

## Analiz-II Final konularıyla ilgili çözüm örnekleri.

1.  $z = e^{x^2+y^2} + \ln(1+xy)$  fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden tüm kısmi türevlerini bulunuz.

**Çözüm:** Verilmiş fonksiyon elemanter fonksiyonlardan cebirsel ve bileşke işlemleri yardımıyla oluşturulmuştur.  $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1+xy > 0\}$  kümesinde tanımlıdır. Elemanter fonksiyonların türev formüllerine ve diferansiyelleme kurallarına göre kısmi türevlerini bulalım.

$$z'_x = e^{x^2+y^2} \cdot 2x + \frac{y}{1+xy}, \quad z'_y = e^{x^2+y^2} \cdot 2y + \frac{x}{1+xy},$$

$$z''_{xx} = \left( e^{x^2+y^2} \cdot 2x + \frac{y}{1+xy} \right)'_x = e^{x^2+y^2} \cdot 2x \cdot 2x + 2e^{x^2+y^2} - \frac{y^2}{(1+xy)^2} = (4x^2 + 2)e^{x^2+y^2} - \frac{y^2}{(1+xy)^2},$$

$$z''_{xy} = \left( e^{x^2+y^2} \cdot 2x + \frac{y}{1+xy} \right)'_y = e^{x^2+y^2} \cdot 2x \cdot 2y + \frac{1 \cdot (1+xy) - yx}{(1+xy)^2} = 4xye^{x^2+y^2} + \frac{1}{(1+xy)^2},$$

$$z''_{yx} = \left( e^{x^2+y^2} \cdot 2y + \frac{x}{1+xy} \right)'_x = e^{x^2+y^2} \cdot 2y \cdot 2x + \frac{1 \cdot (1+xy) - yx}{(1+xy)^2} = 4xye^{x^2+y^2} + \frac{1}{(1+xy)^2},$$

$$z''_{yy} = \left( e^{x^2+y^2} \cdot 2y + \frac{x}{1+xy} \right)'_y = e^{x^2+y^2} \cdot 2y \cdot 2y + 2e^{x^2+y^2} - \frac{x^2}{(1+xy)^2} = (4y^2 + 2)e^{x^2+y^2} - \frac{x^2}{(1+xy)^2},$$

$\forall (x, y) \in D(f)$  için.

2.  $z = xye^{x+y}$ ,  $x = 2uv$ ,  $y = u^2 - v^2$  iken  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  kısmi türevlerini zincir kuralına göre bulunuz.

**Çözüm:** İlk önce zincir kuralının uygulanabilirliğini teyit edelim.  $z = f(x, y) = xye^{x+y}$  fonksiyonu  $D(f) = \mathbb{R}^2$  kümesinde,  $x = \varphi(u, v) = 2uv$ ,  $y = \psi(u, v) = u^2 - v^2$  fonksiyonları ise  $D(\varphi) = D(\psi) = \mathbb{R}^2$  kümesinde, ayrıca  $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$  bileşke fonksiyonu  $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$  için tanımlıdır.  $\forall (x, y) \in D(f)$  noktasında

$$z'_x = (xye^{x+y})'_x = ye^{x+y} + xy(e^{x+y})'_x = ye^{x+y} + xye^{x+y} = y(1+x)e^{x+y},$$

$$z'_y = (xye^{x+y})'_y = xe^{x+y} + xy(e^{x+y})'_y = ye^{x+y} + xye^{x+y} = y(1+x)e^{x+y},$$

ve her  $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$  için  $x'_u = (2uv)'_u = 2v$ ,  $x'_v = (2uv)'_v = 2u$ ,  $y'_u = (u^2 - v^2)'_u = 2u$ ,

$y'_v = (u^2 - v^2)'_v = -2v$  sonlu kısmi türevleri vardır. O halde bileşke fonksiyonunun  $z'_u$ ,  $z'_v$  kısmi

türevleri her  $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$  noktasında vardır ve bu türevler zincir kuralına göre bulunabilir:

$$z'_u = z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u = y(1+x)e^{x+y} 2v + x(1+y)e^{x+y} 2u =$$

$$e^{2uv+u^2-v^2} (2uv+1)(u^2-v^2)2v + e^{2uv+u^2-v^2} 2uv(1+u^2-v^2)2u =$$

$$e^{2uv+u^2-v^2} 2u[(2uv+1)(u^2-v^2) + 2u^2(1+u^2-v^2)],$$

$$z'_v = z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v = y(1+x)e^{x+y} 2u - x(1+y)e^{x+y} 2v =$$

$$e^{2uv+u^2-v^2} (2uv+1)(u^2-v^2)2u - e^{2uv+u^2-v^2} 4uv^2(1+u^2-v^2) =$$

$$e^{2uv+u^2-v^2} 2u[(2uv+1)(u^2-v^2) - 2v^2(1+u^2-v^2)], \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

3.  $z^3 + z^2x + 2zx^2y - 2 = 0$  denkleminin,  $(1,0,1)$  noktasının yakın komşuluğunda bir  $z = \varphi(x, y)$  kapalı fonksiyonunu tanımladığını gösteriniz.  $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$  kısmi türevlerini ve bu türevlerin  $(1,0)$  noktasında değerlerini bulunuz.

**Çözüm:** İlk önce  $M_0(1,0,1)$  noktasının yakın komşuluğunda kapalı fonksiyonun varlığı ve türevlenebilirliği hakkında teoremin şartlarının sağlandığını kontrol edelim.  $F(x, y, z) = z^3 + z^2x + 2zx^2y - 2$  fonksiyonu  $D(F) = \mathbb{R}^3$  kümesinde özel durumda  $(1,0,1)$  noktasının bir  $R = [1 - \delta_1, 1 + \delta_1] \times [-\delta_2, \delta_2] \times [1 - \Delta, 1 + \Delta]$ ,  $(\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \Delta > 0)$  prizmatik komşuluğunda da tanımlı ve süreklidir.  $F(1,0,1) = 1^3 + 1^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1^2 \cdot 0 - 2 = 0$  yani  $(1,0,1)$  noktası denklemi sağlıyor. Ayrıca

$$F'_x(x, y, z) = (z^3 + z^2x + 2zx^2y - 2)'_x = z^2 + 4zxy, \quad F'_y(x, y, z) = (z^3 + z^2x + 2zx^2y - 2)'_y = 2zx^2$$

$$F'_z(x, y, z) = (z^3 + z^2x + 2zx^2y - 2)'_z = 3z^2 + 2zx + 2x^2y, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

sonlu kısmi türevleri mevcut olup, polinom fonksiyonu olarak  $R$  'de süreklidirler.  $F'_z(1,0,1) = (3z^2 + 2zx + 2x^2y)|_{(1,0,1)} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 = 5 \neq 0$  dır. Bu durumda teorem gereği  $F(x, y, z) = 0$  denklemi  $(1,0,1)$  noktasının bir yakın komşuluğunda  $z = \varphi(x, y)$  kapalı fonksiyonunu tanımlar. Diğer bir deyişle en az bir  $0 < \delta < \min(\delta_1, \delta_2)$  için  $N_0(1,0)$  'ın bir  $U_\delta(N_0)$  komşuluğunda tanımlı, sürekli ve sürekli türevlenebilir  $z = \varphi(x, y)$  kapalı fonksiyonu vardır. Bu fonksiyonun kısmi türevleri  $\forall (x, y) \in U_\delta(N_0)$  ve  $F(x, y, z) = 0$  şartını sağlayan  $z = \varphi(x, y)$  için

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{z^2 + 4zxy}{3z^2 + 2zx + 2x^2y}$$

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{2zx^2}{3z^2 + 2zx + 2x^2y}, \quad (F'_z(x, y, z) \neq 0, \forall (x, y, z) \in U_\delta(N_0))$$

formülleri ile bulunur. Buradan  $(1,0)$  noktasındaki türevleri ( $z = z(1,0) = 1$  alınmakla)

$$\frac{\partial z(1,0)}{\partial x} = -\frac{z^2 + zxy}{3z^2 + 2zx + 2x^2y} \Big|_{(1,0,1)} = -\frac{1^2 + 1 \cdot 1 \cdot 0}{3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 \cdot 0} = -\frac{1}{5}$$

$$\frac{\partial z(1,0)}{\partial y} = -\frac{2zx^2}{3z^2 + 2zx + 2x^2y} \Big|_{(1,0,1)} = -\frac{2 \cdot 1 \cdot 1^2}{3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 \cdot 0} = -\frac{2}{5}$$

bulunur.

4.  $x^2 + 6xy + 5y^2 + z^2 = 1$  denklemiyle verilen yüzeyin  $P_0(1,-1,1)$  noktasında teğet düzlemin ve normalinin denklemlerini bulunuz.

**Çözüm:** İlk önce  $P_0(1,-1,1)$  noktasının yüzey üzerinde bulunduğunu kontrol edelim.  $1^2 + 6 \cdot 1 \cdot (-1) + 5(-1)^2 + 1^2 = 1 - 6 + 5 + 1 = 1$  olduğundan bu geçerlidir. Teğet düzlemin normal vektörünü bulmak için denklemi  $F(x, y, z) = x^2 + 6xy + 5y^2 + z^2 - 1 = 0$  şeklinde yazalım ve

$$F'_x(x, y, z) = (x^2 + 6xy + 5y^2 + z^2 - 1)'_x = 2x + 6y, \quad F'_y(x, y, z) = (x^2 + 6xy + 5y^2 + z^2 - 1)'_y = 6x + 10y,$$

$$F'_z(x, y, z) = (x^2 + 6xy + 5y^2 + z^2 - 1)'_z = 2z \text{ kısmi türevlerini bulalım. Bu türevler } \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

noktasında süreklidir, dolayısıyla  $P_0(1,-1,1)$  noktasında da süreklidir ve bu noktada teğet düzlem vardır. Bu noktada

$$F'_x(P_0) = F'_x(1, -1, 1) = (2x + 6y)|_{(1, -1, 1)} = 2.1 - 6.1 = -4,$$

$$F'_y(P_0) = F'_y(1, -1, 1) = (6x + 10y)|_{(1, -1, 1)} = 6.1 + 10.(-1) = -4,$$

$$F'_z(P_0) = F'_z(1, -1, 1) = (2z)|_{(1, -1, 1)} = 2.1 = 2 \text{ buluruz.}$$

Buna göre normal vektör  $\vec{N} = -4\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$  olur. O halde teğet düzlemin denklemi  $-4(x-1) - 4(y+1) + 2(z-1) = 0$  veya  $-4x - 4y + 2z - 2 = 0$  yahut  $2x + 2y - z + 1 = 0$  şeklinde bulunur.  $P_0(1, -1, 1)$  noktasından geçen normal doğunun denklemi

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-1}{2} \text{ veya } \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1} \text{ şeklinde yazılır.}$$

5.  $z = x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 + 1$  fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını ve ekstremum değerlerini bulunuz.

**Çözüm:**  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 + 1$  polinom fonksiyonu olduğu için  $D(f) = \mathbb{R}^2$  kümesinde tanımlıdır, süreklidir ve her  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  noktasında sonlu

$$f'_x(x, y) = (x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 + 1)'_x = 3x^2 - 6x, \quad f'_y(x, y) = (x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 + 1)'_y = 3y^2 + 6y$$

$$f''_{xx}(x, y) = (3x^2 - 6x)'_x = 6x - 6, \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = (3x^2 - 6x)'_y = 0$$

$$f''_{yy}(x, y) = (3y^2 + 6y)'_y = 6y + 6$$

kısmi türevleri mevcuttur, ayrıca bu kısmi türevler  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  noktasında süreklidirler. O halde

yerel ekstremum için aday noktalar  $\begin{cases} f'_x(x, y) = 3x^2 - 6x = 0 \\ f'_y(x, y) = 3y^2 + 6y = 0 \end{cases}$  sistemin sağlayan stasyoner (durağan)

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$  noktalarıdır. Bu sistemi bilinen yöntemlerin biri ile çözelim.

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \\ 3y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x(x-2) = 0 \\ 3y(y+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) = 0 \\ y(y+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ veya } x = 2 \\ y = 0 \text{ veya } y = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$(0, 0), (0, -2), (2, 0), (2, -2)$  kritik noktalarını elde ederiz. Bu noktaların her birinde, ekstremum için yeterli şarttan yararlanarak yerel ekstremum değerinin varlığını inceleyelim. Bu amaçla her kritik noktada  $\Delta(x, y) = f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - [f''_{xy}(x, y)]^2 = 36(x-1)(y+1)$  diskriminantının ve  $f''_{xx}(x, y)$  (veya  $f''_{yy}(x, y)$ ) türevinin değerlerini dikkate alalım.

$(0, 0)$  noktasında  $\Delta(0, 0) = 36(x-1)(y+1)|_{(0,0)} = 36.(-1).1 = -36 < 0 \Rightarrow$  yerel ekstremum değeri yoktur,  $(0, 0)$  eğri noktasıdır.

$(0, -2)$  noktasında  $\Delta(0, -2) = 36(x-1)(y+1)|_{(0,-2)} = 36.(-1).(-1) = 36 > 0$  ve

$f''_{xx}(0, -2) = 6(x-1)|_{(0,-2)} = -6 < 0$  olduğundan  $(0, -2)$  yerel maksimum noktası,

$z_{\max} = f(0, -2) = (x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 + 1)|_{(0,-2)} = 0^3 + (-2)^3 - 3.0^3 + 3(-2)^2 + 1 = 5$  yerel maksimum değeridir.

$(2, 0)$  noktasında  $\Delta(2, 0) = 36(x-1)(y+1)|_{(2,0)} = 36.1.1 = 36 > 0$  ve  $f''_{xx}(2, 0) = 6(x-1)|_{(2,0)} = 6 > 0$

olduğundan  $(2, 0)$  yerel minimum noktası,

$z_{\min} = f(2, 0) = (x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 + 1)|_{(2,0)} = 2^3 + 0^3 - 3.2^2 + 3.0^3 + 1 = -3$  yerel minimum değeridir.

$(2, -2)$  noktasında  $\Delta(2, -2) = 36(x-1)(y+1)|_{(2, -2)} = 36 \cdot 1 \cdot (-1) = -36 < 0$  olduğundan ekstremum değeri yoktur,  $(2, -2)$  eğeri noktasıdır.

6.  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$  fonksiyonunun  $x + y + 3 = 0$  şartı altında yerel ekstremum noktalarını ve ekstremum değerlerini *Lagrange* yöntemiyle bulunuz.

**Çözüm:**  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$  ve  $\phi(x, y) = x + y + 3$  fonksiyonları  $D(f) = \mathbb{R}^2$ ,  $D(\phi) = \mathbb{R}^2$  kümesinde tanımlı, birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlere

$$f'_x(x, y) = (x^2 + y^2 - xy + x + y - 4)'_x = 2x - y + 1, \quad f''_{xx}(x, y) = (2x - y + 1)'_x = 2$$

$$f'_y(x, y) = (x^2 + y^2 - xy + x + y - 4)'_y = 2y - x + 1, \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = (2x - y + 1)'_y = -1,$$

$$f''_{yy}(x, y) = (2y - x + 1)'_y = 2, \quad \phi'_x(x, y) = (x + y + 3)'_x = 1, \quad \phi'_y(x, y) = (x + y + 3)'_y = 1,$$

$\phi''_{xx}(x, y) = (1)'_x = 0$ ,  $\phi''_{xy}(x, y) = (1)'_y = 0$ ,  $\phi''_{yy}(x, y) = (1)'_y = 0$  sahiptirler, ayrıca bu türevler  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  noktasında polinom fonksiyonu olarak süreklidirler.

*Lagrange* yöntemini uygulamak için

$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \phi(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4 + \lambda(x + y + 3)$  fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\text{Şartlı ekstremum için gerekli şartları } \begin{cases} F'_x(x, y) = 2x - y + 1 + \lambda = 0 \\ F'_y(x, y) = 2y - x + 1 + \lambda = 0 \\ \phi(x, y) = x + y + 3 = 0 \end{cases} \text{ yazalım.}$$

Elde edilen sistemin çözümlerini bulalım.

$$\begin{cases} 2x - y + 1 + \lambda = 0 \\ 2y - x + 1 + \lambda = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2 + 2\lambda = 0 \\ 3y - 3x = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda = 1 \\ y = x \\ 2x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1/2 \\ y = x = -3/2 \end{cases}$$

Buradan  $\lambda = 1/2$  için  $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$  kritik noktasını buluruz. Bu,  $f(x, y)$  fonksiyonunun verilmiş  $x + y + 3 = 0$  doğrusu üzerinde şartlı yerel ekstremum noktası adayıdır. Bu noktada şartlı ekstremum değerinin var olup olmadığını tespit etmek için yeterli şarttan faydalanalım. Bunun için  $F(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4 + \frac{1}{2}(x + y + 3)$  fonksiyonunun

$$d^2F(x, y) = F''_{xx}(x, y)dx^2 + 2F''_{xy}(x, y)dxdy + F''_{yy}(x, y)dy^2 \text{ diferansiyelinin } \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \text{ noktasındaki}$$

değerinin işaretini,  $dx$  ve  $dy$  diferansiyellerinin aynı noktada yazılmış  $d\phi\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = 1dx + 1dy = 0$

denklemini ve  $(dx)^2 + (dy)^2 > 0$  sağlayan değerleri için inceleyelim. Buna göre

$$F'_x(x, y) = 2x - y + \frac{3}{2}, \quad F'_y(x, y) = 2y - x + \frac{3}{2}, \quad F''_{xx}(x, y) = 2, \quad F''_{xy}(x, y) = F''_{yx}(x, y) = -1, \quad F''_{yy}(x, y) = 2,$$

$$F''_{xx}\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = 2, \quad F''_{xy}\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = F''_{yx}\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = -1, \quad F''_{yy}\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = 2 \text{ dikkate alınırsa,}$$

$$d^2F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2dx^2 - 2dxdy + 2dy^2 \text{ bulunur. Burada } dx + dy = 0 \text{ den bulunan } dy = -dx \text{ 'i dikkate}$$

alırsak  $dx \neq 0$  için  $d^2F\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = 2dx^2 - 2dx(-dx) + 2dx^2 = 6(dx)^2 > 0$  elde edilir. O halde yeterli

şarta göre  $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$  noktası  $f(x, y)$  fonksiyonunun bir şartlı yerel minimum noktası,

$z_{\min} = f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = (x^2 + y^2 - xy + x + y - 4)\Big|_{(-3/2, -3/2)} = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 4 = -\frac{19}{4} = -4\frac{3}{4}$  şartlı minimum değeridir.

7. İntegralleri hesaplayınız:

a)  $\int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} y dy$     b)  $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos\varphi}} r^5 \sin^2 \varphi dr$

**Çözüm:** Önce iç, ardından dış integrali hesaplayarak sonucu bulalım.

a)  $\int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} y dy = \int_0^1 \left( \frac{y^2}{2} \Big|_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ (1+\sqrt{1-x^2})^2 - (1-\sqrt{1-x^2})^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 4\sqrt{1-x^2} dx =$   
 $= 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 2 \left( \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right) \Big|_0^1 = 1 \cdot \sqrt{1-1^2} + \arcsin 1 - (0) \sqrt{1-0^2} - \arcsin 0 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

**İkinci yol:**  $I = \frac{1}{2} \int_0^1 4\sqrt{1-x^2} dx = \left[ \begin{array}{l} x = \sin t, \quad dx = \cos t dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = 1 \Rightarrow t = \pi/2 \end{array} \right] = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt =$   
 $2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = 2 \int_0^{\pi/2} |\cos t| \cos t dt = 2 \int_0^{\pi/2} \cos t \cos t dt = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} =$   
 $\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} - 0 - \frac{\sin 0}{2} = \frac{\pi}{2}$

b) Art arda iç ve dış integraleri hesaplayarak

$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos\varphi}} r^5 \sin^2 \varphi dr = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos\varphi}} r^5 dr = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \left( \frac{r^6}{6} \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{\cos\varphi}} \right) d\varphi = \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi (\cos^3 \varphi - 0) d\varphi =$   
 $\frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d \sin \varphi = \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) d \sin \varphi = \frac{1}{6} \left( \frac{\sin^3 \varphi}{3} - \frac{\sin^5 \varphi}{5} \right) \Big|_0^{\pi/2} =$   
 $\frac{1}{6} \left( \frac{\sin^3 \pi/2}{3} - \frac{\sin^5 \pi/2}{5} - 0 + 0 \right) = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{45}$  bulunur.

**Not.** Sonucu integralin hesaplanması aşağıdaki gibi de yapılabilir

$\frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) d \sin \varphi = \left[ \begin{array}{l} \sin \varphi = t, \quad dt = \cos \varphi d\varphi \\ \varphi = \pi/2 \Rightarrow t = 1, \quad \varphi = 0 \Rightarrow t = 0, \end{array} \right] = \frac{1}{6} \int_0^1 t^2 (1 - t^2) dt = \frac{1}{6} \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^1 =$   
 $\frac{1}{6} \left( \frac{1^3}{3} - \frac{1^5}{5} - 0 + 0 \right) = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{45}.$

8.  $\int_0^1 dx \int_0^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy$  integralinde integralleme sırasını değiştiriniz. (Şekil çiziniz)

**Çözüm:**  $I_1 = \int_0^1 dx \int_0^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ ,  $I_2 = \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy$  ardışık (sıralı) integrallerini iki katlı integraller şeklinde yazalım. Bu amaçla her integrale karşılık gelen integralleme bölgesini belirleyelim ve bölgeleri koordinat düzleminde göstereyim. Şekle göre

$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - \sqrt{1 - x^2}\}$  ve

$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$  yazarız. O halde

Fubini teoremine göre

$$I_2 = \int_0^1 dx \int_0^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \iint_{D_2} f(x, y) dy$$

$$I_2 = \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy = \iint_{D_2} f(x, y) dy \text{ yazılabilir.}$$

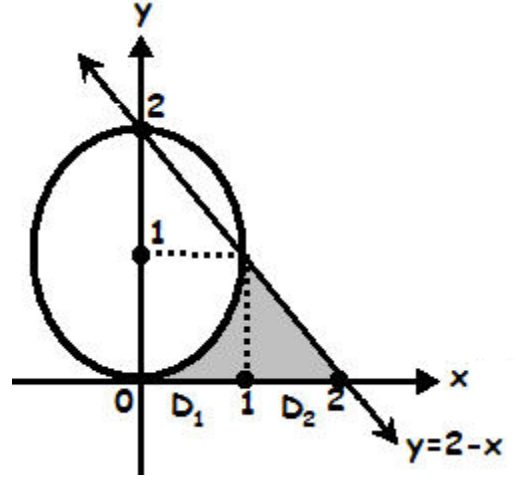
$$D = D_1 \cup D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{2y - y^2} \leq x \leq 2 - y\}$$

ve  $D_1, D_2$  bölgeleri sadece ortak sınır noktalarına sahip olduğuna göre iki katlı integralin özelliği gereği

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy = I_1 + I_2 = \iint_{D_1} f(x, y) dy + \iint_{D_2} f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) dy$$

Elde edilir.  $D$  bölgesi  $OX$  eksenini doğrultusunda düzgün bölgedir. Buna göre sonuncu integrali ardışık (sıralı) integrale indirgeyebiliriz

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{2y-y^2}}^{2-y} f(x, y) dy.$$



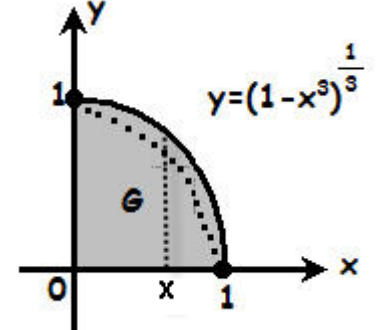
9.  $G$  bölgesi,  $x^3 + y^3 = 1$ ,  $(x \geq 0, y \geq 0)$  eğrisi ve koordinat eksenleriyle sınırlandığına göre

$\iint_G x^2 y^2 \sqrt{1 - x^3 - y^3} dx dy$  integralini hesaplayınız. (Şekil çiziniz)

**Çözüm:** Koordinat düzleminde, integralleme bölgesini sınırlayan eğrileri çizerek bölgeyi

$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt[3]{1 - x^3}\}$  gibi tanımlayalım.

$f(x, y) = x^2 y^2 \sqrt{1 - x^3 - y^3}$  fonksiyonu bu bölgede tanımlı ve sürekli olduğundan Fubini teoremine göre iki katlı integral ardışık integrallere indirgenebilir ve



$$\begin{aligned} I &= \iint_G x^2 y^2 \sqrt{1 - x^3 - y^3} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt[3]{1-x^3}} x^2 y^2 \sqrt{1 - x^3 - y^3} dy = -\frac{1}{3} \int_0^1 x^2 dx \int_0^{\sqrt[3]{1-x^3}} \sqrt{1 - x^3 - y^3} d(1 - x^3 - y^3) = \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^1 x^2 dx \left[ \frac{2}{3} (1 - x^3 - y^3)^{3/2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt[3]{1-x^3}} = -\frac{2}{9} \int_0^1 \left[ 0^{3/2} - (1 - x^3)^{3/2} \right] x^2 dx = \frac{2}{9} \int_0^1 (1 - x^3)^{3/2} x^2 dx = \\ &= \frac{2}{27} \int_0^1 (1 - x^3)^{3/2} d(1 - x^3) = -\frac{2}{27} \cdot \frac{2}{5} (1 - x^3)^{5/2} \Big|_0^1 = -\frac{4}{135} (0^{5/2} - 1^{5/2}) = \frac{4}{135} \end{aligned}$$

gibi hesaplanır.

10.  $G$  bölgesi,  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ ,  $(x \geq 0)$  lemniskat yaprağıyla sınırlandığına göre

$\iint_G x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$  integralini kutupsal koordinatlara geçerek hesaplayınız. (Şekil çiziniz)

**Çözüm:** Lemniskat eğrisinin koordinat eksenlerine ve orijine nazaran simetrik olduğunu görürüz. Bu eğrisinin verilmiş denklemini kutupsal koordinatlarla yazalım. Buna göre

$$(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^2 = r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi \quad \text{veya}$$

$r^4 = r^2 \cos 2\varphi$  yahut  $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$  elde edebiliriz. Bu denklemi dikkate alarak eğriyi çizebiliriz. Eğrinin sınırladığı sağ yarı düzlemde bulunan bölgeyi kutupsal koordinatlarla

$G^* = \left\{ (r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\varphi} \right\}$  şeklinde tanımlayalım. O halde değişken

değiştirme kuralı gereği

$$\iint_G x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_{G^*} r \cos \varphi \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} \cdot r dr d\varphi \quad \text{yazabiliriz. Bu integrali Fubini teoremine}$$

göre ardışık integrallere indirgeyerek hesaplayalım:

$$I = \iint_G x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_{G^*} r \cos \varphi \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} \cdot r dr d\varphi = \iint_{G^*} r \cos \varphi \sqrt{r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} \cdot r dr d\varphi =$$

$$\iint_{G^*} r \cos \varphi \sqrt{r^2} \cdot r dr d\varphi = \iint_{G^*} r^3 \cos \varphi dr d\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3 \cos \varphi dr = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3 dr =$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3 dr = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \varphi d\varphi \left( \frac{r^4}{4} \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{\cos 2\varphi}} \right) = \frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \varphi (\cos^2 2\varphi - 0^4) d\varphi = \frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \varphi \cos^2 2\varphi d\varphi =$$

$$\frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\varphi d \sin \varphi = \frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 - 2 \sin^2 \varphi)^2 d \sin \varphi = \frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 - 4 \sin^2 \varphi + 4 \sin^4 \varphi) d \sin \varphi =$$

$$\frac{1}{4} \left( \sin \varphi - \frac{4 \sin^3 \varphi}{3} + \frac{4 \sin^5 \varphi}{5} \right) \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{4} \left( \sin \frac{\pi}{4} - \frac{4 \sin^3 \frac{\pi}{4}}{3} + \frac{4 \sin^5 \frac{\pi}{4}}{5} - \left( \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) - \frac{4 \sin^3 \left( -\frac{\pi}{4} \right)}{3} + \frac{4 \sin^5 \left( -\frac{\pi}{4} \right)}{5} \right) \right) =$$

$$\frac{1}{4} \cdot 2 \left( \sin \frac{\pi}{4} - \frac{4 \sin^3 \frac{\pi}{4}}{3} + \frac{4 \sin^5 \frac{\pi}{4}}{5} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4 \cdot 2 \sqrt{2}}{3 \cdot 8} + \frac{4 \cdot 4 \sqrt{2}}{5 \cdot 32} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{10} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{15}.$$

**11.**  $y = \frac{x^2}{2}$  eğri ve  $y = 2x$ ,  $y = 4$ ,  $(y \geq 4)$  doğruları ile sınırlanmış  $D$  şeklinin alanını iki katlı integral yardımıyla bulunuz. (Şekil çiziniz)

**Çözüm:**

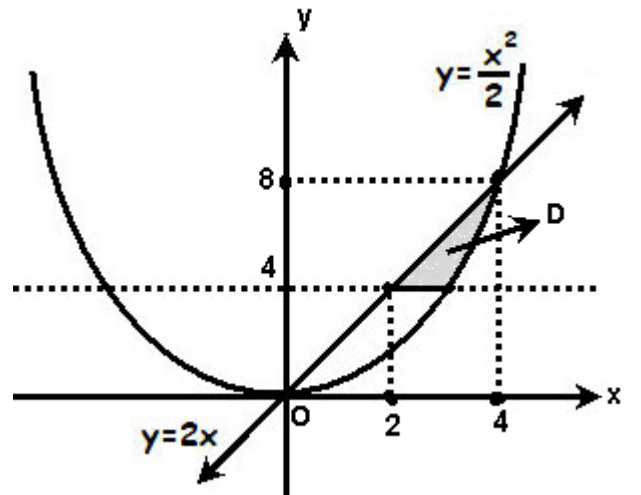
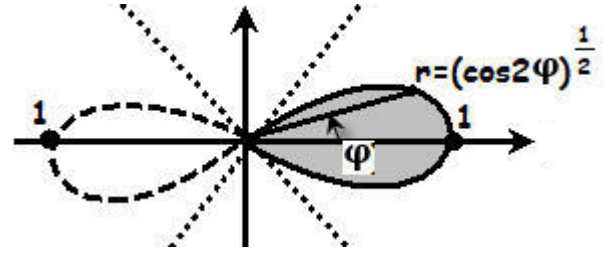
Önce  $D$  şeklinin sınır eğrilerini koordinat düzleminde çizerek bölgeyi belirleyelim. Şekle göre bölgeyi

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq y \leq 8, \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{2y} \right\} \text{ gibi}$$

tanımlayalım. O halde düzlemsel şeklin alanı formülüne ve Fubini teoremine göre

$$S(D) = \iint_D 1 \cdot dx dy = \int_4^8 dy \int_{y/2}^{\sqrt{2y}} dx = \int_4^8 dy \left( x \Big|_{x=y/2}^{x=\sqrt{2y}} \right) =$$

$$\int_4^8 \left( \sqrt{2y} - \frac{y}{2} \right) dy = \sqrt{2} \int_4^8 \sqrt{y} dy - \frac{1}{2} \int_4^8 y dy = \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} y^{3/2} - \frac{1}{4} y^2 \right) \Big|_4^8 =$$



$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 8^{3/2} - \frac{1}{4} \cdot 8^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 4^{3/2} + \frac{1}{4} \cdot 4^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 16\sqrt{2} - 16 - \frac{16\sqrt{2}}{3} + 4 = \frac{64}{3} - 12 - \frac{16\sqrt{2}}{3} = \frac{28-16\sqrt{2}}{3} br^2 \text{ gibi bulunur.}$$

$$S(D) = \frac{28-16\sqrt{2}}{3} br^2.$$

12.  $z = x^2 + xy + y^2 + 2$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 1$  yüzeylerinin sınırladığı cismin hacmini iki katlı integral yardımıyla bulunuz. (Şekil çiziniz)

**Çözüm:** Cismi sınırlayan yüzeyleri ve cismin Oxy koordinat düzlemi üzerindeki izdüşümü olan  $D$  bölgesini koordinat düzleminde çizelim. Şekle göre

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ ve kutupsal koordinatlara}$$

geçerken görüntüsünün

$$D^* = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\} \text{ olduğu görülür.}$$

Hacim formülüne göre cismin hacmi

$$V = \iint_D [f(x, y) - 1] dx dy = \iint_D (x^2 + xy + y^2 + 2 - 1) dx dy =$$

$$\iint_D (x^2 + xy + y^2 + 1) dx dy =$$

$$\iint_{D^*} (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + 1) r dr d\varphi =$$

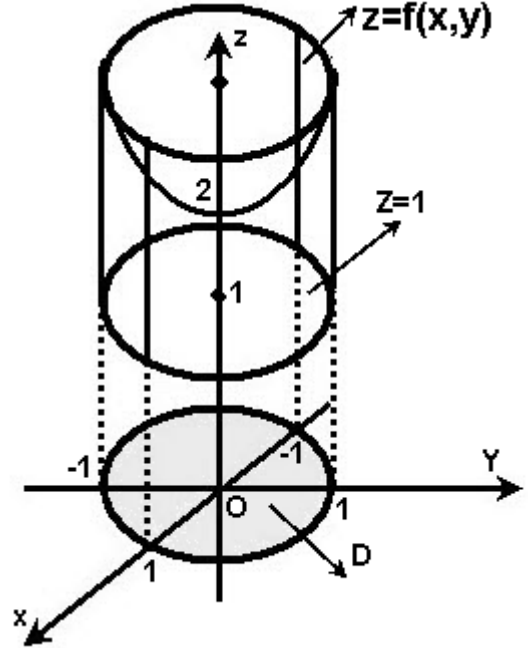
$$\iint_{D^*} (r^2 + r^2 \cos \varphi \sin \varphi + 1) r dr d\varphi =$$

$$\iint_{D^*} (r^3 + r^3 \cos \varphi \sin \varphi + r) dr d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left( \frac{r^4}{4} + \frac{r^4}{4} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{r^2}{2} \right) \Big|_{r=0}^{r=1} =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left( \frac{r^4}{4} + \frac{r^4}{4} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{r^2}{2} \right) \Big|_{r=0}^{r=1} = \int_0^{2\pi} \left( \frac{1^4}{4} + \frac{1^4}{4} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{1^2}{2} - 0 \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \sin 2\varphi \right) d\varphi =$$

$$\left( \frac{3\varphi}{4} - \frac{\cos 2\varphi}{16} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3 \cdot 2\pi}{4} - \frac{\cos 4\pi}{16} - \frac{3 \cdot 0}{4} + \frac{\cos 2 \cdot 0}{16} = \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3\pi}{2} br^3 \text{ bulunur. Cismin hacmi } V = \frac{3\pi}{2} br^3 \text{ dir.}$$



13.  $y = x^2$  parabolü ve  $y = 0$ ,  $x = 2$  doğruları ile sınırlanmış  $G$  homojen düzlemsel şeklinin ( $\rho(x, y) = 1$ ) koordinat eksenlerine göre statik momentlerini ve ağırlık merkezini bulunuz. (Şekil çiziniz)

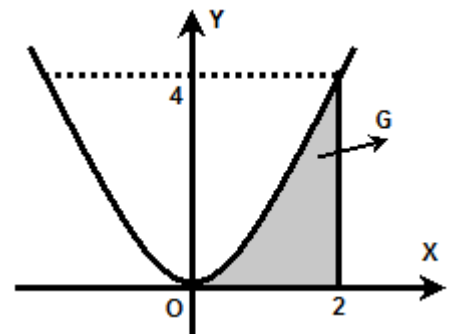
**Çözüm:**  $G$  şeklini sınırlayan eğrileri koordinat düzleminde çizelim ve  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$  bölgesini tanımlayalım. Kütlenin  $G$  bölgesinde dağılım yoğunluğu  $\rho(x, y) = 1$  fonksiyonu bu bölgede sürekli olduğundan  $G$  şeklinin kütlesi ve eksenlere nazaran statik momentleri

$$m = \iint_G \rho(x, y) \cdot dx dy, \quad M_x = \iint_G \rho(x, y) y \cdot dx dy,$$

$$M_y = \iint_G \rho(x, y) x \cdot dx dy$$

formülleri aracılığıyla bulunabilir. O halde

$$m = \iint_G \rho(x, y) \cdot dx dy = \iint_G dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} 1 dy = \int_0^2 \left( y \Big|_{y=0}^{y=x^2} \right) dx =$$



$$\int_0^2 (x^2 - 0^2) dx = \int_0^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$$

$$M_x = \iint_G \rho(x, y) y \cdot dx dy = \iint_G y dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} y dy = \int_0^2 \left( \frac{y^2}{2} \right)_{y=0}^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (x^4 - 0^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^4 dx = \left. \frac{x^5}{10} \right|_0^2 =$$

$$\frac{2^5}{10} - \frac{0^5}{10} = \frac{2^5}{10} = \frac{16}{5}$$

$$M_y = \iint_G \rho(x, y) x \cdot dx dy = \iint_G x dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} x dy = \int_0^2 x \left( y \right)_{y=0}^{x^2} dx = \int_0^2 x (x^2 - 0) dx = \int_0^2 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^2 = \frac{2^4}{4} = 4$$

bulunur. Sonuçta şeklin ağırlık merkezinin koordinatları  $x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{4}{8/3} = \frac{3}{2}$ ,  $y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{16/5}{8/3} = \frac{6}{5}$  ve ağırlık merkezi  $M_0 \left( \frac{3}{2}, \frac{6}{5} \right)$  bulunur.