

Analiz-III Final Sınavı konularıyla ilgili çözüm örnekleri.

1a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot \dots \cdot \ln(n+1)}{\ln(2+e) \cdot \ln(3+e) \cdot \dots \cdot \ln(n+1+e)}$ serisinin yakınsaklığını: *Raabe* testi yardımıyla inceleyiniz.

Çözüm: $a_n = \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot \dots \cdot \ln(n+1)}{\ln(2+e) \cdot \ln(3+e) \cdot \dots \cdot \ln(n+1+e)} > 0$, $n \geq 1$ olduğunu teyit edelim. Her $n \geq 1$

için $\ln(n+1) > 0$, $\ln(n+1+e) > 0$ olduğundan $\ln 2 \ln 3 \cdot \dots \cdot \ln(n+1) > 0$,

$\ln(2+e) \ln(3+e) \cdot \dots \cdot \ln(n+1+e) > 0 \Rightarrow a_n > 0$ olur dolayısıyla seri pozitif terimlidir.

$$R_n = n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = n \left(\frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot \dots \cdot \ln(n+1)}{\ln(2+e) \cdot \ln(3+e) \cdot \dots \cdot \ln(n+1+e)} \cdot \frac{\ln(2+e) \cdot \ln(3+e) \cdot \dots \cdot \ln(n+1+e) \cdot \ln(n+2+e)}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot \dots \cdot \ln(n+1) \cdot \ln(n+2)} - 1 \right) =$$

$$= n \left(\frac{\ln(n+2+e)}{\ln(n+2)} - 1 \right) = \frac{n [\ln(n+2+e) - \ln(n+2)]}{\ln(n+2)} = \frac{n \ln \left(\frac{n+2+e}{n+2} \right)}{\ln(n+2)} = \frac{\ln \left(1 + \frac{e}{n+2} \right)^n}{\ln(n+2)} \quad \text{olmak üzere}$$

Raabe testinin limit formuna göre

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{e}{n+2} \right)^n}{\ln(n+2)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{e}{n+2} \right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+2)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{en}{n+2}}}{+\infty} = \frac{\ln e^e}{+\infty} = \frac{e}{+\infty} = 0 \quad \text{bulunur. O halde}$$

$R = 0 < 1$ olduğunda verilmiş seri ıraksaktır.

1b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+n^2}}$ serisinin yakınsaklığını integral testi yardımıyla inceleyiniz.

Çözüm: Önce integral testinin uygulanabilirlik şartlarını yoklayalım. Her $n \geq 1$ için $1+n^2 > 0 \Rightarrow n\sqrt{1+n^2} > 0 \Rightarrow a_n = \frac{1}{n\sqrt{1+n^2}} > 0$ geçerlidir yani seri pozitif terimlidir. $f(n) = a_n$, $n \geq 1$

sağlanacak şekilde $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \geq 0$, $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu monoton azalan mıdır?

$y = x$ ve $y = \sqrt{1+x^2}$ fonksiyonları $[1, +\infty)$ aralığında pozitif değerli, artan fonksiyonlar olduğu için $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ bu aralıkta azalan fonksiyondur. Böylece integral testinin şartları

sağlanıyor, teste göre verilmiş seri $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A f(x) dx$ singüler integrali ile aynı yakınsaklık karakterine sahiptir. O halde

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \left[t = \frac{1}{x}, \frac{1}{A} \leq t \leq 1, dx = -\frac{dt}{t^2} \right] =$$

$$- \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^{1/A} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{1/A}^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left| t + \sqrt{1+t^2} \right| \Big|_{1/A}^1 =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+\sqrt{1+1}}{\frac{1}{A} + \sqrt{1+\frac{1}{A^2}}} = \ln \frac{1+\sqrt{2}}{0+\sqrt{1+0}} = \ln(1+\sqrt{2}) \quad \text{sonlu olduğundan integral yakınsaktır dolayısıyla}$$

verilmiş seri de yakınsaktır.

2a. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ serisinin yakınsaklığını *Logaritmik* test yardımıyla inceleyiniz.

Çözüm: Her $n \geq 2$ için $\ln n > 0$, $(\ln n)^n > 0$ ve $n^{\ln n} > 0$ olduğundan $a_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} > 0$ yani seri pozitif terimlidir. Logaritmik testin limit formuna göre

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln \ln n - \ln n \ln n}{\ln n} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\ln \ln n - \frac{\ln^2 n}{n} \right) = \right.$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\ln \ln n - \frac{\ln^2 n}{n} \right) = +\infty (+\infty - 0) = +\infty \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty \text{ olduğunu dikkate alarak L'Hospital}$$

kuralını uygulayalım

$$= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n \ln \ln n - \ln^2 n)'}{(\ln n)'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n + n \frac{1}{n \ln n} - 2 \frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\ln \ln n + \frac{1}{\ln n} - 2 \frac{\ln n}{n} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \ln n + \frac{1}{\ln n} - 2 \frac{\ln n}{n} \right) = +\infty (+\infty + 0 - 0) = +\infty \text{ elde edilir. } L = +\infty > 1 \text{ olduğundan}$$

seri yakınsaktır.

2b. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(1 + \sqrt{\ln n})^{\ln n}}$ serisinin yakınsaklığını *Logaritmik* teste göre inceleyiniz.

Çözüm: İlk önce testin uygulanabilirlik şartlarını yoklayalım. $\forall n \geq 2$ için $(1 + \sqrt{\ln n}) > 0 \Rightarrow (1 + \sqrt{\ln n})^{\ln n} > 0 \Rightarrow a_n = \frac{1}{(1 + \sqrt{\ln n})^{\ln n}} > 0$ geçerlidir, yani seri pozitif terimlidir. O halde *Logaritmik* test uygulanabilir. Teste göre, verilmiş seri için

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{\ln n})^{\ln n}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n \cdot \ln(1 + \sqrt{\ln n})}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + \sqrt{\ln n}) = \ln(+\infty) = +\infty,$$

$L = +\infty > 1$ olduğundan seri yakınsaktır.

2c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + \ln^2 2n)}$ serisinin yakınsaklığını *Cauchy* benzerlik testi yardımıyla inceleyiniz.

Çözüm: İlk önce testin uygulanabilirlik şartlarını yoklayalım. $\forall n \geq 1$ için $n(1 + \ln^2 2n) > 0 \Rightarrow a_n = \frac{1}{n(1 + \ln^2 2n)} > 0$ geçerlidir, yani seri pozitif terimlidir. $y = \ln x$ fonksiyonu artan olduğundan $n \geq 1 \Rightarrow \ln 2n < \ln 2(n+1) \Rightarrow 1 + \ln^2 2n < 1 + \ln^2 2(n+1) \Rightarrow$

$$0 < n(1 + \ln^2 2n) < n(1 + \ln^2 2(n+1)) \Rightarrow a_n = \frac{1}{n(1 + \ln^2 2n)} > \frac{1}{(n+1)(1 + \ln^2 2(n+1))} = a_{n+1} \Rightarrow$$

$a_n > a_{n+1}$ eşitsizliği sağlanır dolayısıyla $\{a_n\} \searrow$ yani dizi azalandır. O halde *Cauchy* benzerlik testi uygulanabilir. Teste göre verilmiş seri

$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^k (1 + \ln^2(2 \cdot 2^k))} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + (k+1)^2 \ln^2 2)}$ serisi ile aynı yakınsaklık karakterine sahiptir. Sonuncu seriye $p=2>1$ (örneğe bağlı olarak p in farklı değeri alınabilir yahut farklı bir teste başvurulabilir) olmak üzere *Cauchy* p -testini uygularsak

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} k^2 \frac{1}{(1 + (k+1)^2 \ln^2 2)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{k^2} + \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 \ln^2 2} = \frac{1}{0 + (1+0)^2 \ln^2 2} = \frac{1}{\ln^2 2}, \quad 0 \leq A < +\infty$$

olduğundan dolayı $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ serisi yakınsaktır. O halde verilmiş seri de yakınsaktır.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ serisinin mutlak ve şartlı yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: İlk önce serinin mutlak yakınsaklığını yani $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ serisinin yakınsaklığını inceleyelim. $\forall n \geq 2 \Rightarrow \frac{\ln(n+1)}{n+1} > \frac{\ln 3}{n+1} > \frac{\ln e}{n+1} = \frac{1}{n+1} = b_n > 0$ olduğunu dikkate alırsak karşılaştırma testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} + \dots$ harmonik serisi ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serisi de ıraksaktır. Dolayısıyla verilmiş seri **mutlak yakınsak değildir**.

Acaba seri **şartlı yakınsak mı?** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ alterne serisidir. Leibniz testinden faydalanalım. $\forall n \geq 1 \Rightarrow c_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} > 0$ geçerlidir. Öte yanda n 'i sürekli değişken sayarak türevini alırsak (**monotonluk bazı diziler için elemanter eşitsizliklere göre de ispatlana bilir**)

$$(c_n)' = \left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} \right)' = \frac{\frac{1}{n+1} (n+1) - \ln(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{1 - \ln(n+1)}{(n+1)^2} < \frac{\ln e - \ln 3}{(n+1)^2} < 0, \quad \forall n \geq 2$$

olduğunu

görürüz. Bu $\{c_n\} = \left\{ \frac{\ln(n+1)}{n+1} \right\}$ dizisinin azalan olması demektir. Ayrıca *L'Hospital* kuralına göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln(n+1))'}{(n+1)'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

olduğundan, *Leibniz*

testinin şartları sağlanıyor. Teste göre $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ serisi yakınsaktır.

Cevap: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ serisi şartlı yakınsaktır.

4. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n \cdot (\ln \ln n)^2}$ serisinin mutlak ve şartlı yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: İlk önce serinin mutlak yakınsaklığını, yani

$$\sum_{n=3}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=3}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n \ln n \cdot (\ln \ln n)^2} \right| = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot (\ln \ln n)^2} \text{ serisinin yakınsaklığını inceleyelim. Bu seriye}$$

integral testinin uygulanabilirliğini yoklayalım. $f(x) = \frac{1}{x \ln x \cdot (\ln \ln x)^2} > 0, x \geq 3$ olmak üzere

$f(x)$ fonksiyonu $[3, +\infty)$ aralığında monoton azalan fonksiyon mudur? Bu aralıkta pozitif değerli $y = x, y = \ln x, y = (\ln \ln x)^2$ fonksiyonların her biri, dolayısıyla $x \ln x \cdot (\ln \ln x)^2$ çarpımı

artandır. O halde $f(x) = \frac{1}{x \ln x \cdot (\ln \ln x)^2}$ fonksiyonu aralıkta azalandır. Bu durumda *integral*

testine göre $\int_3^{+\infty} f(x) dx = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x \cdot (\ln \ln x)^2}$ integrali ve verilmiş seri aynı yakınsaklık karakterine

sahiptirler. İntegrali hesaplayarak

$$\begin{aligned} \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x \cdot (\ln \ln x)^2} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_3^A \frac{dx}{x \ln x \cdot (\ln \ln x)^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_3^A \frac{d \ln \ln x}{(\ln \ln x)^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left. \frac{-1}{\ln \ln x} \right|_3^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln \ln 3} - \frac{1}{\ln \ln A} \right) \\ &= \frac{1}{\ln \ln 3} - \frac{1}{\ln \ln(+\infty)} = \frac{1}{\ln \ln 3} - \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{\ln \ln 3} - 0 = \frac{1}{\ln \ln 3} < +\infty \text{ buluruz. İntegral sonlu olduğundan} \end{aligned}$$

yakınsaktır o halde $\sum_{n=3}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot (\ln \ln n)^2}$ serisi de yakınsaktır, dolayısıyla **verilmiş seri mutlak yakınsaktır.**

5. Fonksiyonel dizinin gösterilen aralıkta noktasal ve düzgün yakınsaklığını inceleyiniz.

a) $f_n(x) = e^{-nx^2}, E = [1, +\infty)$

b) $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+n^2x^4}, E = [0,1]$

Çözüm: 5a) $\forall x \in [1, +\infty) \Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{nx^2}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} e^{nx^2}} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

olduğunda $\{f_n(x)\}$ fonksiyonel dizisi $f(x) = 0$ fonksiyonuna $E = [1, +\infty)$ kümesinde noktasal yakınsaktır. Yani $f_n(x) \rightarrow f(x) = 0, x \in E$ geçerlidir.

$f_n(x) \rightarrow 0$ yakınsaması E de düzgün mü? Bunu teyit etmek için düzgün yakınsaklık kriterinden faydalanalım.

$$c_n = \sup \{ |f_n(x) - f(x)| : x \in E \} = \sup \left\{ \left| e^{-nx^2} - 0 \right| : x \in E \right\} = \sup \left\{ e^{-nx^2} : x \geq 1 \right\} = e^{-n}, n \in \mathbb{N}$$

geçerlidir, çünkü $y = e^{-nx^2}$ fonksiyonu $[1, +\infty)$ aralığında pozitif değerli ve monoton azalandır, en büyük değer küçük uç noktasında alır (**monoton olmayan $\varphi(x) = |f_n(x) - f(x)|$ için bu özellik uygulanamaz, supremum değeri başka kuralla bulunmalıdır!**). Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = e^{-\infty} = 0$ olduğundan $\{f_n(x)\}$ fonksiyonel dizisi $f(x) = 0$ fonksiyonuna $E = [1, +\infty)$ kümesinde **düzgün yakınsaktır.**

Çözüm: 5b) $\forall x, 0 < x \leq 1 \Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^2}{1+n^2x^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{n}}{\frac{1}{n^2} + x^4} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} x^4} =$
 $= \frac{0}{0+x^4} = \frac{0}{x^4} = 0$ ve $x=0 \Rightarrow f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 0^2}{1+n^2 \cdot 0^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ olduğundan $\{f_n(x)\}$ fonksiyonel dizisi $E=[0,1]$ kümesinde $f(x)=0$ fonksiyonuna noktasal yakınsaktır, yani $f_n(x) \rightarrow f(x)=0, x \in E$ veya $f_n(x) \xrightarrow{E} f(x)=0$ geçerlidir.
 $f_n(x) \rightarrow 0$ yakınsaklığı E de düzgün mü? Bunu belirlemek için düzgün yakınsaklık kriterinden faydalanalım.

$$c_n = \sup \left\{ |f_n(x) - f(x)| : x \in E \right\} = \sup \left\{ \left| \frac{nx^2}{1+n^2x^4} - 0 \right| : x \in [0,1] \right\} = \sup \left\{ \frac{nx^2}{1+n^2x^4} : x \in [0,1] \right\}$$

$$= \sup \{ f_n(x) : x \in [0,1] \} \text{ olsun. } f_n(x) \text{ fonksiyonunun aralıktaki en büyük değerini bulmak için}$$

türevi kullanalım. $f'_n(x) = \left(\frac{nx^2}{1+n^2x^4} \right)' = \frac{2nx \cdot (1+n^2x^4) - nx^2 \cdot 4x^3n^2}{(1+n^2x^4)^2} = \frac{2nx - 2n^3x^5}{(1+n^2x^4)^2} = 0$

denklemden fonksiyonun kritik noktalarını bulalım. Buna göre $2nx - 2n^3x^5 = 0 \Rightarrow 2xn(1 - n^2x^4) = 0 \Rightarrow x = 0, x^4 = \frac{1}{n^2}$ veya $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}, x_3 = -\frac{1}{\sqrt{n}},$

$x_1, x_2 \in [0,1], x_3 \notin [0,1]$ bulunur. Bu durumda $f_n(0) = 0, f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1+n^2 \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$

$f_n(1) = \frac{n}{1+n^2} \leq \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}$ olmak (burada $2n \leq 1+n^2, n \in \mathbb{N}$ olduğundan faydalandık) üzere

$c_n = \max \left\{ f_n(0), f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), f_n(1) \right\} = \max \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{n}{1+n^2} \right\} = \frac{1}{2}$ buluruz. Sonuçta

$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$ olduğundan $\left\{ \frac{nx^2}{1+n^2x^4} \right\}$ **fonksiyonel dizisi $E=[0,1]$ kümesinde $f(x)=0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.**

2. yöntem: Düzgün yakınsaklığın geçerli olmadığını ispatını diğer yolu

$\forall n \geq n_0, \exists \alpha > 0, \exists x_n \in E$ için $c_n = \sup \left\{ |f_n(x) - f(x)| : x \in E \right\} \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \alpha > 0$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}, x_n \in E$ sayılarının varlığını göstermektir. Bunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$c_n = \sup \left\{ |f_n(x) - 0| : x \in E \right\} = \sup \left\{ |f_n(x)| : x \in [0,1] \right\} \geq |f_n(x_n)| = \frac{nx_n^2}{1+n^2x_n^4} \geq \alpha \text{ eşitsizliği}$$

$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \in [0,1], \alpha = \frac{1}{2}, \forall n \geq 1$ için geçerlidir. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ limiti var ise $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \geq \frac{1}{2}$

olmalıdır bu ise $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ olmasını imkânsız yapar. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \neq 0$, yani $\left\{ \frac{nx^2}{1+n^2x^4} \right\}$

fonksiyonel dizisi $E=[0,1]$ kümesinde $f(x)=0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

6. Fonksiyonel serinin gösterilen aralıkta (kümede) düzgün yakınsaklığını *Weierstrass* testi yardımıyla gösteriniz: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^2}}, -\infty < x < +\infty$

Çözüm: Fonksiyonel serinin $u_n(x) = \frac{\sin^2 2nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^2}}$ terimleri $\mathbb{R}$ kümesinde tanımlı olup

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1 \quad \text{için} \quad |u_n(x)| = \left| \frac{\sin^2 2nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^2}} \right| = \frac{|\sin^2 2nx|}{\sqrt[3]{n^4 + x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^4 + x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} = \frac{1}{n^{4/3}} = \alpha_n \quad \text{eşitsizliği}$$

geçerlidir (**farklı örnekler için benzer eşitsizliğin ispatı başka yöntemleri gerektirebilir!**). Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ mojarant seri olmak üzere *Weierstrass* testini uygularsak $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$

genelleştirilmiş harmonik serisi $p = \frac{4}{3} > 1$ olmak üzere yakınsak olduğundan ***Weierstrass* testi**

gereği $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^2}}$ **serisi** $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ **kümesinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.**

7. Kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını ve aralığını bulunuz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n (x+2)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)2^n}$

Çözüm: 7a) $a_n = \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n$, $x_0 = -2$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ serisinin yakınsaklık aralığını bulmalıyız. *Cauchy-H'adamard* formülünü uygulayarak

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n-1}{3n+2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{2}{3}$$

buluruz. Bu durumda $R = \frac{1}{\rho} = \frac{3}{2}$ olur. Böylece $\left(x_0 - \frac{3}{2}, x_0 + \frac{3}{2} \right) = \left(-2 - \frac{3}{2}, -2 + \frac{3}{2} \right)$ aralığında yani

$\left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2} \right)$ aralığında kuvvet serisi mutlak yakınsak, $\left[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2} \right]$ aralığı dışında ıraksaktır. **Acaba**

$x = -\frac{7}{2}$ **ve** $x = -\frac{1}{2}$ **uç noktalarında seri yakınsak mı?** İnceleyelim.

$x = -\frac{7}{2}$ iken kuvvet serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n \left(-\frac{7}{2} + 2 \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n \left(-\frac{3}{2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n \left(\frac{3}{2} \right)^n \quad \text{sayısal serisine}$$

dönüşüyor. Bu seri için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n \left(\frac{3}{2} \right)^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n \left(\frac{3}{2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{2n} \right)^n 2^n}{\left(1 + \frac{2}{3n} \right)^n 3^n} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{2n} \right)^n}{\left(1 + \frac{2}{3n} \right)^n} =$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n} = \frac{e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2n} \cdot n\right)}}{e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3n} \cdot n\right)}} = \frac{e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)}}{e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3}}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{2}{3}}} = e^{-\frac{7}{6}} \neq 0 \text{ olduğundan seri yakınsaklığının gerekli}$$

şartı sağlanmıyor, dolayısıyla seri ıraksaktır. Böylece $x = -\frac{7}{2}$ uç noktasında kuvvet serisi

ıraksaktır, bu nokta yakınsaklık aralığına ait değildir. Benzer şekilde $x = -\frac{1}{2}$ iken kuvvet serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n \left(-\frac{1}{2} + 2\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n \text{ sayısal serisine dönüşüyor. Bu}$$

$$\text{seri için de aynen } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n}{\left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{2}{3}}} = e^{-\frac{7}{6}} \neq 0 \text{ olması}$$

nedeniyle kuvvet serisi $x = -\frac{1}{2}$ uç noktasında ıraksaktır, bu nokta da yakınsaklık aralığına ait

değildir. Sonuçta **kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı** $R = \frac{3}{2}$ **ve yakınsaklık aralığı**

$$\left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ dir.}$$

Çözüm: 7b) $a_n = \frac{1}{(n+1)2^n}$, $x_0 = 1$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ serisinin yakınsaklık aralığını bulmalıyız. *D’Alambert* formülünü uygulayarak

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)2^n}}{\frac{1}{(n+2)2^{n+1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+1)2^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2(n+2)}{(n+1)} \right| = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = 2$$

buluruz. Böylece $(x_0 - 2, x_0 + 2) = (1 - 2, 1 + 2)$ aralığında yani $(-1, 3)$ aralığında mutlak yakınsak, $x < -1$ veya $x > 3$ iken kuvvet serisi ıraksaktır. **Acaba $x = -1$ ve $x = 3$ uç noktalarında seri yakınsak mı? İnceleyelim.**

$$x = -1 \text{ iken kuvvet serisi } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} \text{ alterne serisine dönüşüyor. Bu seri için}$$

$$c_n = \frac{1}{n+1} \text{ olmak üzere } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ ve } c_n = \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} = c_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+ \text{ yani } \{c_n\}$$

azalandır, *Leibniz* testi uygulanabilir. Test gereği bu seri yakınsaktır. Fakat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} \text{ harmonik serisi ıraksaktır Böylece } x = -1 \text{ uç noktasında kuvvet serisi}$$

şartlı yakınsaktır, bu nokta yakınsaklık aralığına aittir. Benzer şekilde $x = 3$ iken kuvvet serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} \text{ harmonik serisine dönüşüyor. Bu seri ıraksaktır, yani } x = 3 \text{ uç}$$

noktasında kuvvet serisi ıraksaktır ve bu nokta yakınsaklık aralığına ait değildir. Sonuçta **kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı** $R = 2$ **ve yakınsaklık aralığı** $[-1, 3)$ **tir.**

8. Fonksiyonun Maclaurin serisine açılımını yazınız ve yakınsaklık aralığını gösteriniz:

a) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-2x}}$ b) $f(x) = xe^{2x^2+1}$

Çözüm: 8a) Fonksiyon $1-2x > 0$ veya $x < \frac{1}{2}$ şartını sağlayan noktalarda tanımlıdır.

$f(x) = x^3(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$ fonksiyonun *Maclaurin* serisi $y = (1-2x)^{-\frac{1}{2}}$ fonksiyonunun seri açılımını x^3 'e çarparak elde edilebilir. $y = (1-2x)^{-\frac{1}{2}}$ fonksiyonu $y = (1+t)^\alpha$, $|t| < 1$ fonksiyonundan $t = -2x$ ve $\alpha = -\frac{1}{2}$ durumunda elde edilir. Buna göre

$y = (1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + \dots$, $|t| < 1$ seri açılımından faydalanabiliriz. Bu açılımdan $|t| = |-2x| < 1$, $\alpha = -\frac{1}{2}$ için

$$y = (1-2x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(-2x) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-2x)^2 + \dots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-2x)^n + \dots$$

veya

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} = 1 + x + \frac{(-1)^2 \cdot 1 \cdot 3}{2! \cdot 2^2}(-2)^2 x^2 + \dots + \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n! \cdot 2^n}(-1)^n x^n + \dots \text{ veya}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n!}x^n + \dots, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \text{ elde edilir. Her tarafı } x^3 \text{ 'e}$$

çarparak $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-2x}} = x^3 + x^4 + \frac{3}{2}x^5 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n!}x^{n+3} + \dots = x^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+3},$

$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ olduğunu elde ederiz. Bu açılım $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ aralığında mutlak yakınsaktır. **Acaba**

aralığın uç noktalarında açılım geçerli mi? İnceleyelim. $x = \frac{1}{2}$ noktası tanım kümesine ait

değildir. $x = -\frac{1}{2}$ iken kuvvet serisi $-\frac{1}{8} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{n!2^{n+3}}$ alterne serisine dönüşüyor. Bu

serinin mutlak yakınsaklığını incelemek için $c_n = \frac{(2n-1)!!}{n!2^{n+3}}$ olmak üzere

$$\frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n c_n| = \frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{n!2^{n+3}} \right| = \frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!2^{n+3}}$$
 serisine Raabe testini uygulayalım.

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\frac{(2n-1)!!}{n!2^{n+3}}}{\frac{(2n+1)!!}{(n+1)!2^{n+4}}} = \frac{(2n-1)!!(n+1)!2^{n+4}}{(2n+1)!!n!2^{n+3}} = \frac{2(n+1)}{(2n+1)} = 1 + \frac{1}{2n+1} > 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+ \text{ ve}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{c_n}{c_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 + \frac{1}{2n+1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \text{ olduğundan } \frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n c_n| \text{ serisi}$$

ıraksaktır, yani kuvvet serisi $x = -\frac{1}{2}$ uç noktasında mutlak yakınsak değildir.

$\frac{c_n}{c_{n+1}} > 1 \Rightarrow c_n > c_{n+1}$ olduğundan $\{c_n\}$ azalan dizidir. Öte yandan

$$0 < c_n^2 = \left(\frac{(2n-1)!!}{n!2^{n+3}} \right)^2 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n-1)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2n)^2 \cdot 2^6} < \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-3) \cdot (2n-1)}{(2n-2)^2} \cdot \frac{2n-1}{(2n)^2} < \frac{2n-1}{(2n)^2}$$

veya $0 < c_n < \frac{\sqrt{2n-1}}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}_+$ geçerli olduğunu görürüz (burada $\frac{(2k-1) \cdot (2k+1)}{(2k)^2} < 1, k \in \mathbb{N}_+$

olmasından faydalındık). Bu durumda eşitsizliğin her iki tarafında limite geçerek *Sandviç* teoremine göre $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n-1}}{2n} = 0$ dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ geçerli olur. Bu durumda

Leibniz testi gereği $-\frac{1}{8} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{n!2^{n+3}}$ serisi şartlı yakınsaktır. Böylece $x = -\frac{1}{2}$ uç noktasında kuvvet serisi şartlı yakınsaktır, bu nokta yakınsaklık aralığına aittir.

$x = \frac{1}{2}$ iken kuvvet serisi $\frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!2^{n+3}}$ sayısal serisine dönüşüyor. Bu serinin *Raabe* testine göre ıraksak olduğunu gösterdik. Böylece $x = \frac{1}{2}$ uç noktası yakınsaklık aralığına ait değildir.

Sonuçta $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-2x}} = x^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^{n+3}, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ açılımı geçerlidir.

Çözüm: 8b) $f(x) = xe^{2x^2+1}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ 'de tanımlıdır. Fonksiyonun Maclaurin serisi $y = e^{2x^2+1}$ fonksiyonunun seri açılımını x 'e çarpmakla elde edilebilir. $y = e^{2x^2+1}$ fonksiyonu $y = e \cdot e^t, \forall t \in \mathbb{R}$ fonksiyonundan $t = 2x^2$ için elde edilir. Buna göre $y = e \cdot e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e \cdot t^n}{n!}, \forall t \in \mathbb{R}$

seri açılımından faydalanabiliriz. Bu açılmıdan $y = e^{2x^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e \cdot (2x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e \cdot 2^n x^{2n}}{n!}$ veya

$$f(x) = xe^{2x^2+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e \cdot 2^n x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e \cdot 2^n x^{2n+1}}{n!}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ elde edilir.}$$

Sonuçta $f(x) = xe^{2x^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e \cdot 2^n x^{2n+1}}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$ **Maclaurin** açılımı geçerlidir.

9. Terim terime differansiyelleme hakkında teoremi kullanarak $\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \dots$ serisinin toplamını bulunuz.

Çözüm: Önce $\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \dots$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını bulalım. Bunun için

serinin yakınsaklık yarıçapını bulalım. $a_{4n-1} = \frac{1}{4n-1}, a_k = 0, k \neq 4n-1, n \in \mathbb{N}_+$ olduğundan yani sonsuz sayıda katsayılar sıfır olduğundan *Cauchy-H'adamard* ve *D'Alambert* formülleri doğrudan kullanılamıyor. Bu nedenle seriyi

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \dots = x^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{x^4}{7} + \dots + \frac{x^{4(n-1)}}{4n-1} + \dots \right) \text{ şeklinde yazıp } t = x^4 \text{ değiştirerek}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n = \frac{1}{3} + \frac{t}{7} + \frac{t^2}{11} + \dots + \frac{t^{n-1}}{4n-1} + \dots \text{ serisinin yakınsaklık aralığının bulunmasına indirgeye}$$

biliriz. Bu seri için $b_{n-1} = \frac{1}{4n-1}$, $b_n = \frac{1}{4n+3}$ olduğuna göre

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n-1}}{b_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{4n-1}}{\frac{1}{4n+3}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4n+3}{4n-1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+3}{4n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{3}{n}}{4 - \frac{1}{n}} = 1 \quad \text{bulunur.} \quad \text{Bu durumda}$$

$|t| = x^4 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$ iken kuvvet serisi mutlak yakınsaktır, $|x| > 1$ iken seri ıraksaktır. $x = \mp 1$ uç noktalarında seri $\mp \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{4n-1} + \dots \right)$ şeklini alıyor ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisiyle karşılaştırılırsa

test gereği, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4n-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4} \neq 0$ olduğundan ıraksaktır. Böylece kuvvet serisinin yakınsaklık

aralığı $(-1,1)$ dır ve $\forall x \in (-1,1)$ için $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \dots$ toplamı tanımlıdır. $f(x)$ 'i bulmak için kuvvet serisini terim terime diferansiyelleme hakkındaki teoremi kullanalım. Buna

göre $f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} \right)' + \left(\frac{x^7}{7} \right)' + \dots + \left(\frac{x^{4n-1}}{4n-1} \right)' + \dots$, $\forall x \in (-1,1)$ geçerlidir. Buradan

$$f'(x) = x^2 + x^6 + x^{10} + \dots + x^{4n-2} + \dots = \frac{x^2}{1-x^4}, \quad \forall x \in (-1,1) \quad \text{elde ederiz. Her iki tarafını}$$

integrallersek $\int_0^t f'(x) dx = \int_0^t \frac{x^2}{1-x^4} dx$, veya

$$f(t) - f(0) = \int_0^t \frac{x^2}{1-x^4} dx = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{dx}{1-x^2} - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \left(\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{2} \arctan x \right) \Big|_0^t = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \frac{1}{2} \arctan t - 0 = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \frac{1}{2} \arctan t \quad \forall t \in (-1,1) \quad \text{elde ederiz. } f(0) = 0 \quad \text{olduğundan sonu} \mathbf{\text{çta}}$$

$$f(x) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{2} \arctan x, \quad \forall x \in (-1,1) \quad \mathbf{\text{bulunur.}}$$

9. Terim terime integralleme hakkında teoremi kullanarak $1-3x^2+5x^4-\dots+(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}+\dots$ serisinin toplamını bulunuz.

Çözüm: Önce $1-3x^2+5x^4-\dots+(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}+\dots$ kuvvet serisini yakınsaklık aralığını bulalım. Bunun için serinin yakınsaklık yarıçapını bulalım. $a_{2n-2} = (-1)^{n-1}(2n-1)$, $a_k = 0$, $k \neq 2n-2, n \in \mathbb{N}_+$ olduğundan yani sonsuz sayıda katsayılar sıfır olduğundan *Cauchy-H'adamard* ve *D'Alambert* formüllerini doğrudan kullanmak kolay olmuyor. Bu nedenle seriyi $1-3x^2+5x^4-\dots+(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}+\dots = 1-3x^2+5(x^2)^2-\dots+(-1)^{n-1}(2n-1)(x^2)^{n-1}+\dots$ şeklinde yazıp $t = x^2$ değiştirerek yakınsaklık aralığının bulunmasını $1-3t+5t^2-\dots+(-1)^{n-1}(2n-1)t^{n-1}+\dots$ serisinin incelenmesine indirgeye biliriz. Bu seri için $c_{n-1} = (-1)^{n-1}(2n-1)$, $a_n = (-1)^n(2n+1)$ olduğuna göre

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n-1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{(-1)^n(2n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n-1}{2n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = 1 \quad \text{bulunur.}$$

Bu durumda $|t| = x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$ iken, yani $(-1, 1)$ aralığında kuvvet serisi mutlak yakınsaktır, $|x| > 1$ iken ise seri ıraksaktır. $x = \mp 1$ uç noktalarında seri

$1 - 3(\pm 1)^2 + 5(\pm 1)^4 - \dots + (-1)^{n-1}(2n-1)(\pm 1)^{2n-2} + \dots = 1 - 3 + 5 - \dots + (-1)^{n-1}(2n-1) + \dots$ şeklini alıyor. Seri yakınsaklığının gerekli şartına göre

$\lim_{n \rightarrow \infty} |c_{n-1}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^{n-1}(2n-1)| = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1) = +\infty \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty \neq 0$ olduğundan seri

ıraksaktır. Böylece kuvvet serisi uç noktalarda ıraksaktır, dolayısıyla yakınsaklık aralığı $(-1, 1)$ dır ve $\forall x \in (-1, 1)$ için $f(x) = 1 - 3x^2 + 5x^4 - \dots + (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} + \dots$ toplamı tanımlıdır. $f(x)$ 'i bulmak için kuvvet serisinin terim terime integralenmesi hakkındaki teoremini kullanalım. Buna göre $\forall t \in (-1, 1)$ için

$$\int_0^t f(x) dx = \int_0^t 1 dx - \int_0^t 3x^2 dx + \int_0^t 5x^4 dx - \dots + (-1)^{n-1}(2n-1) \int_0^t x^{2n-2} dx + \dots = x \Big|_0^t - x^3 \Big|_0^t + x^5 \Big|_0^t - \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-1} \Big|_0^t + \dots = t - t^3 + t^5 - \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-1} + \dots = \frac{t}{1+t^2} \quad \text{elde edilir. Buradan} \int_0^t f(x) dx = \frac{t}{1+t^2},$$

$$\forall t \in (-1, 1) \quad \text{veya her iki tarafın türevini alırsak} \quad f(t) = \left(\frac{t}{1+t^2} \right)' = \frac{1+t^2 - 2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$$

$\forall t \in (-1, 1)$ elde ederiz. **Sonuçta** $f(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $\forall x \in (-1, 1)$ **bulunur.**

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$ serisinin yakınsaklık ve mutlak yakınsaklık bölgesini bulunuz.

Çözüm: $u_n(x) = \frac{\ln^n x}{n}$, $n \in \mathbb{N}_+$ genel terimli $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ fonksiyon serisinin yakınsak ve mutlak yakınsak olduğu $x \in \mathbb{R}$ noktalarının kümesini bulmalıyız. Önce mutlak yakınsaklığı yani

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\ln^n x}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\ln x|^n}{n}$$
 serisinin yakınsaklık kümesini bulalım. Açıktır ki serinin terimleri

$x \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ noktalarında tanımlıdır. $|\ln x| = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ için serinin mutlak yakınsaklığı açıktır. Buna göre $|\ln x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ sayarak *D'Alembert* testini uygulayarsak

$$D^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|\ln x|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|\ln x|^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n |\ln x|^{n+1}}{(n+1) |\ln x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n |\ln x|}{n+1} = |\ln x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = |\ln x| \cdot 1 = |\ln x|$$

bulunur. Bu durumda test gereği $|\ln x| < 1 \Leftrightarrow -1 < \ln x < 1$ veya $\frac{1}{e} < x < e$ iken fonksiyonel seri

mutlak yakınsak, $x > e$ veya $0 < x < \frac{1}{e}$ iken ise ıraksaktır. Acaba $x = e$ ve $x = \frac{1}{e}$ noktalarında fonksiyonel serinin yakınsaklık karakteri nedir?

$x=e$ iken seri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n e}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisine dönüşüyor ve ıraksaktır. $x=\frac{1}{e}$ iken seri

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(1/e)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ alterne serisine dönüşüyor ve *Leibniz* testi gereği şartlı yakınsak olduğunu

biliyoruz. **Sonuçta fonksiyonel seri $\left[\frac{1}{e}, e\right)$ aralığında yakınsaktır, $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ aralığında ise mutlak yakınsaktır.**

11. $y = \ln(x^2 - 4x + 5)$ fonksiyonu için $x_0 = 2$ noktasının komşuluğunda Taylor serisini bulunuz.

Çözüm: $y = \ln(x^2 - 4x + 5) = \ln[1 + (x-2)^2]$ olduğunu dikkate alarak $t = (x-2)^2$ olmak üzere $y = \ln(1+t)$ fonksiyonunun *Maclaurin* açılımında faydalanalım. Buna göre

$y = \ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$, $-1 < t \leq 1$ geçerli olduğu için $-1 < (x-2)^2 \leq 1$ veya

$(x-2)^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x-2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x-2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$ iken $\ln(x^2 - 4x + 5) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{n}$

Taylor açılımı geçerlidir.

Sonuçta $\ln(x^2 - 4x + 5) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{n}$, $\forall x \in [1, 3]$ açılımı geçerlidir.