

Diferansiyel Denklemler Final Sınavı konularıyla ilgili çözüm örnekleri.

1. Diferansiyel denklemleri çözünüz:

a) $p^3 - yp^2 - x^2y^2p + x^2y^3 = 0$, ($p = y'$),

Çözüm: Denklemin sol tarafındaki ifadeyi çarpanlarına ayırarak p 'yi çekelim.

$$p^2(p-y) - x^2y^2(p-y) = 0 \Rightarrow (p-y)(p^2 - x^2y^2) = 0 \Rightarrow (p-y)(p-xy)(p+xy) = 0 \Rightarrow$$

i) $p-y=0 \Rightarrow y' = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln|y| = x + \ln c, c > 0 \Rightarrow |y| = ce^x, c > 0 \Rightarrow$

$$y = \pm ce^x \Rightarrow y = ce^x, c \in \mathbb{R} \text{ çözümdür.}$$

ii) $p-xy=0 \Rightarrow y' = xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = xdx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int xdx \Rightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + \ln|c|, c \neq 0$

$$\ln|y| = \ln ce^{\frac{x^2}{2}}, c > 0 \Rightarrow y = \pm ce^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y = ce^{\frac{x^2}{2}}, c \in \mathbb{R} \text{ çözümdür.}$$

iii) $p+xy=0 \Rightarrow y' = -xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = -xdx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int xdx \Rightarrow \ln|y| = -\frac{x^2}{2} + \ln|c|,$

$$c \neq 0 \ln|y| = \ln ce^{-\frac{x^2}{2}}, c > 0 \Rightarrow y = \pm ce^{-\frac{x^2}{2}} \text{ ve } y=0, c=0 \Rightarrow y = ce^{-\frac{x^2}{2}}, c \in \mathbb{R} \text{ çözümdür.}$$

$$\text{Sonuçta denklemin genel integrali } (y-ce^x) \left(y-ce^{\frac{x^2}{2}} \right) \left(y-ce^{-\frac{x^2}{2}} \right) = 0, c \in \mathbb{R} \text{ şeklinde bulunur.}$$

b) $3(p+x)^2 = (p-x)^3, p = y'$

Çözüm: $3(p+x)^2 = (p-x)^3$ denkleminde p 'yi çekmek kolay değildir. Fakat x, y dolayısıyla

$y' = p$ 'yi aynı bir t parametresinin fonksiyonu sayarak, $p+x=3t^3$ olacak şekilde parametre dahil edelim. Buna göre, $p+x=3t^3$ ve $p-x=3t^3-2x$ 'yi denklemden dikkate alarak

$$3 \cdot 3^2 t^6 = (3t^3 - 2x)^3 \Leftrightarrow 3t^2 = 3t^3 - 2x \Leftrightarrow 2x = 3t^3 - 3t^2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}(t^3 - t^2),$$

$$p = 3t^3 - x = 3t^3 - \frac{3}{2}(t^3 - t^2) = \frac{3}{2}(t^3 + t^2) \text{ elde edilir.}$$

$$\text{Buradan } dy = \frac{3}{2}(t^3 + t^2)dx = \frac{3}{2}(t^3 + t^2)d\left(\frac{3}{2}(t^3 - t^2)\right) = \frac{9}{4}(t^3 + t^2)(3t^2 - 2t)dt = \frac{9}{4}(3t^5 + t^4 - 2t^3)dt$$

$$\text{ve integralleyerek } y = \int dy = \int \frac{9}{4}(3t^5 + t^4 - 2t^3)dt = \frac{9}{4}\left(\frac{3}{6}t^6 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{4}t^4\right) + c = \frac{9}{8}t^6 + \frac{9}{20}t^5 - \frac{9}{8}t^4 + c,$$

$t, c \in \mathbb{R}$ bulunur. Sonuçta diferansiyel denklemin genel çözümünün parametrik biçimli

$$\text{denklemleri } \begin{cases} x = \frac{3}{2}(t^3 - t^2) \\ y = \frac{9}{8}t^6 + \frac{9}{20}t^5 - \frac{9}{8}t^4 + c \end{cases} \quad t, c \in \mathbb{R} \text{ şeklinde elde edilir.}$$

c) $(4y^3 + y)y'' = (12y^2 - 1)y'^2, p = y'$

Çözüm: Diferansiyel denklem x bağımsız değişkenini aşikâr şekilde bulundurmuyor, buna göre

$y' = p(y)$ olacak şekilde yeni bilinmeyen $p = p(y)$ fonksiyonu dâhil edelim. O halde $y'' = p'_x = p'(y)y' = p \cdot p'(y) = p \cdot p'$ olduğu denklemde dikkate alınarak $(4y^3 + y)p \cdot p' = (12y^2 - 1)p^2$ veya $p[(4y^3 + y)p' - (12y^2 - 1)p] = 0$ denklemi elde edilir. Buradan $p = 0$ ve $(4y^3 + y)p' - (12y^2 - 1)p = 0$ denklemleri ortaya çıkar.

i) $p = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow y = c, c \in \mathbb{R}$ çözümleri elde edilir.

ii) $(4y^3 + y)\frac{dp}{dy} - (12y^2 - 1)p = 0$ denklemini değişkenlerine ayırarak $\frac{dp}{p} = \frac{12y^2 - 1}{4y^3 + y} dy, p \neq 0,$
 $4y^3 + y \neq 0$ bulunur. Buradan

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{12y^2 - 1}{4y^3 + y} dy \Rightarrow \ln|p| = \int \frac{16y^2}{4y^3 + y} dy - \int \frac{4y^2 + 1}{4y^3 + y} dy \Rightarrow \ln|p| = \int \frac{16y}{4y^2 + 1} dy - \int \frac{1}{y} dy \Rightarrow$$

$$\ln|p| = 2\ln|4y^2 + 1| - \ln|y| + \ln|c_1|, c_1 \neq 0 \Rightarrow \ln|p| = \ln\left|\frac{(4y^2 + 1)^2}{y} c_1\right| \Rightarrow p = \pm \frac{c_1(4y^2 + 1)^2}{y} \Rightarrow$$

$$yp = \pm c_1(4y^2 + 1)^2, c_1 \neq 0 \Rightarrow yy' = c_1(4y^2 + 1)^2 \Rightarrow \frac{ydy}{(4y^2 + 1)^2} = c_1 dx, c_1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\int \frac{8ydy}{(4y^2 + 1)^2} = \int \frac{d(4y^2 + 1)}{(4y^2 + 1)^2} = 8 \int c_1 dx \Rightarrow -\frac{1}{4y^2 + 1} = 8c_1 x + c_2 \Rightarrow (8c_1 x + c_2)(4y^2 + 1) = -1, c_1 \neq 0,$$

$c_2 \in \mathbb{R}$ integrali bulunur. Bu denklem $c_1 = 0$ için $y = c, c \in \mathbb{R}$ çözümlerini de kapsıyor.

iii) $4y^3 + y = 0 \Leftrightarrow y(4y^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ iken $y = 0$ bir çözümünü de $(8c_1 x + c_2)(4y^2 + 1) = -1$ denkleminde elde edilebilir.

Cevap: $(8c_1 x + c_2)(4y^2 + 1) = -1, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2. $2yy'' = y^2(3 - 4yy'^2)$ denkleminin $y(4) = 1, y'(4) = -1$ başlangıç değer şartlarını sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm: Diferansiyel denklem bağımsız x değişkenini açık şekilde içermiyor. Buna göre $y' = p(y)$ olacak şekilde yeni bilinmeyen $p = p(y)$ fonksiyonu dâhil edip $y'' = p'(y)y' = p \cdot p'$ olduğunu dikkate alarak denklemi $2ypp' = p^2(3 - 4yp^2)$ denklemine indirgeyelim. $y = 0$ aşıkâr çözümdür. $y \neq 0$ olmak üzere $z = p^2 = z(y)$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$yz' = z(3 - 4yz) \Rightarrow z' - \frac{3}{y}z = -4z^2 \text{ Bernoulli denklemi elde edilir. } u = \frac{1}{z}, u = u(y) \text{ dersek}$$

$$u' + \frac{3}{y}u = 4 \text{ lineer denkleme indirgenir. Formüle göre}$$

$$u = e^{-\int \frac{3}{y} dy} \left(c + \int 4e^{\int \frac{3}{y} dy} dy \right) = e^{-\ln|y^3|} \left(c + \int 4e^{\ln|y^3|} dy \right) = \frac{1}{|y^3|} \left(c + \int 4|y^3| dy \right) = \frac{1}{|y^3|} (c + \text{sign}y \cdot y^4)$$

$$\text{veya } u = \frac{c}{|y|} + y, c \in \mathbb{R} \Rightarrow u = \pm \frac{c}{y} + y, c \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{c + y^2}{y} \Rightarrow z = \frac{y}{c + y^2} \Rightarrow p^2 = (y')^2 = \frac{y}{c + y^2}$$

$$\text{ulunur. Buradan } x = 4 \text{ için } (y'(4))^2 = \frac{y(4)}{c + y^2(4)} \Rightarrow (-1)^2 = \frac{1}{c + 1^2} \Rightarrow c + 1 = 1 \Rightarrow c = 0 \text{ olur.}$$

O halde çözümü $(y')^2 = \frac{y}{0+y^2} \Rightarrow (y')^2 = \frac{1}{y} \Rightarrow y' = \pm \frac{1}{\sqrt{y}}$ denkleminde bulmalıyız. $x=4$ yakın komşuluğunda $y'(x) < 0$ olacağından kesir önünde eksi işareti alalım. Buna göre $\sqrt{y}dy = -dx \Rightarrow \int \sqrt{y}dy = -\int dx \Rightarrow \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = -x + c_1 \Rightarrow \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}(4) = -4 + c_1 \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot 1 = -4 + c \Rightarrow c = \frac{14}{3}$ ve $\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}(x) = -x + \frac{14}{3} \Rightarrow y^{\frac{3}{2}}(x) = -\frac{3}{2}x + 7 \Rightarrow y = \left(7 - \frac{3}{2}x\right)^{\frac{2}{3}}$ çözümü bulunur.

3. $(x+1)yy'' + yy' = xy'^2$, $x \neq -1$ denklemini, y, y', y'' 'ye göre homojen olduğunu dikkate alarak, $y' = yz$ değişken değiştirmesi yardımıyla çözünüz.

Çözüm:

$(x+1)(ty)(ty'') + (ty)(ty') = x(ty')^2 \Rightarrow t^2(x+1)yy'' + t^2yy' = t^2x(y')^2 \Rightarrow (x+1)yy'' + yy' = x(y')^2$ her $t \in \mathbb{R}$ için sağlandığından denklem y, y', y'' değişkenlerine göre homojendir. O halde $y' = yz$ değişken değiştirmesi uygulayalım. $y'' = (yz)' = y'z + yz' = yz^2 + yz'$ olduğunu denklemde dikkate alırsak

$$(x+1)y(yz^2 + yz') + yyz = x(yz)^2 \Rightarrow y^2 \left[(x+1)(z^2 + z') + z - xz^2 \right] = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ veya}$$

$$(x+1)(z^2 + z') + z - xz^2 = 0 \Rightarrow (x+1)z' + z = -z^2 \Rightarrow z' + \frac{z}{(x+1)} = -\frac{z^2}{(x+1)} \text{ Bernoulli denklemi}$$

elde edilir. $y = 0$ aşıkâr çözümdür. $z = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = c$, $c \in \mathbb{R}$ sabit fonksiyonları da

diferansiyel denklemin çözümüdür. Bernoulli denkleminde, $z \neq 0$ sayarak $z = \frac{1}{u}$, $z' = -\frac{u'}{u^2}$

değişken değiştirmesi yapılırsa denklem $u' - \frac{u}{(x+1)} = \frac{1}{(x+1)}$ lineer denkleme indirgenir. O

halde çözüm

$$\begin{aligned} u &= e^{\int \frac{dx}{(x+1)}} \left(c_1 + \int \frac{1}{(x+1)} e^{-\int \frac{dx}{(x+1)}} dx \right) = e^{\ln|x+1|} \left(c_1 + \int \frac{1}{(x+1)} e^{-\ln|x+1|} dx \right) = |x+1| \left(c_1 + \int \frac{1}{(x+1)|x+1|} dx \right) = \\ &= |x+1| \left(c_1 + \operatorname{sgn}(x+1) \int \frac{1}{(x+1)^2} dx \right) = |x+1| \left(c_1 - \frac{\operatorname{sign}(x+1)}{x+1} \right) = c_1 |x+1| - \frac{|x+1| \operatorname{sign}(x+1)}{x+1} = \\ &= c_1 |x+1| - \frac{x+1}{x+1} = c_1 |x+1| - 1 \text{ veya } u = \pm c_1 (x+1) - 1 \Rightarrow u = c_1 (x+1) - 1, c_1 \in \mathbb{R} \text{ şeklinde bulunur.} \end{aligned}$$

Buradan $z = \frac{1}{u} = \frac{1}{c_1(x+1) - 1}$ veya $y' = \frac{y}{c_1(x+1) - 1}$ denklemi elde edilir. $y \neq 0$ sayıp denklemi

değişkenlerine ayırarak integrallersek

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{c_1(x+1) - 1} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{c_1(x+1) - 1} \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{c_1} \ln|c_1(x+1) - 1| + \ln|c_2|, c_1, c_2 \neq 0 \text{ veya}$$

$$\ln|y| = \frac{1}{c_1} \ln|c_1(x+1) - 1| + \ln|c_2| \Rightarrow y = c_2 |c_1(x+1) - 1|^{\frac{1}{c_1}}, c_1, c_2 \neq 0 \text{ genel integrali elde edilir.}$$

$c_1 = 0$ için $\int \frac{dy}{y} = -\int dx \Rightarrow y = ce^{-x}$, $c \in \mathbb{R}$ çözümler ailesi bulunur. Sonuçta diferansiyel

denklemin tüm çözümleri ailesi $y = c$, $y = ce^{-x}$, $c \in \mathbb{R}$ ve $y = c_2 [c_1(x+1) - 1]^{\frac{1}{c_1}}$, $c_1, c_2 \neq 0$ denklemleri ile belirlenir.

4. $x^2 + y^2 = c^2$, $c > 0$ eğrilerini $\alpha = 45^\circ$ açısı altında kesen izogonal yörüngelerin denklemini bulunuz.

Çözüm: Önce verilmiş eğriler ailesinin diferansiyel denklemini bulalım. Bu amaçla denklemin her iki yanının x 'e göre türevini alarak $(x^2 + y^2)'_x = (c^2)'_x \Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$

denklemini elde edelim. Bu denklemde $k = \tan \alpha = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ olmak üzere $x = x_1, y = y_1$ ve

$$y' = \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - k}{1 + k \frac{dy_1}{dx_1}} = \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - 1}{1 + \frac{dy_1}{dx_1}} \text{ de\u0131\u0131stirmesi yaparsak } \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - 1}{1 + \frac{dy_1}{dx_1}} = -\frac{x_1}{y_1} \Rightarrow \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\frac{x_1}{y_1} - 1}{-1 - \frac{x_1}{y_1}} \Rightarrow \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1 - x_1}{y_1 + x_1}$$

elde edilir. İndisler bırakılarak izogonal yörüngelerin diferansiyel denklemi $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$ şeklinde

bulunur. Bu homojen diferansiyel denklemi \u00e7\u00f6zerek izogonal eğrilerin genel denklemini elde edelim. Denklemde $y = xz$, $z = z(x)$, $y' = z + xz'$ olacak şekilde de\u0131i\u0131şken de\u0131i\u0131stirmesi yaparak

$$z + xz' = \frac{xz - x}{xz + x} \Rightarrow xz' = \frac{z-1}{z+1} - z \Rightarrow x \frac{dz}{dx} = -\frac{z^2+1}{z+1} \Rightarrow \frac{z+1}{z^2+1} dz = -\frac{dx}{x} \text{ denklemine indirgeyelim.}$$

Her iki tarafın integrali alınırsa izogonal eğrilerin genel biçimli denklemi

$$\int \frac{z+1}{z^2+1} dz = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{z}{z^2+1} dz + \int \frac{1}{z^2+1} dz = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln|z^2+1| + \arctan z = -\ln|x| + \ln c, \quad c > 0$$

$$\Rightarrow \arctan z = \ln \left| \frac{c}{x\sqrt{1+z^2}} \right| \Rightarrow \frac{\pm c}{x\sqrt{1+z^2}} = e^{\arctan z} \Rightarrow x\sqrt{1+z^2} e^{\arctan z} = c \text{ veya}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} e^{\arctan \frac{y}{x}} = c, \quad c \neq 0 \text{ bulunur.}$$

5. $y^2 = 2cx + c^2$, $c \in \mathbb{R}$ eğrilerine ortogonal olan yörüngelerin denklemini bulunuz.

Çözüm: Verilmiş eğriler ailesinin diferansiyel denklemini bulalım. Bu amaçla denklemin her iki yanının x 'e göre türevini alarak elde edilen $(y^2)'_x = (2cx + c^2)'_x \Rightarrow 2yy' = 2c \Rightarrow yy' = c$ denklemi ile $y^2 = 2cx + c^2$ denkleminden c parametresin yok edelim. Buna göre eğriler ailesinin diferansiyel denklemi $y^2 = 2xyy' + y^2y'^2$ elde edilir. Bu denklemde $x = x_1, y = y_1$ ve

$$y' = -\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}} = -1/y'_1 \text{ de\u0131i\u0131stirmesi yapılarak } y_1^2 = -2x_1y_1 \frac{1}{y'_1} + y_1^2 \left(-\frac{1}{y'_1} \right)^2 \text{ veya}$$

$y_1^2 y_1'^2 = -2x_1y_1y_1' + y_1^2$ bulunur. İndisler bırakılarak ortogonal yörüngelerin diferansiyel denklemi $y^2 y'^2 + 2xyy' = y^2$ şeklinde bulunur. Bu denklem verilmiş ailenin diferansiyel denklemi ile \u00e7akışıyor, dolayısıyla ortogonal yörüngeler ailesi $y = 0$ doğrusu ve $y^2 = 2cx + c^2$, $c \neq 0$ parabol ailesinden oluşuyor.

Uyarı: Her hangi bir eğriler ailesi için ortogonal yörüngeler ailesinin diferansiyel denklemi verilmiş ailenin diferansiyel denkleminden farklı olabilir. Bu durumda elde edilmiş denklemi \u00e7\u00f6zerek yörüngeleri hangi eğriler oldu\u0131unu belirlemek gerekiyor.

6. $y^{IV} + 3y'' + 2y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Sabit katsayılı homojen diferansiyel denkleme karşılık gelen karakteristik denklemi yazıp köklerini bulalım. $k^4 + 3k^2 + 2 = 0 \Rightarrow (k^2 + 1)(k^2 + 2) = 0 \Rightarrow k^2 + 1 = 0$ veya $k^2 + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = i, k_2 = -i, k_3 = \sqrt{2}i, k_4 = -\sqrt{2}i$ basit kökleri vardır. Diferansiyel denklemin bunlara karşılık gelen lineer bağımsız çözümleri $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x, y_3 = \cos \sqrt{2}x, y_4 = \sin \sqrt{2}x$ fonksiyonlarıdır. O halde diferansiyel denklemin genel çözümü $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos \sqrt{2}x + c_4 \sin \sqrt{2}x, c_1, c_2, c_3, c_4, x \in \mathbb{R}$ fonksiyonlar ailesidir.

7. Homojen olmayan lineer diferansiyel denklemleri çözünüz:

a) $y'' - 5y' + 6y = 10\sin x + e^{2x}$

Çözüm: Önce verilmiş denkleme karşılık gelen $y'' - 5y' + 6y = 0$ homojen diferansiyel denklemin genel çözümünü bulalım. $k^2 - 5k + 6 = 0 \Leftrightarrow (k - 2)(k - 3) = 0$ karakteristik denkleminin $k_1 = 2$ ve $k_2 = 3$ basit köklerine karşılık, homojen diferansiyel denklemin $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{3x}$ lineer bağımsız çözümleri vardır. O halde homojen diferansiyel denklemin genel çözümü $\bar{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$ şeklinde elde edilir. Diferansiyel denklemin sağ tarafı $f(x) = 10\sin x + e^{2x}$ özel biçimli olduğundan bu denklemin bir özel çözümü seçme yöntemiyle $y^* = x^r (M_j(x) \cos x + N_j(x) \sin x) + x^s Q_0(x) e^{2x}$ biçiminde bulunabilir. Burada, $k = i$ sayısı karakteristik denklemin kökü olmadığı için $r = 0$ ve $P_0(x) = 10$ olduğundan $j = 0$, $M_j(x) = A, N_j(x) = B, A, B \in \mathbb{R}$, ayrıca $k = 2$ karakteristik denklemin basit kökü olduğundan $s = 1, Q_0(x) = C, C \in \mathbb{R}$ alalım. Buna göre $y^* = A \cos x + B \sin x + C x e^{2x}$ biçiminde özel çözüm arayalım. Bilinmeyen katsayıları belirlemek için $y^* = A \cos x + B \sin x + C x e^{2x}$, $y^{*'} = -A \sin x + B \cos x + C(1 + 2x)e^{2x}$, $y^{*''} = -A \cos x - B \sin x + C(4 + 4x)e^{2x}$ ifadelerini diferansiyel denklemden dikkate alarak

$y^{*''} - 5y^{*'} + 6y^* = -A \cos x - B \sin x + C(4 + 4x)e^{2x} + 5A \sin x - 5B \cos x - 5C(1 + 2x)e^{2x} + 6A \cos x + 6B \sin x + 6C x e^{2x} = 10 \sin x + e^{2x}$ veya $(6A - A - 5B) \cos x + (5A - B + 6B) \sin x + (4C + 4Cx - 5C - 10Cx + 6Cx) e^{2x} = 10 \sin x + e^{2x} \Rightarrow (5A - 5B) \cos x + (5A + 5B) \sin x - C e^{2x} = 10 \sin x + e^{2x}$ özdeşliği ve buna göre $5A - 5B = 0$ $5A + 5B = 10, C = -1$ denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden $A = B = 1, C = -1$ ve diferansiyel denklemin $y^* = A \cos x + B \sin x + C x e^{2x} = \cos x + \sin x - x e^{2x}$ özel çözümü bulunur. Diferansiyel denklemin genel çözümü ise $y = y^* + \bar{y} = \cos x + \sin x - x e^{2x} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ veya $y = \cos x + \sin x + (c_1 - x) e^{2x} + c_2 e^{3x}, c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$ şeklinde elde edilir.

b) $y'' + 2y' - 3y = (2 - 8x)e^{-3x}$

Çözüm: Önce $y'' + 2y' - 3y = 0$ homojen lineer diferansiyel denklemin genel çözümünü bulalım.

$k^2 + 2k - 3 = 0 \Rightarrow (k-1)(k+3) = 0$ karakteristik denklemin $k_1 = 1$, $k_2 = -3$ kökleri karşılık homojen diferansiyel denklemin $y_1 = e^x, y_2 = e^{-3x}$ lineer bağımsız çözümleri vardır. Buna göre homojen denklemin $\bar{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$, $c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$ genel çözümü elde edilir.

Homojen olmayan diferansiyel denklemin bir özel çözümünü $y^* = x^r (Ax + B)e^{-3x}$ şeklinde arayalım. $k = -3$ karakteristik denklemin basit kökü olduğu için $r = 1$ alalım ve özel çözümü $y^* = x(Ax + B)e^{-3x} = (Ax^2 + Bx)e^{-3x}$ biçiminde bulalım. $A, B \in \mathbb{R}$ katsayılarını bulmak için y^* , $y^{*'} = [B + (2A - 3B)x - 3Ax^2]e^{-3x}$ ve $y^{*''} = [(2A - 6B) + (9B - 12A)x + 9Ax^2]e^{-3x}$ ifadelerini diferansiyel denklemde dikkate alıp

$$y^{*''} + 2y^{*'} - 3y^* = [(2A - 6B) + (9B - 12A)x + 9Ax^2]e^{-3x} + 2[B + (2A - 3B)x - 3Ax^2]e^{-3x} - 3(Ax^2 + Bx)e^{-3x} = (2 - 8x)e^{-3x} \text{ veya}$$

$(2A - 6B) + (9B - 12A)x + 9Ax^2 + 2[B + (2A - 3B)x - 3Ax^2] - 3(Ax^2 + Bx) = (2 - 8x)$ veya da $2A - 6B + 2B + (9B - 12A + 4A - 6B - 9B)x + (9A - 6A - 3A)x^2 = 2 - 8x$ özdeşliğini ve buna göre $2A - 4B - (8A + 6B)x = 2 - 8x \Rightarrow 2A - 4B = 2, 8A + 6B = 8$ denklemlerini elde edelim. Bu denklemlerden $A = 1, B = 0$ ve diferansiyel denklemin $y^* = x^2 e^{-3x}$ özel çözümü bulunur. Denklemin genel çözümü $y = y^* + \bar{y} = x^2 e^{-3x} + c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$, $c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$ ailesi olur.

c) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 40 \cos^2 x$.

Çözüm: Önce homojen $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulalım. $k^3 - k^2 + 4k - 4 = 0$ karakteristik denklemin $k^2(k-1) + 4(k-1) = 0 \Rightarrow (k-1)(k^2 + 4) = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 2i, k_3 = -2i$ köklerine karşılık, homojen diferansiyel denklemin $y_1 = e^x, y_2 = \cos 2x, y_3 = \sin 2x$ lineer bağımsız çözümleri vardır. O halde homojen diferansiyel denklemin genel çözümü $\bar{y} = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$, $c_1, c_2, c_3, x \in \mathbb{R}$ şeklinde bulunur.

Homojen olmayan diferansiyel denklemin bir özel y^* çözümünü seçme yöntemiyle bulalım.

Diferansiyel denklemin sağ tarafı $f(x) = 40 \cos^2 x = 20 + 20 \cos 2x$ olduğuna göre özel çözümünü $y^* = Ax^r + x^s (B \cos 2x + C \sin 2x)$ biçiminde arayalım. $k = 0$ karakteristik denklemin kökü olmadığı için $r = 0$ ve $k = 2i, k = -2i$ basit kökler olduğu için $s = 1$ alalım. O halde $y^* = A + x(B \cos 2x + C \sin 2x)$, $A, B, C \in \mathbb{R}$,

$$y^{*'} = B \cos 2x + C \sin 2x + x(2C \cos 2x - 2B \sin 2x),$$

$$y^{*''} = 4C \cos 2x - 4B \sin 2x - x(4C \sin 2x + 4B \cos 2x),$$

$$y^{*'''} = -12B \cos 2x - 12C \sin 2x - x(8C \cos 2x - 8B \sin 2x) \text{ ifadelerini denklemde dikkate alırsak}$$

$$y^{*'''} - y^{*''} + 4y^{*'} - 4y^* = -12B \cos 2x - 12C \sin 2x - x(8C \cos 2x - 8B \sin 2x) - 4C \cos 2x + 4B \sin 2x + x(4B \cos 2x + 4C \sin 2x) + 4B \cos 2x + 4C \sin 2x + x(8C \cos 2x - 8B \sin 2x) - 4A - 4x(B \cos 2x + C \sin 2x) = 20 + 20 \cos 2x \text{ veya}$$

$$-4A + (-12C + 4B + 4C) \sin 2x + (-12B - 4C + 4B) \cos 2x = 20 + 20 \cos 2x \Rightarrow$$

$$-4A + (4B - 8C) \sin 2x - (4C + 8B) \cos 2x = 20 + 20 \cos 2x \text{ özdeşliği ve buna göre } -4A = 20,$$

$4B - 8C = 0, 4C + 8B = -20$ denklemleri elde edilir. Bu, lineer denklemlerden $A = -5, B = -2, C = -1$ bulunur. O halde verilmiş diferansiyel denklemin özel çözümü

$y^* = -5 - x(2\cos 2x + \sin 2x)$ fonksiyonu, genel çözümü ise

$y = y^* + \bar{y} = -5 - x(2\cos 2x + \sin 2x) + c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$, $c_1, c_2, c_3, x \in \mathbb{R}$ fonksiyonlar ailesi olur.

8. $y'' - 4y' + 4y = \frac{2e^{2x}}{1+x^2}$ denklemini sabitin varyasyonu yöntemiyle çözünüz.

Çözüm: $y'' - 4y' + 4y = 0$ homojen denkleminin genel çözümünü bulalım. $k^2 - 4k + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (k-2)^2 = 0$ karakteristik denkleminin $k_1 = k_2 = 2$ katlı kökü vardır. Buna göre homojen

diferansiyel denklemin genel çözümü $\bar{y} = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$, $c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$ şeklinde bulunur. Homojen olmayan diferansiyel denklemin bir özel çözümünü, sabitin değişimi yöntemi ile

$y^* = [c_1(x) + c_2(x)x]e^{2x}$ şeklinde arayalım. Buradaki türevlenebilir $c_1(x)$, $c_2(x)$ fonksiyonları

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{2x} + c_2'(x)xe^{2x} = 0 \\ c_1'(x)2e^{2x} + c_2'(x)(2x+1)e^{2x} = \frac{2e^{2x}}{1+x^2} \end{cases} \text{ sisteminden bulunur. Gramer yöntemine göre}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & (2x+1)e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}(1+2x-2x) = e^{4x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ \frac{2e^{2x}}{1+x^2} & (2x+1)e^{2x} \end{vmatrix} = 0 - \frac{2xe^{4x}}{1+x^2} = -\frac{2xe^{4x}}{1+x^2}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \frac{2e^{2x}}{1+x^2} \end{vmatrix} = \frac{2e^{4x}}{1+x^2} \text{ ve } c_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-\frac{2xe^{4x}}{1+x^2}}{e^{4x}} = -\frac{2x}{1+x^2} \quad c_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\frac{2e^{4x}}{1+x^2}}{e^{4x}} = \frac{2}{1+x^2}$$

elde edilir. Buradan, integralleme sonucu

$$c_1(x) = \int c_1'(x)dx = -\int \frac{2x}{1+x^2}dx = -\ln(1+x^2) + c_1 \text{ ve}$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x)dx = \int \frac{2}{1+x^2}dx = 2\arctan x + c_2, \quad c_1, c_2, x \in \mathbb{R} \text{ bulunur. O halde } c_1 = c_2 = 0 \text{ ve}$$

$$c_1(x) = -\ln(1+x^2), \quad c_2(x) = 2\arctan x \text{ olmak üzere } y^* = [-\ln(1+x^2) + 2x\arctan x]e^{2x} \text{ verilmiş}$$

diferansiyel denklemin özel çözümüdür. Genel çözümü ise

$$y = y^* + \bar{y} = [-\ln(1+x^2) + 2x\arctan x]e^{2x} + (c_1 + c_2 x)e^{2x}, \quad c_1, c_2, x \in \mathbb{R} \text{ ailesidir.}$$

9. Her hangi bir yöntem ile başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz:

$$y'' - y' - 12y = e^{-2x}(7\cos x - 5\sin x) - 7e^{-3x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Çözüm: $y'' - y' - 12y = 0$ homojen denkleminin genel çözümünü bulalım. $k^2 - k - 12 = 0$ karakteristik denkleminin $k_1 = 4$, $k_2 = -3$ köklerine karşılık, homojen diferansiyel denkleminin

$y_1 = e^{4x}$, $y_2 = e^{-3x}$ lineer bağımsız çözümleri vardır. Denklemin genel çözümü $\bar{y} = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-3x}$,

$c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$ şeklinde bulunur. Homojen olmayan denklemin bir y^* özel çözümünü seçme

yöntemiyle bulalım. $y'' - y' - 12y = e^{-2x}(7\cos x - 5\sin x)$ denkleminin bir çözümü y_1^* ,

$y'' - y' - 12y = -7e^{-3x}$ denkleminin bir çözümü y_2^* ise $y^* = y_1^* + y_2^*$ verilmiş diferansiyel denklemin özel çözümüdür.

$y'' - y' - 12y = e^{-2x}(7\cos x - 5\sin x)$ denkleminin bir özel çözümünü $y_1^* = x^r e^{-2x}(A\cos x + B\sin x)$ şeklinde arayalım. $k = -2 + i$ sayısı karakteristik denklemin kökü olmadığından $r = 0$ alalım.

Buna göre $y_1^* = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x)$, $y_1^{*'} = -2e^{-2x}(A\cos x + B\sin x) + e^{-2x}(-A\sin x + B\cos x) = e^{-2x}[(B - 2A)\cos x - (A + 2B)\sin x]$

$y_1^{*''} = -2e^{-2x}[(B - 2A)\cos x - (A + 2B)\sin x] + e^{-2x}[-(B - 2A)\sin x - (A + 2B)\cos x] = -e^{-2x}[(4B - 3A)\cos x - (4A + 3B)\sin x]$ ifadeleri denklemde dikkate alınırsa

$y_1^{*''} - y_1^{*'} - 12y_1^* = -e^{-2x}[(4B - 3A)\cos x - (4A + 3B)\sin x] - e^{-2x}[(B - 2A)\cos x - (A + 2B)\sin x] - 12e^{-2x}(A\cos x + B\sin x) = e^{-2x}(7\cos x - 5\sin x)$ veya

$(3A - 4B)\cos x + (4A + 3B)\sin x + (2A - B)\cos x + (A + 2B)\sin x - 12A\cos x - 12B\sin x = 7\cos x - 5\sin x$

$(5A - 5B - 12A)\cos x + (5A + 5B - 12B)\sin x = 7\cos x - 5\sin x$ özdeşliği ve buna göre

$-5B - 7A = 7$, $5A - 7B = -5$ denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden $A = -1$, $B = 0$, dolayısıyla $y_1^* = -e^{-2x}\cos x$ çözümü bulunur.

Benzer şekilde $y'' - y' - 12y = -7e^{-3x}$ denkleminin lineer bağımsız özel çözümünü $y_2^* = Cx^s e^{-3x}$ şeklinde arayalım. $k = -3$ sayısı karakteristik denklemin basit kökü olduğundan $s = 1$ alalım.

$y_2^* = Cxe^{-3x}$, $y_2^{*'} = C(1 - 3x)e^{-3x}$, $y_2^{*''} = C(-6 + 9x)e^{-3x}$ ifadelerini denklemde dikkate alırsak

$y_2^{*''} - y_2^{*'} - 12y_2^* = C(-6 + 9x)e^{-3x} - C(1 - 3x)e^{-3x} - 12Cxe^{-3x} = -7e^{-3x}$ veya

$C(-6 + 9x) - C(1 - 3x) - 12Cx = -7 \Rightarrow C(-6 + 9x - 1 + 3x - 12x) = -7$ özdeşliği ve buna göre $-7C = -7 \Rightarrow C = 1$ elde edilir. Böylelikle $y_2^* = xe^{-3x}$ özel çözümü bulunur. Sonuçta verilmiş

diferansiyel denklemin bir özel çözümü $y^* = y_1^* + y_2^* = -e^{-2x}\cos x + xe^{-3x} \Rightarrow y^* = -e^{-2x}\cos x + xe^{-3x}$ fonksiyonu, genel çözümü ise $y = y^* + \bar{y} = -e^{-2x}\cos x + xe^{-3x} + c_1 e^{4x} + c_2 e^{-3x}$, $c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$ ailesi olur.

$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ başlangıç şartlarını sağlayan çözümü bulmak için c_1 ve c_2 sabitlerini

$y(0) = -e^{-2 \cdot 0}\cos 0 + 0 \cdot e^{-3 \cdot 0} + c_1 e^{4 \cdot 0} + c_2 e^{-3 \cdot 0} = -1 + c_1 + c_2 = 0$ ve

$y' = 2e^{-2x}\cos x + e^{-2x}\sin x + e^{-3x} - 3xe^{-3x} + 4c_1 e^{4x} - 3c_2 e^{-3x} \Rightarrow$

$y'(0) = 2e^0\cos 0 + e^0\sin 0 + e^0 - 3 \cdot 0 \cdot e^0 + 4c_1 e^0 - 3c_2 e^0 = 3 + 4c_1 - 3c_2 = 0$ şartları sağlanacak

şekilde seçelim. Elde edilen $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 4c_1 - 3c_2 = -3 \end{cases}$ sistemini $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ çözümü için başlangıç değer

probleminin $y = -e^{-2x}\cos x + xe^{-3x} + e^{-3x}$ çözümü bulunur.