diamond$

Örnek 2.1.40 : $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $n, p \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_{n+p} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p}$$

$$\geq \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \dots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}$$

olduğu açıktır. Burada $p = n$ alırsak

$$x_{2n} - x_n \geq \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$$

bulunur. Buradan da (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olmadığı görülür. Gerçekten, $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$ ve $\forall N \in \mathbb{N}$ için $n = p = N$ alırsak

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{2n} - x_n| = x_{2n} - x_n \geq \frac{1}{2}$$

elde edilir. Bu ise, (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olmadığını gösterir. Buna göre (x_n) dizisi ıraksaktır. $\diamond$

Örnek 2.1.52 $x_n = (-1)^{n-1}(2 + \frac{3}{n})$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n) dizisi için $\inf(x_n) = \inf \mathcal{R}(x_n)$, $\sup(x_n) = \sup \mathcal{R}(x_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ve $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ ni bulunuz.

Çözüm: (x_n) dizisinin $x_{2k-1} = 2 + \frac{3}{2k-1}$ ve $x_{2k} = -2 - \frac{3}{2k}$ olmak üzere (x_{2k-1}) ve (x_{2k}) alt dizilerini gözönüne alalım. (x_{2k-1}) dizisinin azalan

(x_{2k}) dizisinin artan ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_{2k} < x_{2k-1}$ olduğu açıktır. O halde, x_n dizisinin bütün terimleri (x_{2k-1}) ve (x_{2k}) alt dizilerin terimleri içinde bulunduğuundan,

$$\inf(x_n) = \inf \mathcal{R}(x_{2k}) = x_2 = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2},$$

$$\sup(x_n) = \sup \mathcal{R}(x_{2k-1}) = x_1 = 2 + 3 = 5,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2k} = -2, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2k-1} = 2$$

elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.53 : $x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n) dizisi için $\inf(x_n) = \inf \mathcal{R}(x_n)$, $\sup(x_n) = \sup \mathcal{R}(x_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ve $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ ni bulunuz.

Çözüm: (x_n) dizisinin $x_{4k-2} = 1 - \frac{4k-2}{4k-1}$, $x_{2k-1} = 1$ ve $x_{4k} = 1 + \frac{4k}{4k+1}$ olmak üzere (x_{4k-2}) , (x_{2k-1}) ve (x_{4k}) alt dizilerini gözönüne alalım. (x_{4k-2}) dizisinin azalan (x_{4k}) dizisinin artan ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_{4k-2} < x_{2k-1} < x_{4k}$ olduğu açıktır. O halde,

$$\inf(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k-2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4k-2}{4k-1}\right) = 0,$$

$$\sup(x_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4k}{4k+1}\right) = 2$$

bulunur. $\diamond$

Örnek 2.1.54 : $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots$ dizisinin Z limit noktalarına kümesini bulunuz.

Çözüm: Verilen dizinin $x_n^{(1)} = \frac{1}{2^n}$ ve $x_n^{(2)} = \frac{2^n}{2^n-1}$ olmak üzere iki yakınsak $(x_n^{(1)})$ ve $(x_n^{(2)})$ alt dizilerini gözönüne alalım. Bu dizilerin limitleri

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} = 1$$

verilen dizinin birer alt limitleridir. Diğer taraftan, verilen dizinin her yakınsak alt dizisi, $(x_n^{(1)})$ ve $(x_n^{(2)})$ dizilerinin alt dizileri olduğundan verilen dizinin 0 ve 1 den başka limit noktası olamaz. Demek ki, verilen dizinin limit noktaları kümesi $Z = \{0, 1\}$ dir. $\diamond$

Örnek 2.1.55 : $x_n = \sin n^\circ$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n) dizisi için

(i) Z limit noktaları kümesini;

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ve $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ limitlerini bulunuz.

Çözüm:

(i) $\forall n, p \in \mathbb{N}$ için $\sin n^\circ = \sin(360^\circ p + n^\circ)$ olduğundan, $0, \pm \sin 1^\circ, \pm \sin 2^\circ, \dots, \pm \sin 89^\circ, \pm 1$ sayıları (x_n) dizinin terimleri arasında sonsuz sayıda tekrarlanmaktadır. O halde, bu sayılar (x_n) dizinin birer limit noktalarıdır.

Her $a \notin \{0, \pm \sin 1^\circ, \pm \sin 2^\circ, \dots, \pm \sin 89^\circ, \pm 1\}$ sayısının öyle $U_\epsilon(a)$ komşuluğu bulunabilir ki, (x_n) dizinin bütün terimleri bu komşuluğun dışındadır. O halde, (x_n) dizinin limit noktalarının kümesi $Z = \{0, \pm \sin 1^\circ, \pm \sin 2^\circ, \dots, \pm \sin 89^\circ, \pm 1\}$ dir.

(ii) $\inf Z = -1$ ve $\sup Z = 1$ olduğundan, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^\circ = -1$ ve $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sin n^\circ = 1$ dir.

Örnek 2.1.56 : $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \dots$ dizisinin

(i) Z limit noktaları kümesini;

(ii) alt ve üst limitlerini bulunuz.

Çözüm: (i) $\forall \alpha \in [0, 1]$ rasyonel sayısı verilen (x_n) dizisinin bir terimi olduğu açıktır. $\forall \alpha \in [0, 1)$ ve yeteri kadar büyük m doğal sayısı

$$\alpha + \frac{1}{n+m} < 1$$

esitsizliğinin $\forall n \in \mathbb{N}$ için sağlandığı da açıktır.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için (x_n) dizisinin terimleri içinde

$$\alpha < r_n < \alpha + \frac{1}{n+m}$$

olacak şekilde bir r_n rasyonel sayısı vardır.

Baska bir ifade ile her $\alpha \in [0, 1)$ sayısının her $U_\epsilon(\alpha)$ komşuluğunda $[0, 1)$ aralığının sonsuz sayıda rasyonel noktası bulunur. O halde, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \alpha$ dır ve dolayısıyla, α , (x_n) dizisinin bir alt limitidir. $\alpha = 1$ benzer şekilde incelenebilir. Böylece, (x_n) dizisinin limit noktalarının kümesi $Z = [0, 1]$ dir.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf Z = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup Z = 1$ dir. $\diamond$

Örnek 2.1.57 : Teorem 2.1.46 dan faydalanarak

(i) $x_n = n^{(-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n) dizisinin,

(ii) $y_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (y_n) dizisinin

alt ve üst limitlerini bulunuz.

Çözüm: (i) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $l_n = \inf\{x_k : k \geq n\} = \inf\{k^{(-1)^k} : k \geq n\} = 0$ ve $L_n = \sup\{x_k : k \geq n\} = \sup\{k^{(-1)^k} : k \geq n\} = +\infty$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{x_k : k \geq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_k : k \geq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

bulunur.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\inf\{y_k : k \geq n\} = n$ ve $\sup\{y_k : k \geq n\} = +\infty$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{y_k : k \geq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{y_k : k \geq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

2.2 Çözümlü Problemler

(1) (a) $x_n = \frac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2 + 1}}$, $n \in \mathbb{N}$;

(b) $y_n = \ln(\sqrt{2n^2 + 1} - n) - \ln$, $n \in \mathbb{N}$
dizilerininin sınırlı olduklarını gösteriniz.

Not: Sınırlı diziye verilen Tanım 1.13.15 e denk olan aşağıdaki tanımı da verebiliriz. $\mathbb{R}$ içindeki (x_n) dizisi sınırlıdır $\Leftrightarrow \exists M > 0$ öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq M$ dir. $\bullet$

Çözüm:

- (a) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|(-1)^n n + 10| \leq |(-1)^n n| + 10 = n + 10$ ve $\sqrt{n^2 + 1} > n$ olduğundan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$|x_n| = \frac{|(-1)^n n + 10|}{\sqrt{n^2 + 1}} \leq \frac{n + 10}{n} = 1 + \frac{10}{n} \leq 11$$

bulunur. Dolayısıyla, (x_n) dizisi sınırlıdır.

- (b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$y_n = \ln n \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} - 1 \right) - \ln n = \ln \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} - 1 \right)$$

ve

$$0 < \sqrt{2} - 1 \leq \sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} - 1 \leq \sqrt{3} - 1$$

oldüğundan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\ln(\sqrt{2} - 1) \leq y_n \leq \ln(\sqrt{3} - 1)$$

bulunur.

Buna göre, (y_n) dizisi sınırlıdır. $\diamond$

Not: $\mathbb{R}$ içindeki (x_n) dizisi sınırsızdır $\Leftrightarrow \forall M > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ öyleki $|x_N| > M$ dir. $\bullet$

- (2) (a) $x_n = n^{\cos n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$; (b) $y_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n + 1}$, $n \in \mathbb{N}$
dizilerinin sınırlı olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm: (a) $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x_{2k} = (2k)^{\cos 2k\pi} = 2k$ ve $x_{2k-1} = (2k-1)^{\cos(2k-1)\pi} = (2k-1)^{-1}$ bulunur. Buradan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0 \Rightarrow (x_n)$ dizisi alttan sınırlıdır diyebiliriz. Öte yandan, her $M > 0$ sayısı verildiğinde $N = \lfloor \frac{M}{2} \rfloor + 1$ doğal sayısı için $x_{2N} = (2N)^{\cos 2N\pi} = 2N > M \Rightarrow (x_n)$ üstten sınırsızdır.

- (b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$y_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n + 1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \frac{1}{2^n}} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{9} \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq \frac{1}{3}$$

oldüğundan, (y_n) dizisi alttan sınırlıdır. Herhangi $M > 0$ sayısı verildiğinde $N = \lfloor \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{9M}{2}\right) \rfloor + 1$ doğal sayısı için $y_N \geq \frac{2}{9} \left(\frac{3}{2}\right)^N > M \Rightarrow (y_n)$ dizisi üstten sınırsızdır. $\diamond$

- (3) (a) $x_n = \frac{n^2}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$; (b) $y_n = \frac{100^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$
dizilerinin minimal ve maksimal terimlerini varsa bulunuz.

Çözüm: (a) $\forall n \geq 3$ ($n \in \mathbb{N}$) için

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < 1$$

olduğundan (x_n) ($n \geq 3$) dizisi azalandır. O halde

$\max(x_n) = \max\{x_1, x_2, x_3\} = x_3 = \frac{9}{8}$ dir. Minimal eleman yoktur.

(b) $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{100}{n+1} \Rightarrow (y_n)$ $n > 99$ için dizi azalan, $1 \leq n \leq 99$ için de artandır. Dolayısı ile,

$$\max(y_n) = y_{100} = \frac{100^{100}}{100!} = \frac{100^{99}}{99!}$$

elde edilir. Minimal eleman yoktur. $\diamond$

(4) (a) $x_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ $n \in \mathbb{N}$ dizisinin artan;

(b) $a > 0$ için y_1 herhangi pozitif bir sayı, $y_{n+1} = \frac{1}{2} \left(y_n + \frac{a}{y_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$

olmak üzere (y_n) ($n \geq 2$) dizisinin monoton azalan;

(c) $z_1 = 3, z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n^2 - 1$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (z_n) dizisinin artan olduklarını gösteriniz.

Çözüm: (a) $x_n = 1 - \frac{1}{n^2+1}$ ve $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2+1}$ olduğu açıktır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(n+1)^2 > n^2 \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow x_{n+1} > x_n \Rightarrow (x_n)$ dizisi artandır.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $y_n > 0$ olduğu açıktır. $\forall n \geq 2$ için $y_n \geq \sqrt{a}$ olduğunu gösterelim. Gerçekten, her $t \in (0, +\infty)$ için geçerli olan $t + \frac{1}{t} \geq 2$ eşitsizliğinde $t = \frac{y_n}{\sqrt{a}} > 0$ olarak alırsak

$$\frac{y_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{y_n} \geq 2 \Rightarrow y_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2} \left(\frac{y_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{y_n} \right) \geq \sqrt{a}$$

olduğu anlaşılır. O halde, $\forall n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) için

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{y_n^2} \right) \leq \frac{1}{2} (1 + 1) = 1 \Rightarrow y_{n+1} \leq y_n$$

dolayısıyla, (y_n) ($n \geq 2$) dizisi monoton azalandır.

(c) $n = 1$ için $z_1 = 3 \geq 3$ dür. Herhangi $n = k \geq 2$ sayısı için $z_k \geq 3$ olsun. $z_{k+1} \geq 3$ olduğunu görelim.

$$z_{k+1} - 3 = \frac{1}{2}z_k^2 - 4 = \frac{1}{2}(z_k^2 - 8) = \frac{1}{2}(z_k - 2\sqrt{2})(z_k + 2\sqrt{2}) > 0$$

ve buradan $z_{k+1} \geq 3$ olduğu anlaşılır. O halde, Matematik induksiyon yöntemi gereğince her $n \in \mathbb{N}$ için $z_n \geq 3$ dür. $z_1 = 3, z_2 = \frac{1}{2}3^2 - 1 = 3,5 \Rightarrow z_2 - z_1 = 0,5 > 0$ dir. Herhangi $n = k \geq 2$ sayısı için $z_{k+1} - z_k > 0$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} 2z_{k+1} &= z_k^2 - 2, \quad 2z_{k+2} = z_{k+1}^2 - 2 \Rightarrow 2(z_{k+2} - z_{k+1}) \\ &= z_{k+1}^2 - z_k^2 = (z_{k+1} - z_k)(z_{k+1} + z_k) > 0 \Rightarrow z_{k+2} - z_{k+1} > 0 \end{aligned}$$

ise (Matematik induksiyon yöntemi gereğince) (z_n) dizisi artandır. $\diamond$

(5) Limitin tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 3n^2}{n^3 + 1} = 5 ; \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 7 \cdot 6^n}{3^n + 6^n} = 7 ;$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n^2}{n + 1} = 0 ; \quad (d) \lim_{n \rightarrow \infty} \log_n 2 = 0 .$$

Çözüm: Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin.

(a)

$$\left| \frac{5n^3 - 3n^2}{n^3 + 1} - 5 \right| = \frac{| -3n^2 - 5 |}{n^3 + 1} = \frac{3n^2 + 5}{n^3 + 1}$$

$$= \frac{3 + \frac{5}{n^2}}{n + \frac{1}{n^2}} < \frac{3 + 5}{n} = \frac{8}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{8}{\epsilon}$$

olur. O halde, $n_\epsilon = \left\lceil \frac{8}{\epsilon} \right\rceil$ ($n_\epsilon = 0, \epsilon \geq 8$ ise) olmak üzere $\forall n > n_\epsilon$ için

$$\left| \frac{5n^3 - 3n^2}{n^3 + 1} - 5 \right| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 3n^2}{n^3 + 1} = 5$$

bulunur.

(b)

$$\left| \frac{2^n + 7 \cdot 6^n}{3^n + 6^n} - 7 \right| = \frac{| 2^n - 7 \cdot 3^n |}{3^n + 6^n} = \frac{7 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + 2^n}$$

$$< \frac{7}{2^n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \log_2 \frac{7}{\epsilon}$$

olur. O halde, $n_\epsilon = \left\lceil \log_2 \frac{7}{\epsilon} \right\rceil$ ($n_\epsilon = 0, \epsilon \geq 7$ ise) olmak üzere $\forall n > n_\epsilon$ için

$$\left| \frac{2^n + 7 \cdot 6^n}{3^n + 6^n} - 7 \right| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 7 \cdot 6^n}{3^n + 6^n} = 7$$

bulunur.

(c)

$$\left| \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n^2}{n + 1} - 0 \right| = \frac{\sqrt[3]{n^2} |\sin n^2|}{n + 1} \leq \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n + 1} < \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon^3}$$

olur. O halde, $n_\epsilon = \left\lceil \frac{1}{\epsilon^3} \right\rceil$ ($n_\epsilon = 0, \epsilon > 1$ ise) olmak üzere $\forall n > n_\epsilon$ için

$$\left| \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n^2}{n + 1} \right| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n^2}{n + 1} = 0$$

bulunur.

(d) $\forall n > 2$ ($n \in \mathbb{N}$ için)

$$|\log_n 2 - 0| = |\log_n 2| = \frac{1}{\log_2 n} < \epsilon \Leftrightarrow n > 2^{\frac{1}{\epsilon}}$$

olur. O halde, $n_\epsilon = \left\lceil 2^{\frac{1}{\epsilon}} \right\rceil$ ($n_\epsilon = 1, \epsilon > 1$ ise) olmak üzere $\forall n > n_\epsilon$ için

$$|\log_n 2| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \log_n 2 = 0$$

bulunur. $\diamond$

- (6) $x_n = (0, 5)^{((-1)^n - 1)n}$, $n \in \mathbb{N}$ dizisinin iraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Herhangi $a \neq 1$ sayısı (x_n) dizisinin bir limiti olamaz. Çünkü, $\epsilon = \frac{|a-1|}{2} > 0$ olmak üzere (x_n) dizisinin $x_{2k-1} = 2^{2(2k-1)} > 1 + \frac{|a-1|}{2}$ olacak şekilde sonsuz sayıda terimleri $a \neq 1$ noktasının $U_\epsilon(a)$ komşuluğu dışında bulunmaktadır. $a = 1$ noktası da (x_n) dizisinin bir limiti olamaz. Çünkü, $a = 1$ noktasının, örneğin, $U_{\frac{1}{2}}(1)$ komşuluğu dışında (x_n) dizisinin sonsuz çoklukta terimleri (tek indisli terimleri) bulunmaktadır. Böylece, Tanım 2.1.2(b) gereğince (x_n) dizisi iraksaktır. $\diamond$

- (8) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{n - \sqrt{n}}; & \text{(b)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + 3} - n}; \\ \text{(c)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n - n^3}{(3n + 1)^3}; & \text{(d)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n + n!}{2^n + (n + 1)!}; \\ \text{(e)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 1}{3n - 5} \right)^3; & \text{(f)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^2 + 3} - \frac{2n^2}{2n + 1} \right); \\ \text{(g)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right); \\ \text{(h)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right|; \\ \text{(i)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{n^2 + 1} - \frac{2n+1}{n^2} \right); \\ \text{(j)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right); \\ \text{(k)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right); \\ \text{(l)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right); \\ \text{(m)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \dots \sqrt[2^n]{2}). \end{aligned}$$

Çözüm: (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{n - \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - \sqrt{n})(n + \sqrt{n})}{n - \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt{n}) = +\infty$.

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + 3} - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n - \sqrt{4n^2 - 1})(2n + \sqrt{4n^2 - 1})}{(\sqrt{n^2 + 3} - n)(2n + \sqrt{4n^2 - 1})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3} + n}{(\sqrt{n^2 + 3} - n)(\sqrt{n^2 + 3} + n)(2n + \sqrt{4n^2 - 1})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} + 1}{3(2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n^2}})} = \frac{1 + 1}{3(2 + \sqrt{4})} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n - n^3}{(3n + 1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2} - 1}{(3 + \frac{1}{n})^3} = -\frac{1}{27}$$

$$\text{(d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n + n!}{2^n + (n + 1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{10^n}{n!} \right)}{1 + \frac{1}{n+1} \frac{2^n}{n!}} = 0$$

$$\text{(e)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 1}{3n - 5} \right)^3 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{3n - 5} \right)^3 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{5}{n}} \right)^3 = \left(\frac{2}{3} \right)^3$$

(f)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^2+3} - \frac{2n^2}{2n+1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 6n^2}{(2n+1)(n^2+3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{6}{n}}{(2 + \frac{1}{n})(1 + \frac{3}{n^2})} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(g) $1 + 2 + \dots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n - 1}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(h) $x_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} = \frac{1-2+3-\dots+(-1)^{n-1}n}{n}$ olsun. O halde, $n = 2k$ ise,

$$x_{2k} = \frac{(1-2) + (3-4) + \dots + (2k-1-2k)}{2k} = \frac{-k}{2k} = \frac{-1}{2}$$

olur. Eğer, $n = 2k-1$ ise,

$$\begin{aligned}x_{2k+1} &= \frac{(1-2) + (3-4) + \dots + [(2k-3) - (2k-2)] + (2k-1)}{2k-1} \\ &= \frac{(k-1) + (2k-1)}{2k-1}\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right| = |x_n| = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 2k \text{ ise,} \\ \frac{k}{2k-1}, & n = 2k-1 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu bulunur. $\mathbb{R}$ içindeki herhangi (a_n) dizisi için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_n = a$$

önermesi doğru olduğundan (ispatlayınız)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{2k}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{2k-1}| = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

bulunur.

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 3 + \dots + (2n-1)}{n^2} - \frac{2n+1}{n^2+1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1} - \frac{2n+1}{n^2+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 2n^3 - n^2 - 2n - 1}{n^2(n^2+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1\end{aligned}$$

bulunur.

(j) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

esitsizliği doğru olduğundan,

bulunur. Buradan da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$ olması nedeniyle Teorem 2.1.9 un (f) şıkkı gereğince $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ olur.

(k)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

(l) $x_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} x_n - \frac{1}{2}x_n &= \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{5}{2^3} - \frac{3}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{2n-1}{2^n} - \frac{2n-3}{2^n}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

ve buradan da

$$x_n = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) - \frac{2n-1}{2^n} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 2 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-2}} - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 3 \end{aligned}$$

bulunur.

(m) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}} = 2^{1 - \frac{1}{2^n}} = \frac{2}{(2)^{\frac{1}{2^n}}}$ ve $\forall n > 2$

için

$$\begin{aligned} 2 &= (2^{\frac{1}{2^n}})^{2^n} = (1 + (2^{\frac{1}{2^n}} - 1))^{2^n} > (1 + (2^{\frac{1}{2^n}} - 1))^n \\ &= 1 + n(2^{\frac{1}{2^n}} - 1) + \dots + (2^{\frac{1}{2^n}} - 1)^n > n(2^{\frac{1}{2^n}} - 1) \Rightarrow \\ 0 &< 2^{\frac{1}{2^n}} - 1 < \frac{2}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{2^n}} = 1 \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(2)^{\frac{1}{2^n}}} = 2 \end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$