

Analiz-II Vize Sınavı konularıyla ilgili çözüm örnekleri.

1. Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız: a) $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ b) $\int_1^3 \arctan \sqrt{x} dx$

Çözüm:

a)

$$\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t, \quad x = \frac{1}{t} \text{ de\u0131şken de\u0131ştirmesi yapalım} \\ \text{buna göre } dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} = -\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t^2 \cdot \frac{dt}{t^2}}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ bulunur.}$$

b) $\int_1^3 \arctan \sqrt{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \arctan \sqrt{x}, \quad dv = dx \text{ olmak üzere kısmi integrasyon yöntemini} \\ \text{uygulayalım, buna göre } du = \frac{\frac{dx}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2} = \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}, \quad v = x \end{array} \right\} =$

$$= x \arctan \sqrt{x} \Big|_1^3 - \int_1^3 x \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)} = 3 \arctan \sqrt{3} - \arctan \sqrt{1} - \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{\sqrt{x} dx}{1+x} = \left\{ \begin{array}{l} x = t^2, \quad t = \sqrt{x}, \quad dx = 2t dt \\ x = 1 \rightarrow t = 1, \quad x = 3 \rightarrow t = \sqrt{3} \end{array} \right\} =$$

$$= 3 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t^2 dt}{1+t^2} = \frac{3\pi}{4} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2 + 1 - 1}{1+t^2} dt = \frac{3\pi}{4} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+t^2}{1+t^2} dt + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{3\pi}{4} - \int_1^{\sqrt{3}} dt + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{3\pi}{4} - (\sqrt{3} - 1) + \arctan t \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{3\pi}{4} + 1 - \sqrt{3} + \arctan \sqrt{3} - \arctan 1 = \frac{3\pi}{4} + 1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 1 - \sqrt{3}$$

bulunur.

2. Limiti belirli integral yardımıyla bulunuz: $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi \left[\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{n^2} + \frac{2 \cos \frac{2\pi}{n}}{n^2} + \dots + \frac{n \cos \frac{n\pi}{n}}{n^2} \right]$

Çözüm: $n \in \mathbb{N}^+$, $h = \frac{\pi - 0}{n}$, $c_k = x_k = 0 + kh = \frac{\pi k}{n}$, $\Delta x_k = h$, $k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $[0, \pi]$

aralığında sürekli olan $f(x) = x \cos x$ fonksiyonunun alınmış parçalanmaya karşılık gelen Riemann integral toplamının

$$R(P, f) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \frac{\pi}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n} = \frac{\pi^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k \cos \frac{k\pi}{n} \text{ ve}$$

$\lambda = \frac{\pi}{n} = \|P\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$ olduğu dikkate alınırsa integralin tanımına göre

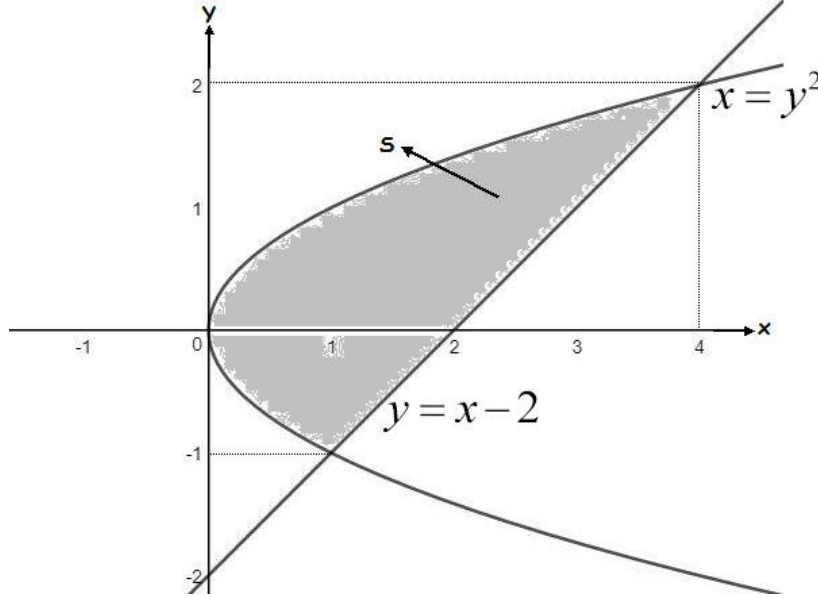
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi \left[\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{n^2} + \frac{2 \cos \frac{2\pi}{n}}{n^2} + \dots + \frac{n \cos \frac{n\pi}{n}}{n^2} \right] = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} R(P, f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x d \sin x = \frac{1}{\pi} [x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx] =$$

$$\frac{1}{\pi} [\pi \sin \pi - 0 \sin 0 + \cos x \Big|_0^{\pi}] = \frac{1}{\pi} [\cos \pi - \cos 0] = \frac{1}{\pi} [-1 - 1] = -\frac{2}{\pi} \text{ bulunur.}$$

3. Belirli integral yardımıyla,

a) $x = y^2$, $y = x - 2$ eğrileri ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm: Parabol ile doğrunun kesişim noktalarının koordinatları $y^2 - y - 2 = 0$ ve $y = x - 2$ denklemlerinden $y_1 = -1, y_2 = 2$ ve $x_1 = 1, x_2 = 4$ olarak bulunur. Eğrileri çizerek bölgeyi koordinat düzleminde gösterelim.



Şekle ve bilinen formüle göre bölgenin alanı

$$S = \int_{-1}^2 [y + 2 - y^2] dy = \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = \frac{15}{2} - 3 = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

b) $y = 4 - x^2$, $y = 2 - x$ eğrileri ile sınırlanan bölgenin OX ekseninde dördürölmesiyle oluşan cismin hacmini disk yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: Eğrilerin kesişim noktalarının koordinatları $x^2 - x - 2 = 0$ ve $y = 2 - x$ denklemlerinden $x_1 = -1, x_2 = 2$ ve $y_1 = 3, y_2 = 0$ olarak bulunur. Eğrileri ve onların sınırladığı bölgenin dördürölmesi ile meydana gelen döneel cismi koordinat sisteminde çizelim.

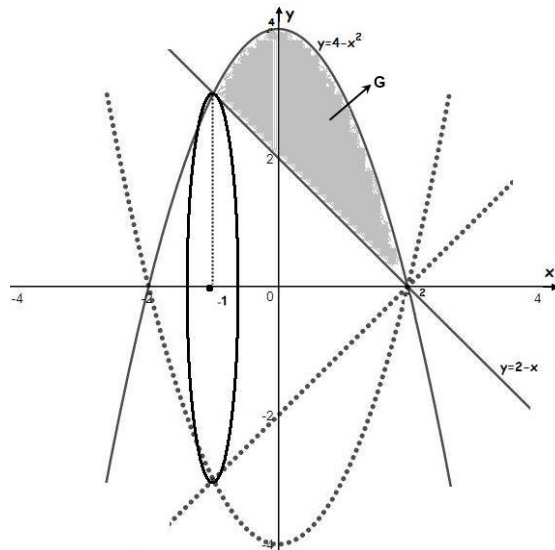
Şekle göre düzlemsel bölge

$$G: \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ 2 - x \leq y \leq 4 - x^2 \end{cases} \text{ eşitsizlikleri ile}$$

tanımlanır. OX ekseninde döneel cismin hacmi bilinen

$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx \text{ formölüne}$$

göre bulunabilir.



Buna göre

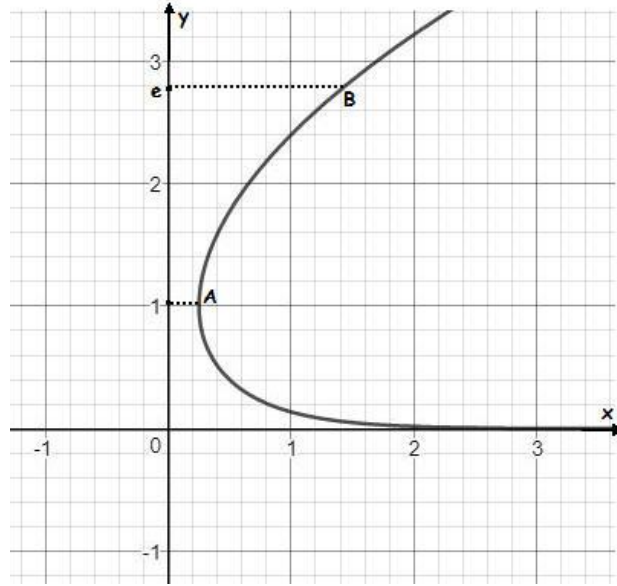
$$V = \pi \int_{-1}^2 [(4-x^2)^2 - (2-x)^2] dx = \pi \int_{-1}^2 [16-8x^2+x^4-4+4x-x^2] dx = \pi \int_{-1}^2 [12-9x^2+x^4+4x] dx =$$

$$= \pi \left(12x - 3x^3 + \frac{x^5}{5} + 2x^2 \right) \Big|_{-1}^2 = \pi \left(24 - 24 + \frac{32}{5} + 8 + 12 - 3 + \frac{1}{5} - 2 \right) = \frac{108\pi}{5} br^3 \text{ bulunur.}$$

c) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $1 \leq y \leq e$ denklemiyle verilen eğri yayının uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: $g(y) = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ ve $g'(y) = \frac{y}{2} - \frac{1}{2y}$ fonksiyonları $[1, e]$ aralığında tanımlı ve sürekli

olduklarından yay uzunluğu $L = \int_c^d \sqrt{1+[g'(y)]^2} dy$ formülü yardımıyla hesaplanabilir.



Şekle ve formüle göre

$$L = \int_c^d \sqrt{1+[g'(y)]^2} dy = \int_1^e \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2y}\right)^2} dy = \int_1^e \sqrt{1+\frac{y^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^2}} dy = \int_1^e \sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^2}} dy =$$

$$= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2y}\right)^2} dy = \int_1^e \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2y}\right) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}y^2 + \ln|y| \right) \Big|_1^e = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}e^2 + 1 - \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{e^2+1}{4} br \text{ bulunur.}$$

d) $y = 2x^3$, $y = 2\sqrt{x}$ eğrileri ile sınırlanan bölgenin OY eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini silindirik kabuk yöntemiyle bulunuz.

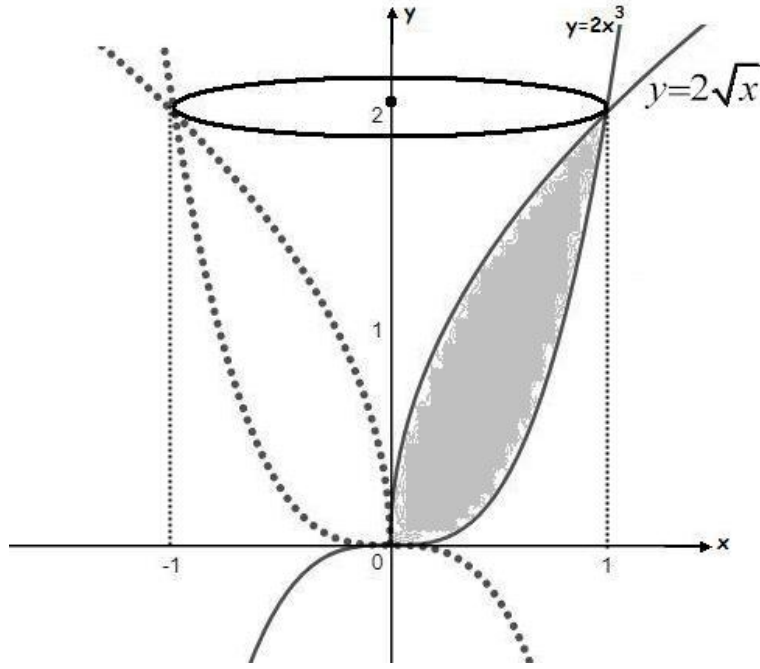
Çözüm: İlk önce kesişim noktalarının koordinatları $y = 2x^3$, $2x^3 = 2\sqrt{x}$ denkleminde

$x_1 = 0, x_2 = 1, y_1 = 0, y_2 = 2$ olarak bulunur. Şekle göre düzlemsel bölgenin $G: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2x^3 \leq y \leq 2\sqrt{x} \end{cases}$

eşitsizlikleri ile tanımlandığını görülür. $y = 2x^3$, $y = 2\sqrt{x}$ fonksiyonları $[0, 1]$ aralığında sürekli

olduğundan kabuk yöntemi gereği cismin hacmi $V = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx$ formülüne göre

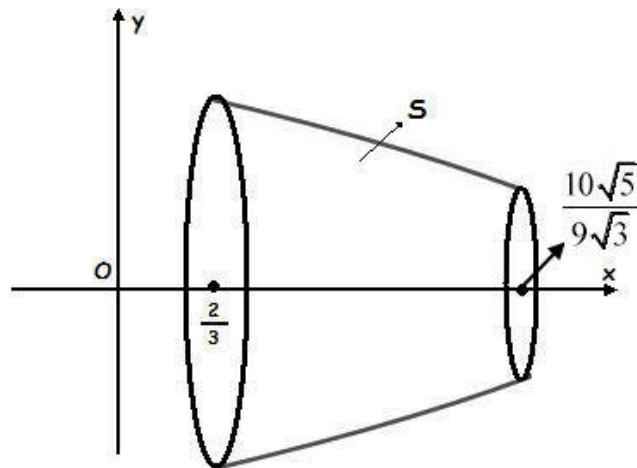
bulunabilir.



Buna göre $V = 2\pi \int_0^1 x [2x^3 - 2\sqrt{x}] dx = 4\pi \int_0^1 x [\sqrt{x} - x^3] dx = 4\pi \int_0^1 (x^{3/2} - x^4) dx =$
 $= 4\pi \left(\frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = 4\pi \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5} - 0 \right) = \frac{4\pi}{5} br^3$ bulunur.

e) $x = \frac{2}{3}(1-t)^{3/2}, y = \frac{2}{3}(1+t)^{3/2}, -\frac{2}{3} \leq t \leq 0$ denklemleriyle verilmiş eğrinin OX eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm: $x = \frac{2}{3}(1-t)^{3/2}, y = \frac{2}{3}(1+t)^{3/2}$ fonksiyonları ve $x'_t = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}(1-t)^{1/2} = -(1-t)^{1/2}$,
 $y'_t = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}(1+t)^{1/2} = (1+t)^{1/2}$ türevleri $\left[-\frac{2}{3}, 0\right]$ aralığında tanımlı ve sürekli olduklarından dönel
yüzey alanı $S = 2\pi \int_{-3/2}^0 |y(t)| \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$ formülüne göre hesaplanabilir. Sekle ve formüle
göre



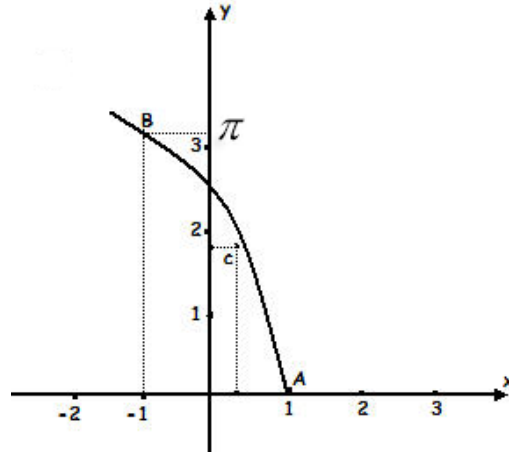
$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_{-2/3}^0 \left| \frac{2}{3}(1+t)^{3/2} \sqrt{\left[-(1-t)^{1/2} \right]^2 + \left[(1+t)^{1/2} \right]^2} dt = \frac{4\pi}{3} \int_{-2/3}^0 (1+t)^{3/2} \sqrt{1-t+1+t} dt = \\
&= \frac{4\pi}{3} \int_{-2/3}^0 (1+t)^{3/2} \sqrt{2} dt = \frac{4\pi}{3} \sqrt{2} \int_{-2/3}^0 (1+t)^{3/2} dt = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2}{5} (1+t)^{5/2} \Big|_{-2/3}^0 = \frac{8\pi\sqrt{2}}{15} \left[(1+0)^{5/2} - \left(1-\frac{2}{3}\right)^{5/2} \right] = \\
&= \frac{8\pi\sqrt{2}}{15} \left[1 - \frac{1}{9\sqrt{3}} \right] = \frac{8\pi\sqrt{2} [9\sqrt{3}-1]}{135\sqrt{3}} br^2 \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

f) $x = \cos t$, $y = t + \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$ eğrisi boyunca kütlenin dağılım yoğunluğunu $\rho=1$ sayarak eğrinin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm: $x = \cos t$, $y = t + \sin t$ ve $x'_t = -\sin t$, $y'_t = 1 + \cos t$, $\rho = \rho(t) = 1$ fonksiyonları $[0, \pi]$ aralığında tanımlı ve sürekli olduklarından eğrinin kütlesi ve statik momentleri

$$m = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt, \quad M_x = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \rho(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt, \quad M_y = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) \rho(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$$

formüllerine göre bulunabilir. O halde şekil dikkate alınarak



$$\begin{aligned}
m &= \int_0^{\pi} \rho(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 t + (1 + \cos t)^2} dt = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 t + 1 + 2 \cos t + \cos^2 t} dt = \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos t} dt = \\
&= \int_0^{\pi} 2 \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt = 2 \int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2} dt = 4 \sin \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} = 4 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{0}{2} \right) = 4 \cdot 1 = 4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_0^{\pi} (t + \sin t) \sqrt{2 + 2 \cos t} dt = 2 \int_0^{\pi} (t + \sin t) \cos \frac{t}{2} dt = 4 \int_0^{\pi} (t + \sin t) d \sin \frac{t}{2} = \\
&= \left[\begin{array}{l} u = t + \cos t, v = \sin \frac{t}{2} \text{ olmak} \\ \text{üzere kısmi integrasyon uygulayalım} \end{array} \right] = 4(t + \sin t) \sin \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} - 4 \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} d(t + \sin t) = 4(\pi + \sin \pi) \sin \frac{\pi}{2} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-4(0 + \sin 0) \sin \frac{0}{2} - 4 \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} (1 + \cos t) dt = 4\pi + 8 \int_0^{\pi} 2 \cos^2 \frac{t}{2} d \cos \frac{t}{2} = 4\pi + \frac{16}{3} \cos^3 \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} = \\
&= 4\pi + \frac{16}{3} \cos^3 \frac{\pi}{2} - \frac{16}{3} \cos^3 \frac{0}{2} = 4\pi - \frac{16}{3} \text{ ve}
\end{aligned}$$

$$M_y = \int_0^{\pi} \cos t \sqrt{2 + 2 \cos t} dt = 2 \int_0^{\pi} \cos t \cos \frac{t}{2} dt = 4 \int_0^{\pi} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{t}{2} \right) d \sin \frac{t}{2} = 4 \left(\sin \frac{t}{2} - \frac{2}{3} \sin^3 \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{\pi} =$$

$= 4\left(\sin \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \sin^3 \frac{\pi}{2}\right) - 4\left(\sin \frac{0}{2} - \frac{2}{3} \sin^3 \frac{0}{2}\right) = 4\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$ bulunur. Buradan ağırlık merkezinin

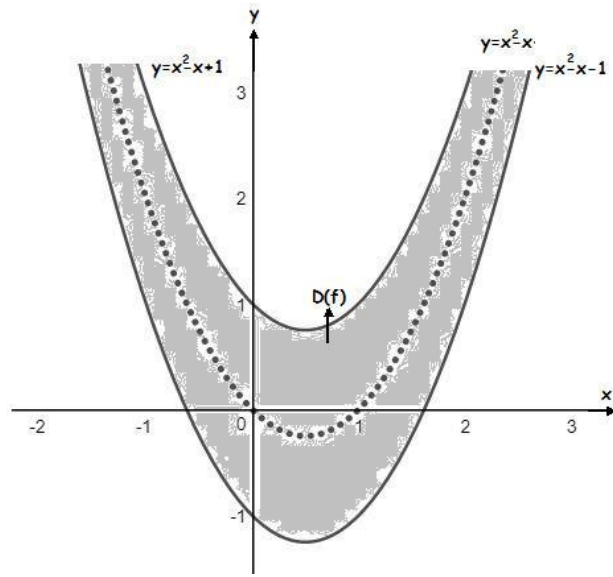
koordinatları $x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{4/3}{4} = \frac{1}{3}$, $y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{4\pi - \frac{16}{3}}{4} = \pi - \frac{4}{3}$, eğrinin ağırlık merkezi ise $C\left(\frac{1}{3}, \pi - \frac{4}{3}\right)$ olarak bulunur.

4. $z = \arccos(y - x^2 + x)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz ve geometrik yerini koordinat düzleminde gösteriniz.

Çözüm: $D(\arccos) = [-1, 1]$ olduğu dikkate alınarak

$$D(f) = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq y - x^2 + x \leq 1\} = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - x - 1 \leq y \leq x^2 - x + 1\}$$

bulunur. Bu bölgeyi geometrik olarak Oxy koordinat düzleminde gösterelim.



Şekildeki taralı bölge $y = x^2 - x - 1$ ve $y = x^2 - x + 1$ parabollerine ait ve onlar arasında bulunan tüm noktalardan oluşuyor.

5. $z = \ln(x - y^3)$ fonksiyonunun $f(x, y) = c$ seviye eğrilerini bulunuz ve c sabitinin 4 farklı değeri için koordinat düzleminde çiziniz.

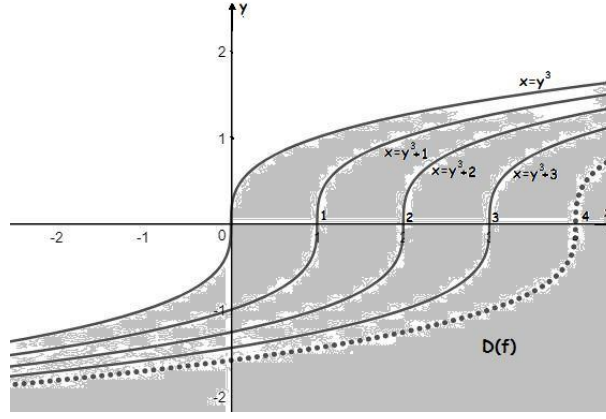
Çözüm: İlk önce fonksiyonun tanım kümesini

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^3 > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y^3\}$$

şeklinde bulalım. Şekilde bu, $x = y^3$

parabolünün sağında bulunan tüm noktaların kümesidir. Her $c \in \mathbb{R}$ için seviye eğrisinin

$f(x, y) = c$ denklemi $\ln(x - y^3) = c \Leftrightarrow x = y^3 + e^c$ şeklinde yazılır. Bu ise Oxy koordinat düzleminde, $c_1 = e^c > 0$ olmak üzere $x = y^3 + c_1, c_1 \in \mathbb{R}^+$ parabol ailesidir. Her öge $x = y^3$ parabolünü Ox eksen yönünde $c_1 > 0$ birim ötelemekle elde edilir. $c = 0, c = \ln 2, c = \ln 3, c = \ln 4$ durumları için seviye eğrilerini çizelim.



6. Limitleri bulunuz:

a) $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (3,4) \\ y \neq x+1}} \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x+1}}{y - x - 1}$

Çözüm: $f(x, y) = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x+1}}{y - x - 1}$ fonksiyonu $(3, 4)$ noktasının yakın delinmiş komşuluğunda

$y = x + 1$ doğrusuna ait olmayan her noktada tanımlıdır, dolayısıyla $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (3,4) \\ y \neq x+1}} \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x+1}}{y - x - 1}$

limitinden bahsedilebilir. Fonksiyonun ifadesinden, $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (3,4) \\ y \neq x+1}} (\sqrt{y} - \sqrt{x+1}) = \sqrt{4} - \sqrt{3+1} = 0$ ve

$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (3,4) \\ y \neq x+1}} (y - x - 1) = 4 - 3 - 1 = 0$ olması nedeniyle limit için $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ belirsizlik durumu söz

konusudur. Dolayısıyla bu limite bölümün limiti kuralı uygulanamaz. Bu nedenle pay ve paydayı, payın eşleniğine çarparak ifadeyi dönüştürelim ve limiti bulalım.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (3,4) \\ y \neq x+1}} \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x+1}}{y - x - 1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (3,4) \\ y \neq x+1}} \frac{(\sqrt{y} - \sqrt{x+1})(\sqrt{y} + \sqrt{x+1})}{(y - x - 1)(\sqrt{y} + \sqrt{x+1})} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (3,4) \\ y \neq x+1}} \frac{y - x - 1}{(y - x - 1)(\sqrt{y} + \sqrt{x+1})} = \\ &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (3,4) \\ y \neq x+1}} \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{x+1}} = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} 1}{\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} \sqrt{y} + \lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{4}} = \frac{1}{4} \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos\left(\frac{x^2 y + 2xy^2}{x^2 + y^2}\right) = L$

Çözüm: $f(x, y) = \cos\left(\frac{x^2 y + 2xy^2}{x^2 + y^2}\right)$ fonksiyonu $(0, 0)$ noktasının yakın delinmiş komşuluğunda

tanımlıdır. $z = \cos u$ fonksiyonu her noktada sürekliliği olduğundan bileşke fonksiyonunun

sürekliliği kuralına göre limit $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos\left(\frac{x^2 y + 2xy^2}{x^2 + y^2}\right) = \cos\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y + 2xy^2}{x^2 + y^2}\right) = \cos A$

şeklinde bulunabilir. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y + 2xy^2}{x^2 + y^2} = A$ limitinde $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 y + 2xy^2) = 0^2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0^2 = 0$

ve $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0^2 + 0^2 = 0$ olduğundan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ şeklinde belirsizlik durumu vardır, dolayısıyla

bölümün limiti kuralını uygulayamayız. Buna rağmen her $(x, y) \neq (0, 0)$ için

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y + 2xy^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x^2 y + 2xy^2|}{|x^2 + y^2|} \leq \frac{|x^2 y| + |2xy^2|}{x^2 + y^2} = \frac{|x| \cdot |y| (|x| + 2|y|)}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x| \cdot |y| (|x| + 2|y|)}{2|x| \cdot |y|} = \frac{|x|}{2} + |y|$$

eşitsizliği geçerli ve $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = 0$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{|x|}{2} + |y| \right) = 0$ olduğundan sandviç teoremine göre

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{x^2 y + 2xy^2}{x^2 + y^2} \right| = A = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y + 2xy^2}{x^2 + y^2} = A = 0 \text{ elde edilir. O halde}$$

$$L = \cos \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y + 2xy^2}{x^2 + y^2} \right) = \cos 0 = 1 \text{ bulunur.}$$

c) $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 2}} \left(1 + \frac{2}{x+y} \right)^{\frac{x^2+y}{x+y^2}}$

Çözüm: Limiti bulmak için $u(x) = \frac{2}{x+y}$ ve $v(x) = \frac{x^2+y}{x+y^2}$ olmak üzere kuvvet-üstel

fonksiyonun $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 2}} (1+u(x))^{v(x)}$ limiti için bilinen kuralı kullanalım. Bu limitte

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 2}} u(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 2}} \frac{2}{x+y} = \frac{2}{+\infty+2} = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 2}} v(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 2}} \frac{x^2+y}{x+y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 2}} \frac{x + \frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x}} = \frac{+\infty+0}{1+0} = +\infty \text{ olmak}$$

üzere $[1^\infty]$ tipinde belirsizlik durumu söz konusudur. Kurala göre, $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 2}} (1+u(x))^{v(x)} = e^k$,

$k = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 2}} v(x)u(x)$ formüllerini kullanırsak

$$\begin{aligned} k &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 2}} v(x)u(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 2}} \frac{x^2+y}{x+y^2} \cdot \frac{2}{x+y} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 2}} \frac{2x^2 \left(1 + \frac{y}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{y}{x} \right) \left(1 + \frac{y^2}{x} \right)} = \frac{2 \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 2}} \left(1 + \frac{y}{x^2} \right)}{\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 2}} \left(1 + \frac{y}{x} \right) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 2}} \left(1 + \frac{y^2}{x} \right)} = \\ &= \frac{2 \left(1 + \frac{2}{+\infty} \right)}{\left(1 + \frac{2}{+\infty} \right) \left(1 + \frac{4}{+\infty} \right)} = \frac{2(1+0)}{(1+0)(1+0)} = 2 \text{ ve } \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 2}} \left(1 + \frac{2}{x+y} \right)^{\frac{x^2+y}{x+y^2}} = e^k = e^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

d) $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (\sqrt{y} + \sqrt{x}) \sin \frac{xy}{x^3 + y^3}$

Çözüm: $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (\sqrt{y} + \sqrt{x}) = +\infty + (+\infty) = +\infty$ ve $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \sin \frac{xy}{x^3 + y^3} = \sin \left(\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{xy}{x^3 + y^3} \right)$ limiti için

$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{xy}{x^3 + y^3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ limitinin değerine bağlı olarak değişik belirsizlik durumları ortaya çıkabilir.

Bu nedenle, limiti bulmak için, çarpımın limiti kuralını uygulayamayız ve başka yöntem kullanmalıyız. Bu amaçla, örneğin limit tanımını veya sandviç teoremini kullanabiliriz.

1. Yöntem: Her $x > 0, y > 0$ için

$$0 \leq |f(x, y)| = \left| (\sqrt{y} + \sqrt{x}) \sin \frac{xy}{x^3 + y^3} \right| = (\sqrt{y} + \sqrt{x}) \left| \sin \frac{xy}{x^3 + y^3} \right| \leq (\sqrt{y} + \sqrt{x}) \frac{|xy|}{x^3 + y^3} = (\sqrt{y} + \sqrt{x}) \frac{xy}{x^3 + y^3} \leq \frac{xy(\sqrt{y} + \sqrt{x})}{2\sqrt{(xy)^3}} = \frac{(\sqrt{y} + \sqrt{x})}{2\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}$$
 eşitsizliği geçerlidir.

$$0 \leq |f(x, y)| \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \text{ ve } \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} 0 = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{+\infty} + \frac{1}{+\infty} = 0 + 0 = 0 \text{ olduğu için sandviç}$$

teoremine göre $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} |f(x, y)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (\sqrt{y} + \sqrt{x}) \sin \frac{xy}{x^3 + y^3} = 0$ elde edilir.

2. Yöntem: Her $\Delta > 0$ ve $x > \Delta, y > \Delta$ için geçerli olan

$$|f(x, y)| \leq \left| (\sqrt{y} + \sqrt{x}) \sin \frac{xy}{x^3 + y^3} \right| \leq (\sqrt{y} + \sqrt{x}) \frac{xy}{x^3 + y^3} \leq \frac{(\sqrt{y} + \sqrt{x})}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} < \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} + \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$$

eşitsizliğine dayanarak $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$ sayısı $\frac{1}{\sqrt{\Delta}} < \varepsilon \Leftrightarrow \Delta > \frac{1}{\varepsilon^2}$

sağlanacak şekilde seçilirse

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta(\varepsilon) > 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \left(x > \Delta, y > \Delta \Rightarrow |f(x, y) - 0| = \left| (\sqrt{y} + \sqrt{x}) \sin \frac{xy}{x^3 + y^3} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\Delta}} < \varepsilon \right)$$

önermesi geçerli olur. Bu ise $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (\sqrt{y} + \sqrt{x}) \sin \frac{xy}{x^3 + y^3} = 0$ demektir.

7. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{xy + 1 - y}{1 + x + x^2 - y^2}$ limitinin mevcut olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $f(x, y) = \frac{xy + 1 - y}{1 + x + x^2 - y^2}$ fonksiyonu $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + x + x^2 - y^2 \neq 0\}$ kümesine

ait ve $(0, 1)$ 'in delinmiş komşuluğunda bulunan tüm noktalarda tanımlıdır. Limitin mevcut olmadığını göstermek için koordinat düzleminde, $(0, 1)$ noktasına iki farklı yol boyunca yaklaşıldığında $f(x, y)$ fonksiyonunun farklı limitlerinin var olduğunu göstermek yeterlidir. Buna göre $x = 0$ ve $y = 1$ doğruları boyunca limitleri bulalım. Sonuçta

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{xy + 1 - y}{1 + x + x^2 - y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{0 \cdot y + 1 - y}{1 + 0 + 0^2 - y^2} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1 - y}{1 - y^2} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1 - y}{(1 - y)(1 + y)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{1 + y} = \frac{1}{2} \text{ ve}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = 1}} \frac{xy + 1 - y}{1 + x + x^2 - y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = 1}} \frac{x \cdot 1 + 1 - 1}{1 + x + x^2 - 1^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + x} = \frac{1}{1 + 0} = 1 \text{ bulunur. } \frac{1}{2} \neq 1 \text{ olduğu}$$

içi $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{xy + 1 - y}{1 + x + x^2 - y^2}$ limiti yoktur.

8. Fonksiyonun sürekliliğini inceleyiniz ve süreksizlik noktalarını bulunuz:

$$f(x, y) = (x + y + 1) \cos \frac{yx^2}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \text{ ve } f(0, 0) = 0.$$

Çözüm: Açık ki, fonksiyon $D(f) = \mathbb{R}^2$ kümesinde tanımlıdır. Her (x, y) noktasında

$z = x + y + 1$ lineer fonksiyonu ve $(x, y) \neq (0, 0)$ noktasında $u = \frac{yx^2}{x^2 + y^2}$ kesir rasyonel

fonksiyonu süreklidir. Ayrıca $z = \cos u$ fonksiyonu her $u \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli olduğundan bileşke fonksiyonunun ve çarpımın sürekliliği hakkına teoreme göre $f(x, y)$ fonksiyonu da

$\forall (x, y) \neq (0, 0)$ noktasında süreklidir. Acaba $f(x, y)$ fonksiyonu $(0, 0)$ noktasında sürekli, yani

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0, 0) = 0$ mı? Bunu kontrol etmek için $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x + y + 1) \cos \frac{yx^2}{x^2 + y^2}$ limitini

bulmalıyız. Önce $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{yx^2}{x^2 + y^2} = \left[\frac{0}{0} \right]$ limitini Sandviç teoreminden faydalanarak bulalım.

$$0 \leq \left| \frac{yx^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|yx^2|}{|x^2 + y^2|} = \frac{|y| \cdot |x|^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{|y| \cdot |x|^2}{2\sqrt{x^2 \cdot y^2}} = \frac{|y| \cdot |x|^2}{2|x| \cdot |y|} = \frac{|x|}{2} \Rightarrow 0 \leq \left| \frac{yx^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|}{2}, \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

eşitsizliğine ve $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} 0 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{|x|}{2} = 0$ olduğuna göre teorem gereği

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left| \frac{yx^2}{x^2 + y^2} \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{yx^2}{x^2 + y^2} = 0 \text{ olur. O halde}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x + y + 1) \cos \frac{yx^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x + y + 1) \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \cos \frac{yx^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x + y + 1) \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \cos \frac{yx^2}{x^2 + y^2} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x + y + 1) \cos \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{yx^2}{x^2 + y^2} \right) = (0 + 0 + 1) \cos 0 = 1.1 = 1 \neq 0 = f(0, 0), \text{ dolayısıyla } f(x, y) \end{aligned}$$

fonksiyonu $(0, 0)$ noktasında süreksizdir. $(0, 0)$ noktası kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır. Bu noktada fonksiyonun değeri $f(0, 0) = 1$ ile değiştirilirse $f(x, y)$ bu noktada da sürekli olur.

Uyarı: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{yx^2}{x^2 + y^2} = 0$ eşitliği, kutupsal koordinatlara geçmekle de gösterilebilir. Her $r > 0$

$$\varphi \in [0, 2\pi] \text{ için } \left| \frac{yx^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \left| \frac{r \sin \varphi \cdot r^2 \cos^2 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} \right| = \frac{r^3 |\sin \varphi| \cos^2 \varphi}{r^2} = r |\sin \varphi| \cos^2 \varphi \leq r$$

geçerlidir. O halde $\forall \varepsilon > 0$ sayısına göre $0 < r < \delta, \varphi \in [0, 2\pi]$ şartını sağlayan

$$\forall (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \text{ noktası için } \left| \frac{yx^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq r < \delta = \varepsilon \text{ dolayısıyla } \left| \frac{yx^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

eşitsizliği $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ için geçerli olur. Bu ise limitin tanımına göre $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{yx^2}{x^2 + y^2} = 0$ demektir.