

1. ANALİZ-III VIZE KONULARIYLA İLGİLİ ÇÖZÜM ÖRNEKLERİ

1. Limitleri bulunuz:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sin \frac{1}{n} \cos e^n}{\sqrt{n^3} + \sqrt[3]{n^2+1}} = ?$

Çözüm: $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos e^n$ limiti mevcut olmadığından bu limite çarpımın ve bölümün limiti

kuralını uygulamayız. Fakat $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^3} + \sqrt[3]{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(\sqrt{n} + \sqrt[3]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}} = \frac{1}{+\infty + \sqrt[3]{0}} = 0, |\cos e^n| \leq 1, n \in \mathbb{N}^+$$

dikkate alınırsa, bilinen teoreme göre sonsuz küçük dizi ile sınırlı dizinin çarpımı sonsuz küçük

dizi olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sin \frac{1}{n} \cos e^n}{\sqrt{n^3} + \sqrt[3]{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cos e^n}{\sqrt{n^3} + \sqrt[3]{n^2+1}} = 1 \cdot 0 = 0$ bulunur.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n^5 + n^2 + 1} - \sqrt{n^5 + 1}) = ?$

Çözüm: Verilmiş limit $\infty \cdot (\infty - \infty)$ biçiminde belirsizlik durumu oluşturuyor. Limiti

bulmak için dizinin ifadesini dönüştürelim. Bu amaçla ifadeyi $\sqrt{n^5 + n^2 + 1} + \sqrt{n^5 + 1}$ ile

çarpalım ve bölelim. Buna göre,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n^5+n^2+1}-\sqrt{n^5+1})(\sqrt{n^5+n^2+1}+\sqrt{n^5+1})}{(\sqrt{n^5+n^2+1}+\sqrt{n^5+1})} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(n^5+n^2+1-n^5-1)}{(\sqrt{n^5+n^2+1}+\sqrt{n^5+1})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2\sqrt{n}}{(\sqrt{n^5+n^2+1}+\sqrt{n^5+1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^5}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^5}})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^5}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^5}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^5}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^5}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} (\ln n + 4^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = ?$

Çözüm: Verilmiş limit $\infty \cdot \infty^0$ biçiminde belirsizlik durumu oluşturuyor.

$$x_n = \sqrt[n]{n^2} (\ln n + 4^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = 4 \sqrt[n]{n^2} \left(\frac{\ln n}{4^n} + 1 + \frac{3^n}{4^n} \right)^{\frac{1}{n}}, 0 \leq \ln n \leq n \leq 2^n, 0 \leq \frac{3^n}{4^n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^+$$

$$\text{olduğu ve } 4 \sqrt[n]{n^2} \leq x_n \leq 4 \sqrt[n]{n^2} \left(\frac{\ln n}{4^n} + 1 + \frac{3^n}{4^n} \right)^{\frac{1}{n}} \leq 4 \sqrt[n]{n^2} \left(\frac{2^n}{4^n} + 1 + \frac{3^n}{4^n} \right)^{\frac{1}{n}} \leq$$

$$\leq 4 \sqrt[n]{n^2} (1 + 1 + 1)^{\frac{1}{n}} = 4 \sqrt[n]{n^2} \sqrt[n]{3}, \forall n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow 4 \sqrt[n]{n^2} \leq x_n \leq 4 \sqrt[n]{n^2} \sqrt[n]{3}, \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ eşitsizliği}$$

dikkate alınırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^2 = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1$ nedeniyle Sandviç teoremine göre

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$ elde edilir.

2. yöntem: Bilinen $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right)^2 = 1^2 = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{4^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 0$

limitlerine ve kuvvet-üstel fonksiyonun limiti kuralına göre

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} 4 \left(\frac{\ln n}{4^n} + 1 + \frac{3^n}{4^n} \right)^{\frac{1}{n}} &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{4^n} + 1 + \frac{3^n}{4^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{4^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{4^n} \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = 4 \cdot 1 \cdot (0 + 1 + 0)^0 = 4 \cdot 1 = 4 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+3n+2}{n^3} \right)^{\frac{n^3+n \sin 2n}{n+1}} = ?$

Çözüm: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+3n+2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3n+2}{n^3}\right) = 1 + 0 = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+n \sin 2n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 + \frac{\sin 2n}{n^2}\right)}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} =$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{\sin 2n}{n^2}\right) n^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin 2n}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty \cdot \frac{1+0}{1+0} = +\infty$ olduğu için verilmiş limit $[1^\infty]$

biçiminde belirsizlik durumu oluşturuyor. Limiti bulmak için vardır. $u_n = \frac{3n+2}{n^3}$, $v_n = \frac{n^3+n \sin n}{n+1}$

olmak üzere kuvvet-üstel fonksiyonun limiti kuralını uygulayalım. Buna göre,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+3n+2}{n^3} \right)^{\frac{n^3+n \sin 2n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^3+n \sin 2n}{n+1} \ln \left(1 + \frac{3n+2}{n^3}\right)} = e^k, \quad k = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{n^3} \cdot \frac{n^3+n \sin 2n}{n+1} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left(3 + \frac{2}{n}\right) \left(1 + \frac{\sin 2n}{n^2}\right)}{n^4 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(3 + \frac{2}{n}\right) \left(1 + \frac{\sin 2n}{n^2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right) \left(1 + \frac{\sin 2n}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{(3+0)(1+0)}{1+0} = 3 \text{ elde edilir.}$$

Sonuçta $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+3n+2}{n^3} \right)^{\frac{n^3+n \sin 2n}{n+1}} = e^k = e^3$ bulunur.

2. $\{x_n\} = \left\{ \cos \frac{\pi n}{3} + 2 \sin \frac{\pi n}{3} \right\}$ dizisinin kısmi limitlerini, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ limitlerini bulunuz.

Çözüm: $\cos \frac{\pi n}{3}$ ve $\sin \frac{\pi n}{3}$ fonksiyonlarının en küçük pozitif periyodu $T = 6$ dır.

Her n sayma sayısı için

$n = 6k, n = 6k + 1, n = 6k + 2, n = 6k + 3, n = 6k + 4, n = 6k + 5, k \in \mathbb{N}^+$ gösterimlerinden

sadece birinin geçerli olduğunu bilerek verilmiş dizinin

$\{x_{6k}\}, \{x_{6k+1}\}, \{x_{6k+2}\}, \{x_{6k+3}\}, \{x_{6k+4}\}, \{x_{6k+5}\}$ gibi alt dizilerini ele alalım. Alt dizilerin

limitleri olan kısmi limitleri bulalım. Buna göre,

$$x_{6k} = \cos \frac{6\pi k}{3} + 2 \sin \frac{6\pi k}{3} = \cos 2\pi k + 2 \sin 2\pi k = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{6k} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1,$$

$$x_{6k+1} = \cos \frac{\pi(6k+1)}{3} + 2 \sin \frac{\pi(6k+1)}{3} = \cos \left(2\pi k + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \sin \left(2\pi k + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} + 2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1+2\sqrt{3}}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{6k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2\sqrt{3}}{2} = \frac{1+2\sqrt{3}}{2},$$

$$x_{6k+2} = \cos \frac{\pi(6k+2)}{3} + 2 \sin \frac{\pi(6k+2)}{3} = \cos \left(2\pi k + \frac{2\pi}{3}\right) + 2 \sin \left(2\pi k + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} + 2 \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}-1}{2},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{6k+2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{3}-1}{2} = \frac{2\sqrt{3}-1}{2},$$

$$x_{6k+3} = \cos \frac{\pi(6k+3)}{3} + 2 \sin \frac{\pi(6k+3)}{3} = \cos \left(2\pi k + \frac{3\pi}{3}\right) + 2 \sin \left(2\pi k + \frac{3\pi}{3}\right) = \cos \frac{3\pi}{3} + 2 \sin \frac{3\pi}{3} = -1,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{6k+3} = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1) = -1,$$

$$x_{6k+4} = \cos \frac{\pi(6k+4)}{3} + 2 \sin \frac{\pi(6k+4)}{3} = \cos \left(2\pi k + \frac{4\pi}{3}\right) + 2 \sin \left(2\pi k + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos \frac{4\pi}{3} + 2 \sin \frac{4\pi}{3} =$$

$$-\frac{2\sqrt{3}+1}{2}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{6k+4} = -\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1+2\sqrt{3}}{2} = -\frac{1+2\sqrt{3}}{2},$$

$$x_{6k+5} = \cos \frac{\pi(6k+5)}{3} + 2 \sin \frac{\pi(6k+5)}{3} = \cos \left(2\pi k + \frac{5\pi}{3}\right) + 2 \sin \left(2\pi k + \frac{5\pi}{3}\right) = \cos \frac{5\pi}{3} + 2 \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1-2\sqrt{3}}{2},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{6k+5} = -\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1-2\sqrt{3}}{2} = \frac{1-2\sqrt{3}}{2} \text{ elde edilir.}$$

Böylelikle dizinin $\left\{1, \frac{1+2\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}-1}{2}, -1, -\frac{1+2\sqrt{3}}{2}, \frac{1-2\sqrt{3}}{2}\right\}$ gibi 6 tane, birbirinden farklı kısmi

limitleri bulunur. Öte yandan $\{x_n\}$ dizisinin her hangi bir $\{x_{n_k}\}$ yakınsak alt dizisi yukarıdaki

alt dizilerin sadece biriyle sonsuz sayıda ortak terime sahip olabilir. Yakınsak dizinin her alt

dizisi bu diziyle aynı limite yakınsadığından $\{x_{n_k}\}$ alt dizisinin limiti bulduğumuz kısmı

limitlerin biri ile çakışır. Sonuçta $\{x_n\}$ dizisinin kısmi limitleri kümesi

$A = \left\{1, \frac{1+2\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}-1}{2}, -1, -\frac{1+2\sqrt{3}}{2}, \frac{1-2\sqrt{3}}{2}\right\}$ olur. O halde

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup A = \max \left\{1, \frac{1+2\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}-1}{2}, -1, -\frac{1+2\sqrt{3}}{2}, \frac{1-2\sqrt{3}}{2}\right\} = \frac{1+2\sqrt{3}}{2},$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf A = \min \left\{1, \frac{1+2\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}-1}{2}, -1, -\frac{1+2\sqrt{3}}{2}, \frac{1-2\sqrt{3}}{2}\right\} = -\frac{1+2\sqrt{3}}{2} \text{ bulunur.}$$

3. *A.L.Cauchy* kriterini kullanarak $\{x_n\} = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n \cos \frac{\pi}{3} n}\right\}$ dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: *Cauchy* kriterine göre, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n \cos \frac{\pi}{3} n} \notin \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 \forall N \exists m_0$

$\exists n_0 (m_0 \geq n_0 > N \text{ ve } |x_{m_0} - x_{n_0}| \geq \varepsilon_0)$ önermesi geçerli olacak şekilde $\exists \varepsilon_0 > 0$ sayısı ve her

N sayısına karşılık $m_0, n_0 \in \mathbb{N}^+$ sayıları bulmalıyız. Kolaylıkla

$$|x_{m_0} - x_{n_0}| = \left| \left(\frac{2}{3}\right)^{m_0 \cos \frac{\pi}{3} m_0} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n_0 \cos \frac{\pi}{3} n_0} \right| \geq \varepsilon_0 \text{ eşitsizliğinin } \varepsilon_0 = \frac{1}{2} \text{ ve her } N \text{ 'ye göre}$$

$n_0 = 6k_0 > N, m_0 = 6k_0 + 3 > N, k_0 \in \mathbb{N}^+$ için (beyle k_0 Arşimet aksiyomuna göre vardır)

sağlandığı görülür. Gerçekten

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{2}{3}\right)^{(6k_0+1) \cos \frac{\pi}{3} (6k_0+3)} - \left(\frac{2}{3}\right)^{6k_0 \cos \frac{\pi}{3} 6k_0} \right| &= \left| \left(\frac{2}{3}\right)^{(6k_0+1) \cos \pi} - \left(\frac{2}{3}\right)^{6k_0 \cos 0} \right| = \left| \left(\frac{2}{3}\right)^{-(6k_0+1)} - \left(\frac{2}{3}\right)^{6k_0} \right| = \\ &= \left| \left(\frac{3}{2}\right)^{6k_0+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{6k_0} \right| = \left(\frac{3}{2}\right)^{6k_0+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{6k_0} \geq \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} = \varepsilon_0 \text{ veya } |x_{m_0} - x_{n_0}| \geq \varepsilon_0 \text{ olur. O halde} \end{aligned}$$

Cauchy kriteri gereği $\{x_n\}$ dizisi ıraksaktır.

4. $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{3 + \frac{1}{4}x_n^2}, n \in \mathbb{N}$ dizisinin monoton ve sınırlı olduğunu gösteriniz, limitini bulunuz.

Çözüm: Önce $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{3 + \frac{1}{4}x_n^2} \geq \sqrt{3} > 0, n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^+$ olduğunu

fark edelim. Tümevarım yoluyla dizinin artan olduğunu gösterelim. $n = 1$ için

$$x_2 = \sqrt{3 + \frac{1}{4}x_1^2} = \sqrt{3 + \frac{1}{4} \cdot 1} > 1 = x_1 \text{ geçerlidir. } n = k \text{ için } x_k \leq x_{k+1} \text{ varsayarak } n = k + 1$$

için $x_{k+1} \leq x_{k+2}$ olduğunu gösterelim. Kolaylıkla

$$0 < x_k \leq x_{k+1} \Rightarrow x_k^2 \leq x_{k+1}^2 \Rightarrow 3 + \frac{1}{4}x_k^2 \leq 3 + \frac{1}{4}x_{k+1}^2 \Rightarrow x_{k+1} = \sqrt{3 + \frac{1}{4}x_k^2} \leq \sqrt{3 + \frac{1}{4}x_{k+1}^2} = x_{k+2}$$

elde edilir. Böylelikle $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^+$ yani $\{x_n\}$ dizisi aratandır.

Şimdi gösterelim ki, $\{x_n\}$ dizisi üstten sınırlıdır. $n = 1$ için $x_1 = 1 \leq 2$ açıktır. $n = k$ için

$$x_k \leq 2 \text{ varsayarak } n = k + 1 \text{ için } x_{k+1} = \sqrt{3 + \frac{1}{4}x_k^2} \leq \sqrt{3 + \frac{1}{4}2^2} = 2 \text{ olduğunu görürüz.}$$

Dolayısıyla $x_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}^+$ yani dizi üstten 2 sayısı ile sınırlıdır. O halde monoton dizinin

limiti hakkında Teoreme göre $\{x_n\}$ dizisi yakınsaktır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$

limitleri vardır. $x_{n+1}^2 = 3 + \frac{1}{4}x_n^2$ eşitliğinin her iki yanında limite geçilirse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}^2 = 3 + \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} \right)^2 = 3 + \frac{1}{4} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^2 \Rightarrow a^2 = 3 + \frac{1}{4} a^2 \text{ veya } a^2 = 4,$$

$a = \pm 2$ elde edilir. $x_n \geq 0$ eşitsizliğinde limite geçilerek $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow a \geq 0$ elde edilir.

$a \geq 0$ ve $a = \pm 2$ şartlarından $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = 2$ bulunur.

5. Dizinin sonsuz büyük veya sonsuz küçük olduğunu inceleyiniz:

a) $x_n = \frac{\sin n \ln(n+1) - 2 \cos n}{\sqrt{1+n}}$

Çözüm:

a) Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $|\sin n| \leq 1, |\cos n| \leq 1$ olduğuna göre $\{\sin n\}$ ve $\{\cos n\}$ dizileri sınırlıdır.

Öte yandan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$ dır. Sonsuz küçük dizi ile sınırlı dizinin çarpımı

sonsuz küçülen olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n \ln(n+1)}{\sqrt{n+1}} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n+1}} = 0$ elde edilir. Limitin aritmetik

kurallarına göre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n \ln(n+1)}{\sqrt{n+1}} - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n+1}} = 0 - 2 \cdot 0 = 0$ bulunur dolayısıyla $\{x_n\}$

dizisi sonsuz küçüldür.

b) $y_n = \frac{5^n + n^3}{n^7 (\sqrt[5]{n} + 4^n)}$

Çözüm: $\lim_{n \rightarrow \infty} (5^n + n^3) = \lim_{n \rightarrow \infty} 5^n + \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = +\infty + (+\infty) = +\infty$ ve

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^7 (\sqrt[5]{n} + 4^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^7 \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n) = +\infty \cdot [1 + (+\infty)] = +\infty$ olduğundan

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + n^3}{n^7 (\sqrt[5]{n} + 4^n)}$ limiti $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ biçiminde belirsizlik durumu oluşturuyor. Limitin

aritmetik kurallarını kullanarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n (1 + \frac{n^3}{5^n})}{4^n n^7 (\frac{\sqrt[5]{n}}{4^n} + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{5}{4})^n}{n^7} \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{n^3}{5^n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{\sqrt[5]{n}}{4^n} + 1)} = +\infty \cdot \frac{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{5^n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{n} + 1} = +\infty \cdot \frac{1+0}{0.1+0} =$$

$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$ elde ederiz. Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, (a > 1, k > 0)$ önemli

limitleri kullandık. Böylelikle, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ ve $\{y_n\}$ sonsuz büyük dizidir.

6. Aşağıdakilerin geçerli olup olmadığını inceleyiniz:

a) $n\sqrt{n^2+1} \arctan \frac{1}{n} = o\left(n^{\frac{5}{2}}(\sqrt[5]{e}-1)\right), n \rightarrow \infty$

Çözüm: Tanıma göre, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n^2+1} \arctan \frac{1}{n}}{n^{\frac{5}{2}}(\sqrt[5]{e}-1)} = 0$ olup olmadığını kontrol etmeliyiz. Limiti bulmak

amacıyla $\arctan \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty$ ve $e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty$ olduğu kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n^2+1} \arctan \frac{1}{n}}{n^{\frac{5}{2}}(\sqrt[5]{e}-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \arctan \frac{1}{n}}{n^{\frac{5}{2}}(e^{\frac{1}{n}}-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n}}{n^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{1+0}}{+\infty} = 0 \text{ elde}$$

edilir. Böylece eşitlik geçerlidir.

b) $\frac{(\sqrt{1+\tan \frac{1}{n}}-1)}{n} \sim \frac{\sqrt[5]{5}}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right), n \rightarrow \infty$

Çözüm: Tanıma göre, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1+\tan \frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{n}{\sqrt[5]{5} \ln \left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} = 1$ olup olmadığını kontrol etmeliyiz. Limiti bulmak amacıyla $\tan \frac{1}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \Rightarrow \sqrt{1+\tan \frac{1}{n}}-1 \sim \frac{1}{2} \tan \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n}, n \rightarrow \infty$ ve

$\ln \left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}, n \rightarrow \infty$ olduğu kullanılırsa bilinen kurala göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1+\tan \frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{n}{\sqrt[5]{5} \ln \left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(\sqrt{1+\tan \frac{1}{n}}-1\right)}{n \cdot \sqrt[5]{5} \ln \left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n}}{n \cdot \sqrt[5]{5} \cdot \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[5]{5}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{5}} = \frac{1}{1} = 1 \text{ elde edilir.}$$

Böylece denklik geçerlidir.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ serisinin:

a) S_n kısmi toplamını bulunuz.

b) tanıma dayanarak yakınsak olduğunu gösteriniz ve S toplamını bulunuz.

Çözüm:

a) Serini genel terimini

$$a_n = \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{8n}{8(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{8(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right], n \in \mathbb{N}^+ \text{ şeklinde}$$

göstereyim. Buna göre

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right] = \\ &= \frac{1}{8} \left[\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{8} \left[1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right] = \frac{1}{8} \left[1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right], n \in \mathbb{N}^+ \\ S_n &= \frac{1}{8} \left[1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right], n \in \mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

$$\text{b) Tanıma göre } S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{8} \left[1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right] = \frac{1}{8} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right] =$$

$$\frac{1}{8} \left[1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \right] = \frac{1}{8} [1 - 0] = \frac{1}{8} \in \mathbb{R} \text{ olduğundan seri yakınsaktır ve toplamı}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{1}{8} \text{ dir.}$$

8. Karşılaştırma testini kullanarak serilerin yakınsaklığını inceleyiniz:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1 + \cos^2 \sqrt{n^3})}{(\sqrt{n} + 1)\sqrt[3]{n^2}}$$

Çözüm: Önce $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1 + \cos^2 \sqrt{n^3})}{(\sqrt{n} + 1)\sqrt[3]{n^2}}$ serisinin terimlerinin işaretini belirleyelim.

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ için } \cos^2 \sqrt{n^3} > 0 \Rightarrow 1 + \cos^2 \sqrt{n^3} > 1 \Rightarrow \ln(1 + \cos^2 \sqrt{n^3}) > 0, \sqrt[3]{n^2} > 0, \sqrt{n} + 1 > 0$$

$$\text{olduğu için } a_n = \frac{\ln(1 + \cos^2 \sqrt{n^3})}{(\sqrt{n} + 1)\sqrt[3]{n^2}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ olur, yani seri pozitif terimlidir.}$$

$a_n = \frac{\ln(1 + \cos^2 \sqrt{n^3})}{(\sqrt{n} + 1)\sqrt[3]{n^2}} < \frac{\ln(1 + 1)}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n^2}} = \frac{\ln 2}{n^{\frac{7}{6}}}, \forall n \in \mathbb{N}^+$ eşitsizliğine dayanarak verilmiş seriyi

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ harmonik serisiyle karşılaştıralım. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ harmonik serisi $\alpha = \frac{7}{6} > 1$

olduğundan yakınsaktır. O halde test gergi verilmiş $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsaktır.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin \left(\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}}} - 1 \right)$

Çözüm: Önce $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin \left(\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}}} - 1 \right)$ serisinin terimlerinin işaretini

belirleyelim. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow 1 < 1 + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}} \leq 2 \Rightarrow 0 < \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}}} - 1 \leq \sqrt{2} - 1 < 1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow a_n = \sqrt{n} \sin \left(\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}}} - 1 \right) > 0$ olması açıktır, yani seri pozitif terimlidir.

Verilmiş seriye karşılaştırma testinin limit formunu uygulayalım. Bilinen $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}}} - 1 \sim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}}, n \rightarrow \infty \Rightarrow a_n = \sqrt{n} \sin \left(\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}}} - 1 \right) \sim \frac{\sqrt{n}}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}} = b_n, n \rightarrow \infty$

bağıntılarından fayadalarak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisini $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisiyle karşılaştıralım. Buna göre

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \sin \left(\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}}} - 1 \right)}{\frac{\sqrt{n}}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin \left(\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}}} - 1 \right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}}}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \text{ elde}$$

edilir. $0 < K < +\infty$ olduğu için test gereği $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{6}}}$ serileri aynı

yakınsaklık karakterine sahiptirler. $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{6}}}$ harmonik serisi $\alpha = \frac{5}{6} < 1$ olduğundan ıraksaktır.

O halde test gergi verilmiş $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de ıraksaktır.

9. D'Alambert veya A.L.Cauchy testini kullanarak serilerin yakınsaklığını inceleyiniz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$

Çözüm: Serinin $a_n = n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}, n \in \mathbb{N}^+$ terimlerinin işaretini belirleyelim. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için

$0 < n^2, 0 < \frac{\pi}{2^n} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2^n} > 0 \Rightarrow a_n = n^2 \sin \frac{\pi}{2^n} > 0$ geçerli olduğu için seri pozitif

terimlidir. D'Alambert oran testini uygulayalım. Buna göre

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}} = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2^n} \rightarrow 0, \frac{\pi}{2^{n+1}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \\ \sin \frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi}{2^n}, \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \sim \frac{\pi}{2^{n+1}}, n \rightarrow \infty \end{array} \right] =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \frac{\pi}{2^{n+1}}}{n^2 \frac{\pi}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

elde edilir. $D < \frac{1}{2}$ olduğundan test gerği verilmiş $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$ serisi yakınsaktır.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$

Çözüm: Serinin $a_n = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}^+$ terimlerinin işaretini belirleyelim. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için

$\frac{n+1}{n} > 0, 3^n > 0 \Rightarrow a_n = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n} > 0$ geçerli olduğundan seri pozitif terimlidir. *A.L.Cauchy*

kök testini uygulayalım. Buna göre,

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot e = \frac{e}{3} \text{ bulunur.}$$

$C = \frac{e}{3} < 1$ olduğundan test gereği verilmiş seri yakınsaktır.