

ALAN HESABI

1. $y = f(x)$ eğrisi, x -ekseni, $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanı

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

dir.

2. $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanı

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

olur.

3. $r = r(\varphi)$ eğrisi ile $\varphi = \alpha$ ve $\varphi = \beta$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanı

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$$

dir.

PROBLEMLER

1. Aşağıda denklemleri verilen eğriler ile Ox -ekseni tarafından sınırlanan düzlemsel bölgelerin alanını bulunuz.

(a) $y = 2 + x - x^2$ (b) $y = 4x - x^2$ (c) $y = x(x - 1)(x - 2)$

2. $y = \sin x$ eğrisi $x = 0$ ve $x = 2\pi$ doğruları ve x -ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

3. $y = \lfloor x \rfloor$, $x = -1$, $x = 2$ ve x -ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

4. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını hesaplayınız.

(a) $y = \frac{x^2}{4}$ ile $y = \frac{x}{2} + 2$

(b) $y^2 = 2x$, $x - y = 4$

(c) $x = y^3 - 4y$ ile $x = 4 - y^2$

(d) $y = x^3 - 12x$ ve $y = x^2$

(e) $y = x^3$ ile $y = x^2$

(f) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ ve $y = x$

(g) $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ ve $x = 0$

(h) $y = x^2$, $y = x - 1$, $y = \frac{1}{9}$

(i) $y = \cos x$, $y = x + 1$ ve $y = 0$

(i) $y^2 = 2x$ ve $x^2 = 2y$

(j) $y = x^4 - 2x^2$ ile $y = 2x^2$

(k) $y = |x|$ ve $y = x^2 - 2$

5. $y = \frac{x^2}{3}$ ve $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

6. $y = \frac{1}{1+x^2}$ eğrisi ile $y = \frac{x^2}{2}$ parabolü tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

7. $y = \sin x$, $y = \cos x$ eğrileri ile $x = \frac{\pi}{4}$ ve $x = \frac{5\pi}{4}$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

8. $y = 4 - |x|$ eğrisi, x -ekseni ve $x = -2$, $x = 2$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

9. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $y = x^k$ ile $y = x^{k+1}$ eğrileri veriliyor. Bu iki eğri arasında kalan bölgenin alanı $A(k)$ olsun. $\sum_{k=1}^n A(k)$ ifadesini bulunuz. n yeter derece büyük seçildiğinde bu alanların toplamı hangi sayıya yaklaşır?

10. Birinci bölgede, $x^2 + y^2 = a^2$ ve $x^2 + y^2 = b^2$ çemberleri ile $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi çiziliyor. Bu elipsin çemberler arasındaki bölgeyi, alanları oranı $\frac{a}{b}$ olacak şekilde böldüğünü gösteriniz.

11. $y = \frac{1}{4}(x^3 + x - 2)$ eğrisi, $x = 0$, $x = 2$ doğruları ve x -ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.
12. $y = x^3 - x$ eğrisi ile bu eğriye $x = -1$ absisli noktada teğet olan doğru arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.
13. $y = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ eğrisi, $y = x$ doğrusu ile $x = 0$, $x = 6$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.
14. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını bulunuz.
- (a) $r = a \sin 3\varphi$ (üç yapraklı gül)
 - (b) $r = a \cos 2\varphi$ (dört yapraklı gül)
 - (c) $r = 4 + 2 \cos \varphi$ (limaçon)
 - (d) $r = a(1 - \sin \varphi)$ (kardioid)
 - (e) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (lemniskat)
15. $r = \sqrt{|\cos \varphi|}$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.
16. $r = 1 + 2 \sin \varphi$ limaçonunun iç ilmeği tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.
17. $r = \varphi$ Archimedes spiralinin $[0, 2\pi]$ aralığındaki parçası ile kutup eksenini tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.
18. $r = a\varphi$ Arşimet spiralinin birinci ve ikinci sarmalı arasındaki bölgenin alanını bulunuz.
19. $r = 2 \sin \varphi$ ve $r = 2 \cos \varphi$ çemberleri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.
20. $r = 2a \cos 3\varphi$ eğrisinin içinde $r = a$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

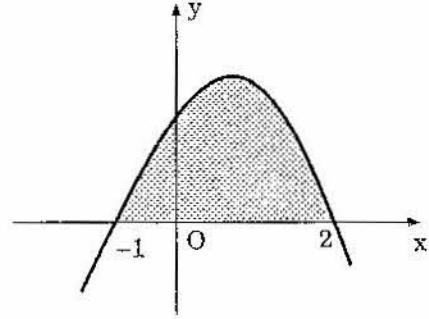
21. $r = 2a \cos 2\varphi$ gülünün içinde, $r = \sqrt{2} a$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.
22. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ lemniskatlarının her ikisinin de içinde bulunan ortak bölgenin alanını bulunuz.
23. $r = 2(1 - \cos \varphi)$ kordiyoidinin dışında $r = 2$ çemberin içinde kalan bölgenin alanını bulunuz.
24. $r^2 = 4 \cos 2\varphi$ lemniskatının içinde $r = \sqrt{2}$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.
25. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ sikloidinin bir yayı ile Ox- eksenini tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.
26. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ astroidi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.
27. $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^{2/3} = 1$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜMLER

1. a) $y = 2 + x - x^2$

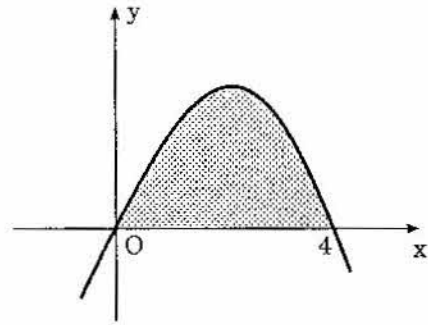
$$y = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ve } x = 2$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^2 |2 + x - x^2| dx \\ &= \int_{-1}^2 2 + x - x^2 dx \\ &= 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2} br^2 \end{aligned}$$



b) $y = 4x - x^2$

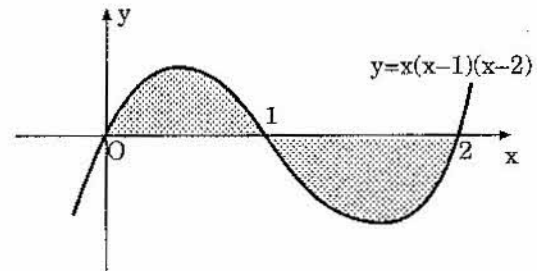
$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 |f(x)| dx \\ &= \int_0^4 (4x - x^2) dx \\ &= 2x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 \\ &= \frac{32}{3} br^2 \end{aligned}$$



c) $y = x(x-1)(x-2)$

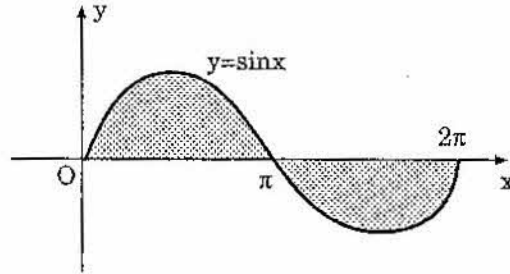
$$y = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$$

$$A = \int_0^2 |x(x-1)(x-2)| dx$$



$$\begin{aligned} &= \int_0^1 x(x-1)(x-2) dx - \int_1^2 x(x-1)(x-2) dx \\ &= \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 2x dx - \int_1^2 x^3 - 3x^2 + 2x dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right) \Big|_0^1 - \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} br^2 \end{aligned}$$

2.



$$A = \int_0^{2\pi} |f(x)| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = 4 \text{ br}^2$$

$$3. \quad A = \int_{-1}^2 |f(x)| dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^2 ||x|| dx = - \int_{-1}^0 ||x|| dx + \int_0^1 ||x|| dx + \int_1^2 ||x|| dx \\ &= - \int_{-1}^0 (-1) dx + \int_0^1 0 dx + \int_1^2 dx = 2 \text{ br}^2 \end{aligned}$$

$$4. \quad a) \quad y = \frac{x^2}{4} \text{ ile } y = \frac{x}{2} + 2$$

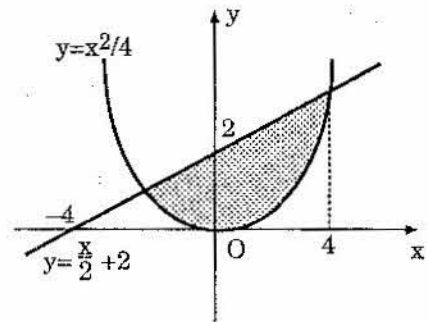
$$\frac{x^2}{4} = \frac{x}{2} + 2$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 9$$

$$x - 1 = \mp 3$$

$$\Rightarrow x_1 = 4 \text{ ve } x_2 = -2$$



$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 2 - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{x^2}{4} + 2x - \frac{x^3}{12} \Big|_{-2}^4 \\ &= 9 \text{ br}^2 \end{aligned}$$

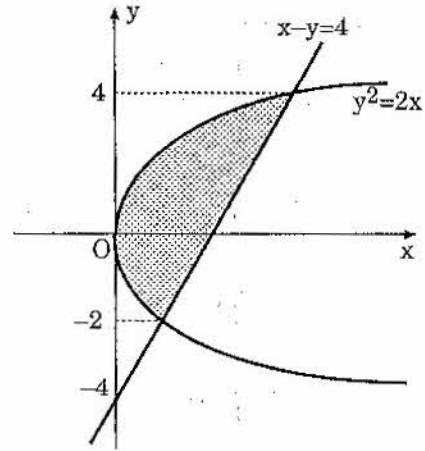
b) $y^2 = 2x$, $x - y = 4$

$$\frac{y^2}{2} = 4 + y \Rightarrow$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0 \Rightarrow$$

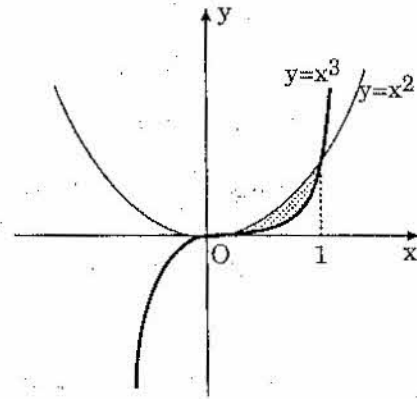
$$y = 4 \text{ ve } y = -2$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^4 |u(y) - v(y)| dy = \int_{-2}^4 y + 4 - \frac{y^2}{2} dy \\ &= \left. \frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6} \right|_{-2}^4 = 18 \text{ br}^2 \end{aligned}$$



e) $y = x^3$ ile $y = x^2$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 x^2 - x^3 dx \\ &= \left. \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{12} \text{ br}^2 \end{aligned}$$



f) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ ve $y = x$

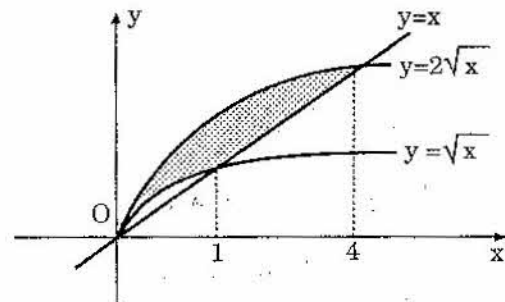
$$\Rightarrow x = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 = x$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ve } x = 1$$

$$x = 2\sqrt{x} \Rightarrow x^2 = 4x$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ve } x = 4$$

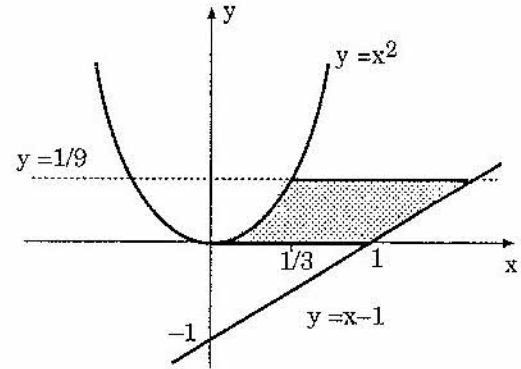
$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (2\sqrt{x} - \sqrt{x}) dx + \int_1^4 (2\sqrt{x} - x) dx \\ &= \left. \frac{2}{3} x^{3/2} \right|_0^1 + \left. \left(\frac{4}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{2} \right) \right|_1^4 = \frac{5}{2} \text{ br}^2 \end{aligned}$$



h) $y = x^2$, $y = x - 1$,

$y = \frac{1}{9}$ ve $y = 0$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{1}{9}} (y+1-\sqrt{y}) dy \\ &= \left. \frac{1}{2}y^2 + y - \frac{2}{3}y^{3/2} \right|_0^{\frac{1}{9}} \\ &= \frac{5}{34} \text{ br}^2 \end{aligned}$$



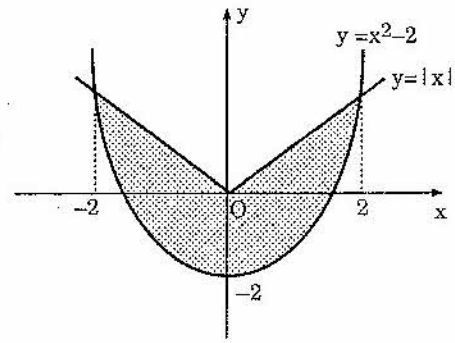
k) $y = |x|$ ve $y = x^2 - 2$

$x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$-x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Bölge simetrik olduğundan

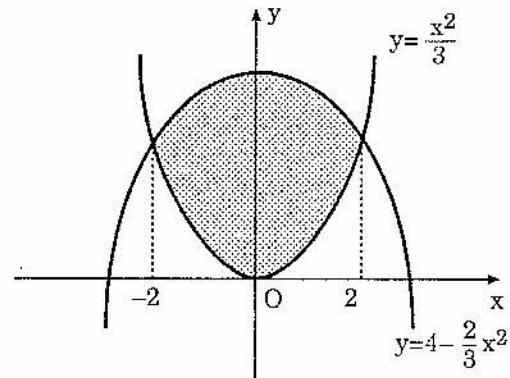
$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^2 [|x| - (x^2 - 2)] dx \\ &= 2 \int_0^2 (x - x^2 + 2) dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 2x \right) \Big|_0^2 = \frac{20}{3} \text{ br}^2 \end{aligned}$$



5. $\frac{x^2}{3} = 4 - \frac{2}{3}x^2$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 4 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{x^2}{3} dx \\ &= 2 \int_0^2 4 - x^2 dx = 2 \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 \\ &= 2 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{32}{3} \text{ br}^2 \end{aligned}$$

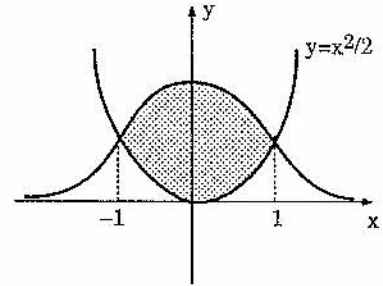


$$6. \quad \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 + x^4 = 2 \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0$$

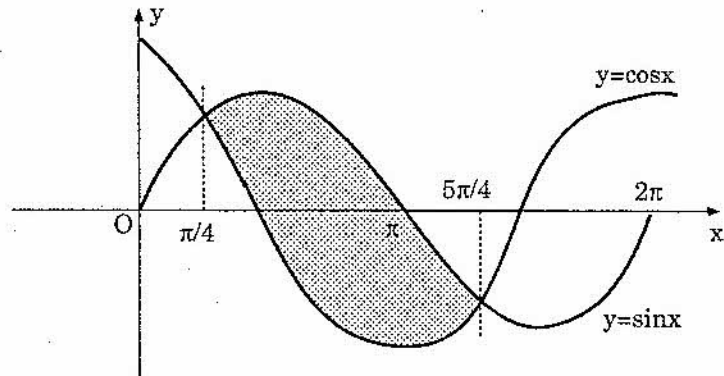
$$\Rightarrow x = \pm 1$$

$$A = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \arctan x - \frac{x^3}{6} \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \text{ br}^2$$



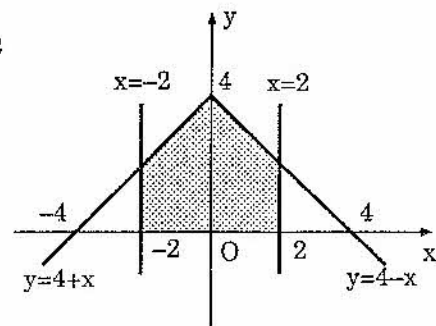
7.



$$A = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx = -\cos x - \sin x \Big|_{\pi/4}^{5\pi/4}$$

$$= +\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ br}^2$$

$$8. \quad A = 2 \int_0^2 (4-x) dx = 2 \left(4x - \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 \right) = 12 \text{ br}^2$$



$$9. A(k) = \int_0^1 (x^k - x^{k+1}) dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{x^{k+2}}{k+2} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\sum_{k=1}^n A(k) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

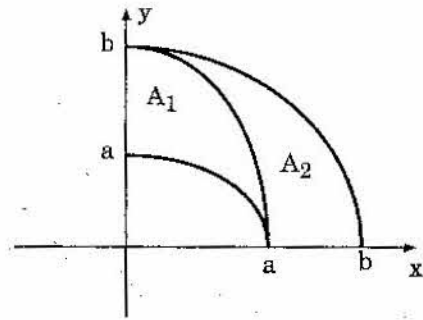
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$10. A_1 = \frac{\pi ab}{4} - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi a}{4} (b-a)$$

$$A_2 = \frac{\pi b^2}{4} - \frac{\pi ab}{4} = \frac{\pi b}{4} (b-a)$$

$$A_1 : A_2 = \left[\frac{\pi a}{4} (b-a) \right] : \left[\frac{\pi b}{4} (b-a) \right] = \frac{a}{b}$$

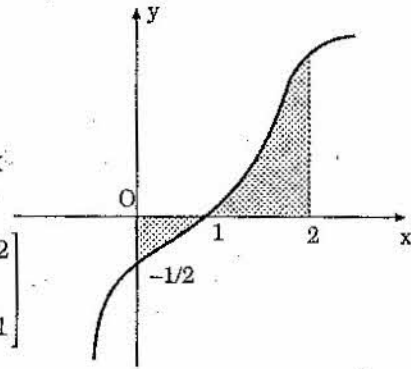


$$11. A = \int_0^2 |f(x)| dx$$

$$= \int_0^1 -\frac{1}{4} (x^3 + x - 2) dx + \int_1^2 \frac{1}{4} (x^3 + x - 2) dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 + \frac{1}{4} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2$$

$$= \frac{9}{2} br^2$$



$$12. y' = 3x^2 - 1 \quad m = y'(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$$

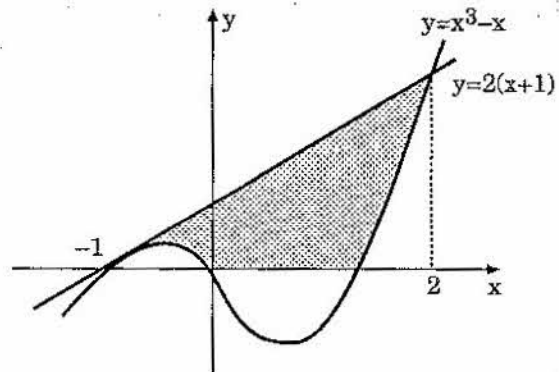
$$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^3 - (-1) = 0$$

Teğet denklemi :

$$y = m(x + 1) \Rightarrow y = 2(x + 1)$$

$$x^3 - x = 2x + 2 \Rightarrow$$

$$x^3 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow$$

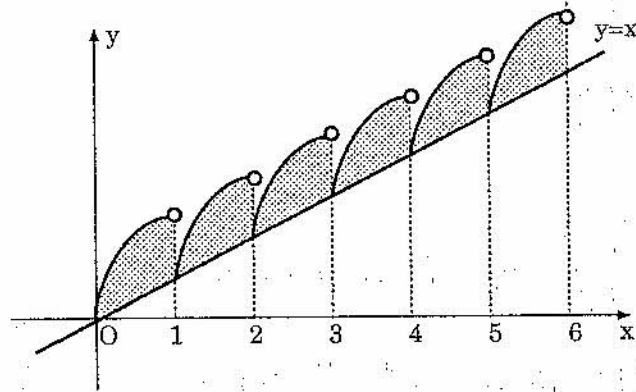


$$(x+1)(x^2-x-2) = (x+1)(x-2)(x+1)$$

$$= (x+1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 2$$

$$A = \int_{-1}^2 (2x+2-x^3+x) dx = \frac{27}{4} br^2$$

13.



$$\begin{aligned} A &= \int_0^6 \left[(\lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}) - x \right] dx = 6 \int_0^1 (\lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} - x) dx \\ &= 6 \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx = 6 \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2} \right) = 6 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) = 1 br^2 \end{aligned}$$

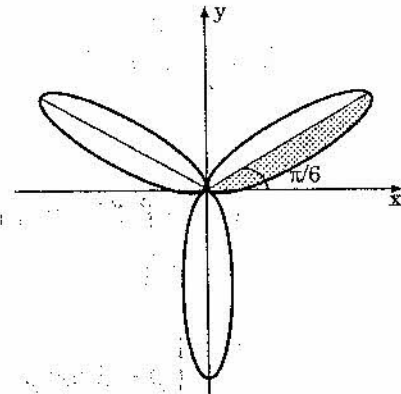
14. a) $r = a \sin 3\varphi$ (üç yapraklı gül)

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \int_0^{\pi/6} a^2 \sin^2 3\varphi d\varphi$$

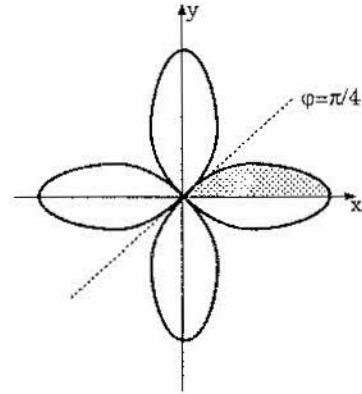
$$= 3a^2 \int_0^{\pi/6} \frac{1 - \cos 6\varphi}{2} d\varphi$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \left(\varphi - \frac{\sin 6\varphi}{6} \right) \Big|_0^{\pi/6} = \frac{3}{2} a^2 \left(\frac{\pi}{6} \right) = a^2 \frac{\pi}{4} br^2$$



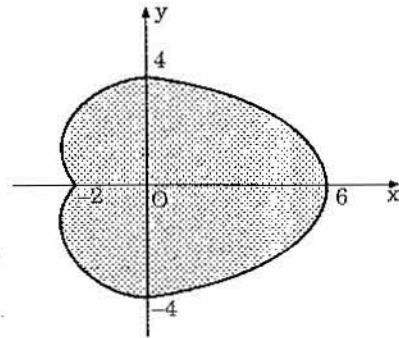
b) $r = a \cos 2\varphi$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi = 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos^2 2\varphi d\varphi \\ &= 2a^2 \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4\varphi + 1}{2} \\ &= 2a^2 \left(\frac{\sin 4\varphi}{4} + \varphi \right) \Big|_0^{\pi/4} \\ &= 2a^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi a^2}{2} br^2 \end{aligned}$$



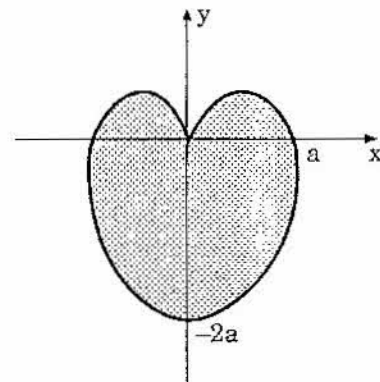
c) $A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2 d\varphi = \int_0^{\pi} (4 + 2\cos\varphi)^2 d\varphi$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi} \left(16 + 16\cos\varphi + 4 \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi \\ &= (18\varphi + 16\sin\varphi + \sin 2\varphi) \Big|_0^{\pi} = 18\pi br^2 \end{aligned}$$

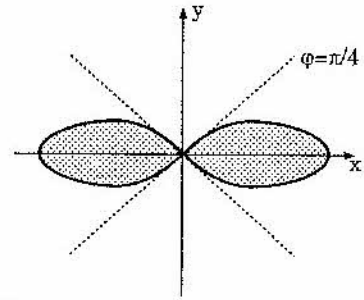


d) $r = a(1 - \sin \varphi)$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 (1 - \sin \varphi)^2 d\varphi \\ &= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\sin\varphi + \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi \\ &= a^2 \left(\varphi + 2\cos\varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= a^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = a^2 \left(\frac{3\pi}{2} \right) = \frac{3\pi a^2}{2} br^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{e) } A &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi \\ &= 2a^2 \frac{1}{2} \sin 2\varphi \bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2 br^2 \end{aligned}$$



$$15. A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\varphi = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi = 2 \cdot \sin \varphi \bigg|_0^{\pi/2} = 2 br^2$$

$$16. r = 1 + 2 \sin \theta$$

$$r = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{7\pi}{6} \text{ veya } \theta = \frac{11\pi}{6}$$

$$r = -1 \Leftrightarrow \sin \theta = -1$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} (1 + 2\sin\theta)^2 \, d\theta$$

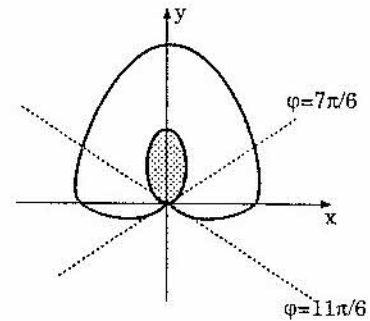
$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} (1 + 4\sin\theta + 4\sin^2\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} (3 + 4\sin\theta - 2\cos 2\theta) \, d\theta$$

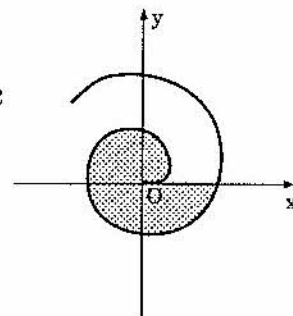
$$= \frac{1}{2} \left(3\theta - 4\cos\theta - \sin 2\theta \right) \bigg|_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{11\pi}{2} - 4\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{2} - 4\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

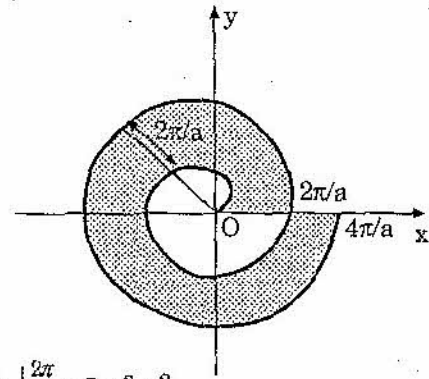
$$= \frac{1}{2} (2\pi - 4\sqrt{3} + \sqrt{3}) = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$



$$17. A = \frac{1}{2} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi^2 \, d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\varphi^3}{3} \bigg|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^3}{3} br^2$$

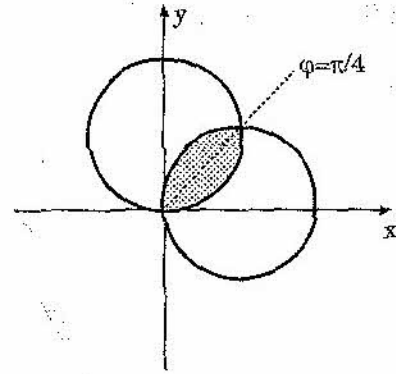


$$\begin{aligned}
 18. \quad A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(r + 2\pi a)^2 - r^2] d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4\pi a r + 4\pi^2 a^2) d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 4\pi a^2 \varphi + 4\pi^2 a^2 d\varphi \\
 &= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (\varphi + \pi) d\varphi = 2\pi a^2 \left(\frac{1}{2} \varphi^2 + \pi \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = 8\pi^3 a^2
 \end{aligned}$$

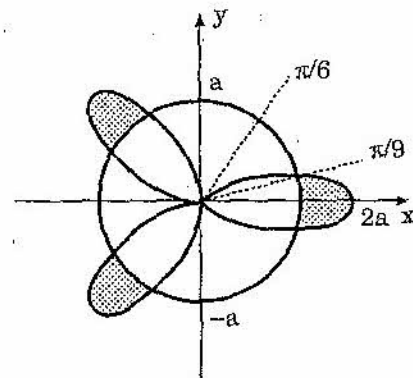


$$19. \sin \varphi = \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 \varphi d\varphi \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \sin^2 \varphi d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi \\
 &= 4 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_0^{\pi/4} = 4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - 1 \text{ br}^2
 \end{aligned}$$

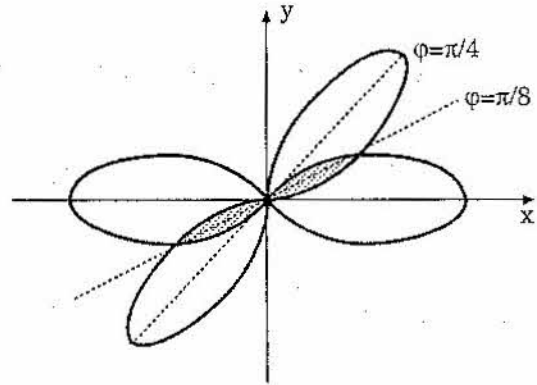


$$\begin{aligned}
 20. \quad A &= 6 \frac{1}{2} \int_0^{\pi/9} [(2a \cos 3\varphi)^2 - a^2] d\varphi \\
 &= 3a^2 \int_0^{\pi/9} [4 \cos^2 3\varphi - 1] d\varphi \\
 &= 3a^2 \int_0^{\pi/9} [2(1 + \cos 6\varphi) - 1] d\varphi \\
 &= 3a^2 \left(\varphi + \frac{1}{3} \sin 6\varphi \right) \Big|_0^{\pi/9} \\
 &= 3a^2 \left(\frac{\pi}{9} + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi a^2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} a^2
 \end{aligned}$$

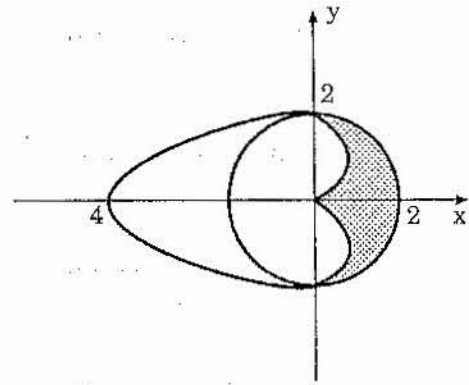


$$\begin{aligned}
 21. \quad A &= \frac{1}{2} \cdot 8 \int_0^{\frac{\pi}{8}} [(2a \cos 2\varphi)^2 - (\sqrt{2}a)^2] d\varphi = 2a^2 4 \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left[2 \cdot \frac{(1 + \cos 4\varphi)}{2} - 1 \right] d\varphi \\
 &= 8a^2 \left(\frac{\sin 4\varphi}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = 8a^2 \cdot \frac{1}{4} = 2a^2 br^2
 \end{aligned}$$

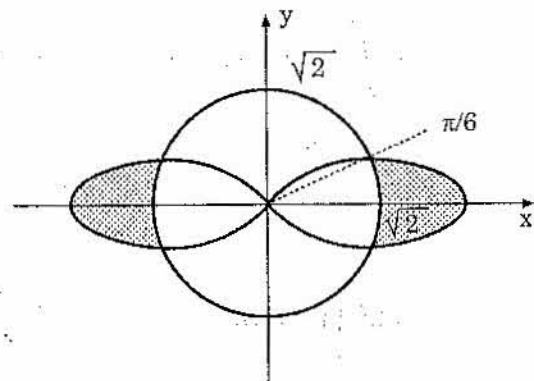
$$\begin{aligned}
 22. \quad A &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{8}} a^2 \sin 2\varphi d\varphi \\
 &= 2a^2 \left(-\frac{\cos 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} \\
 &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) a^2 \\
 &= \frac{1}{2} (2 - \sqrt{2}) a^2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 23. \quad A &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2^2 - (2(1 - \cos \varphi))^2) d\varphi \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 - 4 + 8 \cos \varphi - 4 \cos^2 \varphi d\varphi \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8 \cos \varphi - 2(1 + \cos 2\varphi) d\varphi \\
 &= (8 \sin \varphi - 2\varphi + \sin 2\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8 - \pi br^2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 24. \quad A &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (4 \cos 2\varphi - 2) d\varphi \\
 &= 2 (2 \sin 2\varphi - 2\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \\
 &= \frac{2}{3} (3\sqrt{3} - \pi) br^2
 \end{aligned}$$



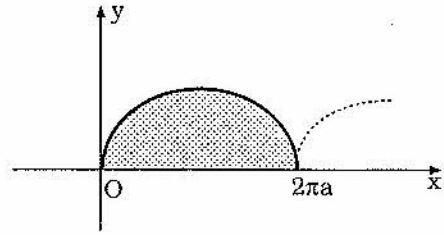
$$25. A = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)| \cdot x'(t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} |a(1 - \cos t)| \cdot a(1 - \cos t) dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} 1 - 2 \cos t + \cos^2 t dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} 1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$$

$$= a^2 \left(t - 2 \sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = a^2 \left(\frac{3}{2} \cdot 2\pi \right) = 3\pi a^2$$



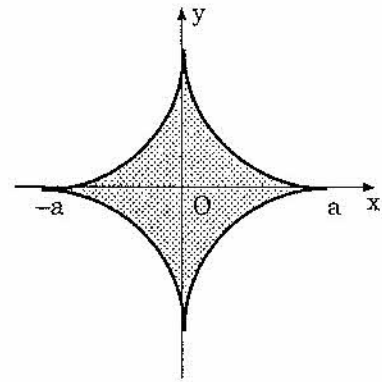
$$26. x = a \cos^3 t, \quad x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$A = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t) dt$$

$$= 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^4 t dt$$

$$= 12a^2 \int_0^{\pi/2} (\cos t \sin t)^2 \sin^2 t dt$$

$$= 12a^2 \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2t}{8} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2t \cos 2t}{8} dt \right] = \frac{3}{8} \pi a^2 \quad \text{br}^2$$



$$27. x = 5 \cos t \quad x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$y = 4 \sin^3 t \quad x = 5 \Rightarrow t = 0$$

$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 4 |\sin^3 t| \cdot (-5 \sin t) dt = 20 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)^2 dt$$

$$= 20 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2 \cos 2t + \cos^2 2t) dt = 20 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} dt$$

$$= 20 \left(t - \sin 2t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} \right) \Big|_0^{\pi/2} = 20 \left(\frac{3\pi}{4} \right) = 15\pi \quad \text{br}^2$$

YAY UZUNLUĞU HESABI

1. $y = f(x)$ eğrisinin $x = a$ ve $x = b$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğu

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

dir.

2. $r = r(\varphi)$ eğrisinin $\varphi = \alpha$ ve $\varphi = \beta$ doğruları arasında kalan parçasının uzunluğu

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

olur.

3. Denklemi $x = x(t)$, $y = y(t)$ biçiminde parametrik olarak verilen eğrinin $t = t_1$ ve $t = t_2$ parametrelerine karşılık gelen noktaları arasında kalan parçasının uzunluğu

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} dt$$

birimdir.

PROBELMLER

1. Aşağıdaki denklemleri verilen eğrilerin, karşılarında apsisleri yazılı noktalar arasında kalan parçalarının uzunluklarını hesaplayınız.

(a) $y = \frac{1}{3} (x^2 + 2)^{3/2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

(b) $y = x^{3/2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$

(c) $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 8$

(d) $y = \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{2} x^{1/2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$

2. $y = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1}$ eşitliği ile tanımlanan eğrinin, apsisi $x_1 = 1$ ve $x_2 = 3$ olan noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu bulunuz.

3. Parametre aralıkları karşılarında verilen aşağıdaki eğrilerin uzunluklarını hesaplayınız.

(a) $\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = t^3 \end{cases}, -1 \leq t \leq 1$

(d) $\begin{cases} x = 2(1 - \cos t) \\ y = 2 \sin t \end{cases}, [0, 2\pi]$

(b) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln(t + \sqrt{1+t^2}) \\ y = \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2} \end{cases}, 0 \leq t \leq 2$ (e) $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t^3 \end{cases}, [0, \sqrt{5}]$

(c) $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \alpha$

(f) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - 1 \\ y = \frac{4}{3}t^{3/2} \end{cases}, [0, 2]$

4. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ sikloid eğrisinin bir yayının uzunluğunu bulunuz.

5. Kutup açılarının değişim aralığı karşılarında yazılı olan, aşağıdaki eğrilerin uzunluklarını hesaplayınız.

(a) $r = 4 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$

(c) $r = \frac{3}{\cos \varphi}, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$

(b) $r = \sin^3 \frac{\varphi}{3}, 0 \leq \varphi \leq 3\pi$

6. $r = ae^{\varphi}$ logaritmik spiralinin $r = 2a$ çemberi içinde kalan parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER

1. a) $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $y' = \frac{1}{2}(x^2 + 2)^{1/2} 2x = x(x^2 + 2)^{1/2}$

$$\begin{aligned} \ell &= \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1 + x^2(x^2 + 2)} dx \\ &= \int_0^3 \sqrt{(x^2 + 1)^2} dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left. \frac{x^3}{3} + x \right|_0^3 = 12 \end{aligned}$$

b) $y = x^{3/2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$

$$\begin{aligned} \ell &= \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^5 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{1/2} dx = \frac{4}{9} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \Big|_0^5 \\ &= \frac{8}{27} \left(\left(\frac{49}{4}\right)^{3/2} - 1 \right) = \frac{8}{27} \left(\frac{343}{8} - 1 \right) = \frac{335}{27} \end{aligned}$$

c) $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 8$

$$y' = \frac{3}{2}(4 - x^{2/3})^{1/2} \left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right) = -\frac{(4 - x^{2/3})^{1/2}}{x^{1/3}}$$

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^8 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^8 \sqrt{\frac{x^{2/3} + (4 - x^{2/3})}{x^{2/3}}} dx = \int_0^8 \sqrt{4x^{-2/3}} dx \\ &= \int_0^8 2x^{-1/3} dx = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_0^8 = 3 \cdot 4 = 12 \end{aligned}$$

d) $y = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{1/2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $y' = x^{1/2} - \frac{1}{4}x^{-1/2}$

$$\begin{aligned} \ell &= \int_1^4 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(x^{1/2} - \frac{1}{4}x^{-1/2}\right)^2} dx \\ &= \int_1^4 \sqrt{1 + x - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x}} dx = \int_1^4 \left(\frac{8x + 16x^2 + 1}{16x}\right)^{1/2} dx \\ &= \int_1^4 \frac{4x + 1}{4\sqrt{x}} dx \quad [x = u^2, dx = 2u du] \\ &= \int_1^2 \frac{4u^2 + 1}{4u} 2u du = \frac{1}{2} \int_1^2 (4u^2 + 1) du = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}u^3 + u \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{32}{3} + 2 - \frac{4}{3} - 1 \right) = \frac{31}{6} \end{aligned}$$

2. $y = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt$, $x_1 = 1$ ve $x_2 = 3$, $y' = \sqrt{x^2 - 1}$

$$\ell = \int_1^3 \sqrt{1 + (y')^2} dt = \int_1^3 \sqrt{1 + t^2 - 1} dt = \int_1^3 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_1^3 = 4$$

3. a) $x = 2t^2$, $y = t^3$, $-1 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} \ell &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{16t^2 + 9t^4} dt = \int_{-1}^1 |t| \sqrt{16 + 9t^2} dt \\ &= \frac{2}{18} \frac{2}{3} (16 + 9t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{122}{27} \end{aligned}$$

b) $x = \frac{1}{2} t \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1+t^2})$, $0 \leq t \leq 2$

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2}$$

$$x' = \frac{1}{2} \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1 + \sqrt{1+t^2}} = \sqrt{1+t^2}$$

$$y' = \sqrt{2} t^{1/2}$$

$$(x')^2 + (y')^2 = (1+t^2 + 2t) = (1+t)^2 \Rightarrow \ell = \int_0^2 (1+t) dt = 4$$

c) $x = R \cos t$

$$y = R \sin t \quad 0 \leq t \leq \alpha$$

$$\ell = \int_0^\alpha \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \int_0^\alpha \sqrt{R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = R\alpha$$

d) $x = 2(1 - \cos t)$

$$y = 2 \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} dt = 4\pi$$

e) $x = 3t^2 \quad 0 \leq t \leq \sqrt{5}$

$y = 3t^3$

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{\sqrt{5}} \left((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 \right)^{1/2} dt = \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{36t^2 + 81t^4} dt = \int_0^{\sqrt{5}} t \sqrt{36 + 81t^2} dt \\ &= \frac{1}{2.81} \cdot \frac{2}{3} (36 + 81t^2)^{3/2} \Big|_0^{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{3}}{81} \end{aligned}$$

f) $x = \frac{1}{2}t^2 - t, \quad y = \frac{4}{3}t^{3/2} \quad 0 \leq t \leq 2$

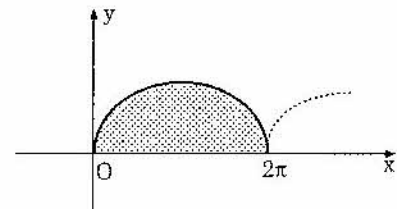
$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^2 \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} dt = \int_0^2 \sqrt{(t-1)^2 + 4t} dt = \int_0^2 \sqrt{t^2 + 2t + 1} dt \\ &= \int_0^2 (t+1) dt = \frac{1}{2}t^2 + t \Big|_0^2 = 4 \end{aligned}$$

4. $\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} dt = \int_0^{2\pi} \left((a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2 \right)^{1/2} dt$

$$= a \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)^{1/2} dt$$

$$= \sqrt{2} a \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{1/2} dt$$

$$= \sqrt{2} a \int_0^{2\pi} \left(2 \sin^2 \frac{t}{2} \right)^{1/2} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 2a \left(-\cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 8a$$



5. a) $r = 4 \cos \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi = \int_0^{\pi} (16 \cos^2 \varphi + 16 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi = 4\pi$$

b) $r = \sin^3 \frac{\varphi}{3} \quad 0 \leq \varphi \leq 3\pi$

$$r' = 3 \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cdot \cos \frac{\varphi}{3} \cdot \frac{1}{3} = \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cdot \cos \frac{\varphi}{3}$$

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_0^{3\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2} \, d\varphi = \int_0^{3\pi} \sqrt{\sin^6 \frac{\varphi}{3} + \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{3}} \, d\varphi \\
&= \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{3} \left(\sin^2 \frac{\varphi}{3} + \cos^2 \frac{\varphi}{3} \right)^{1/2} d\varphi = \int_0^{3\pi} \frac{1 - \cos \frac{2\varphi}{3}}{2} d\varphi \\
&= \frac{1}{2} \left[\varphi - \sin \frac{2\varphi}{3} \cdot \frac{3}{2} \right]_0^{3\pi} = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$c) \quad r = \frac{3}{\cos \varphi} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{r^2 + (r')^2} \, d\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\frac{9}{\cos^2 \varphi} + \frac{9 \sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi}} \, d\varphi \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{3}{\cos^2 \varphi} \, d\varphi = 3 \cdot \tan \varphi \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 3 \cdot (1 - (-1)) = 6
\end{aligned}$$

$$6. \quad a e^\varphi = 2a \Rightarrow e^\varphi = 2 \Rightarrow \vartheta = \ln 2$$

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^{\ln 2} \left(r^2 + (r')^2 \right)^{1/2} d\varphi = \int_0^{\ln 2} (a^2 e^{2\varphi} + a^2 e^{2\varphi})^{1/2} d\varphi \\
&= \int_0^{\ln 2} \sqrt{2} a e^\varphi \, d\varphi = \sqrt{2} a (2 - 1) = \sqrt{2} a
\end{aligned}$$

HACİM HESABI

1. **Kesit Yöntemi** : Bir doğruya t noktasında dik olan düzlemin cisimle arakesitinin alanı $A(t)$ ise tüm cismin hacmi

$$V = \int_a^b A(t) \, dt$$

olur.

2. **Disk Yöntemi :** $y = f(x)$ eğrisi, x - eksenini ve $x = a$, $x = b$ doğruları arasında kalan bölgenin, x - eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

olur.

3. **Kabuk (Silindirik Tabakalar) Yöntemi :** $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin y - eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi

$$V = 2\pi \int_a^b |x [f(x) - g(x)]| dx$$

dir.

PROBLEMLER

1. Bir düzgün piramidin yüksekliği 100 cm dir. Bu piramidin tabanı, bir kenarının uzunluğu 100 cm olan bir karedir. Bu piramidin her cm^3 ünün ağırlığı 3 gr olduğuna göre bu piramidin ağırlığı kaç kg dir?
2. Bir cisim xOy - düzlemi tarafından $x^2 + y^2 = a^2$ dairesi boyunca kesilmektedir. Bu cismin Ox - eksenine dik düzlemlerle elde edilen kesitleri, bir kenarı bu düzlemlerin daire üzerinde ayırdığı kirişlere eşit olan eşkenar üçgenlerdir. Cismin hacmini bulunuz.
3. Bir cismin tabanı $x^2 + y^2 \leq 1$ dairesidir. Bu cismin Ox - eksenine dik düzlemlerle arakesiti karelerdir. Cismin hacmini bulunuz.
4. R yarıçaplı kürenin hacmini kesitlerden yararlanarak hesaplayınız.
5. Bir cismin tabanı eksen uzunlukları 10 cm ve 8 cm olan bir elipstir. Cismin büyük eksene dik düzlemlerle arakesiti yüksekliği 6 cm olan birer ikizkenar üçgendir. Bu cismin hacmini bulunuz.

6. Aşağıdaki eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgelerin Ox - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

(a) $y = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$

(e) $y = 3x - x^2$, $y = x$

(b) $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

(f) $y^2 = 2px$, $x = h$

(c) $y = x^3$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

(g) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$

(ç) $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 1$

(h) $(y - a)^2 = ax$, $x = 0$, $y = 0$

(d) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = x$, $y = 0$

(ı) $y = x^2 + 2$, $y = -x^2 + 10$

7. Aşağıdaki eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgelerin Oy - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

(a) $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$

(c) $y = a - \frac{x^2}{a}$, $x + y = a$

(b) $y = x^2$, $x = 0$, $y = 4$

(d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

8. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin karşılarında yazılı doğrular etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

(a) $y = x + x^2$, $y = x^2 - 1$, $x = 0$

eksen $y = 1$

(b) $y = x^3$, $y = -1$, $x = 1$

eksen $y = 2$

(c) $y = 4x - x^2$, $y = 0$

eksen $y = 4$

(d) $y = 1 - x^2$, $y = -3$

eksen $y = -3$

(e) $2x = 4 - y^2$, $2x = y^2 - 4$

eksen $y = -3$

(f) $x = y^2$, $x = 2 - y^2$

eksen $x = -1$

9. $y = x^2 + 1$ eğrisi ile bu eğriye $x = 1$ apsisli noktasından çizilen teğet ve $x = 0$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin (a) Ox - eksenini (b) Oy - eksenini, etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

10. $y = \sin x$, $y = \cos x$ eğrileri, $x = 0$ ve $x = \frac{\pi}{4}$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin Ox - eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

11. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ astroid eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin Ox- eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen cismin hacmini bulunuz.
12. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ sikloidinin bir yayı ile Ox- eksenini tarafından sınırlanan bölgenin Ox- eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini bulunuz.
13. Aşağıda eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgenin Oy- eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel cisimlerin hacimlerini kabuk metodu ile hesaplayınız.
- (a) $y = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ (d) $xy = 2$, $xy = 4$, $x = 1$, $x = 2$
- (b) $y = 4x - x^2$, $y = 0$ (e) $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$
- (c) $y = -x + 6$, $xy = 5$
14. $y = \sin x$, $y = \cos x$ eğrileri ile $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin ve Oy eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen cisimlerin hacimlerini bulunuz.
15. $r = a(1 + \cos \phi)$ kardioidinin kutupsal eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

ÇÖZÜMLER

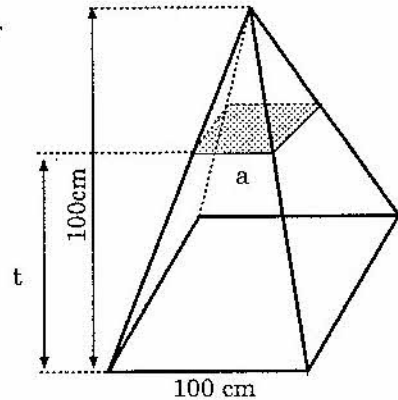
1. a : Kesit aralığında oluşan karenin bir kenarı

$$\frac{100-t}{100} = \frac{a}{100} \Rightarrow a = (100 - t)$$

olur.

$$\text{Kesit alanı } A(t) = (100-t)^2,$$

$$V = \int_0^{100} A(t) dt = \int_0^{100} (100-t)^2 dt$$



$$= -\frac{(100-t)^3}{3} \Big|_0^{100} = \frac{100^3}{3} \text{ cm}^3$$

3 gr = 3×10^{-3} kg ve 1 cm^3 ünün ağırlığı 3×10^{-3} kg ise piramidin ağırlığı

$$\frac{(100)^3}{3} \cdot 3 \times 10^{-3} = 1000 \text{ kg}$$

2. Çemberin merkezine t kadar uzaklıktaki eş-kenar üçgenin kenar uzunluğuna s dersek

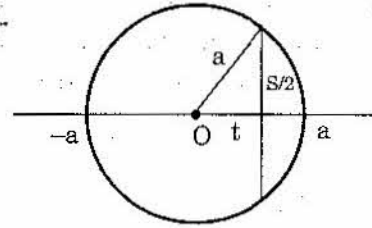
$$t^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow s^2 = 4a^2 - 4t^2$$

Kesitin alanı $A(t) = \frac{s^2\sqrt{3}}{4}$ olacağından

$$V = \int_{-a}^a A(t) dt = \int_{-a}^a \frac{s^2\sqrt{3}}{4} dt$$

$$= \sqrt{3} \int_{-a}^a (a^2 - t^2) dt$$

$$= \sqrt{3} \left(a^2 t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{-a}^a = \sqrt{3} \left(a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = 4 \frac{\sqrt{3}}{3} a^3 \text{ br}^3$$



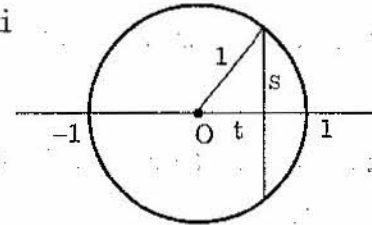
3. Çemberin merkezine t kadar uzaklıktaki karenin kenar uzunluğuna s dersek

$$t^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow s^2 = 4 - 4t^2$$

$$A(t) = s^2 = 4 - 4t^2$$

$$V = \int_{-1}^1 A(t) dt = \int_{-1}^1 (4 - 4t^2) dt$$

$$= 4 \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{16}{3} \text{ br}^3$$

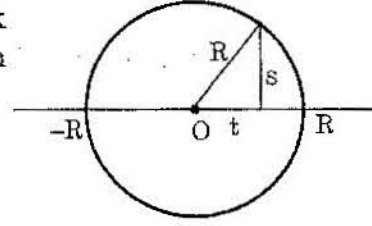


4. Yarım kürenin tabanı bir çember ve dik kesitlerle yarım çember oluşur. Bu çemberin yarıçapına s dersek,

$$t^2 + (s)^2 = R^2 \Rightarrow s^2 = R^2 - t^2$$

$$\text{Yarım çemberin alanı } \frac{\pi s^2}{2} = \frac{\pi}{2} (R^2 - t^2)$$

$$V = 2 \cdot \int_{-R}^R \frac{\pi}{2} (R^2 - t^2) dt = \pi \left(R^2 t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \pi \left(\frac{4}{3} R^3 \right) = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ br}^3$$



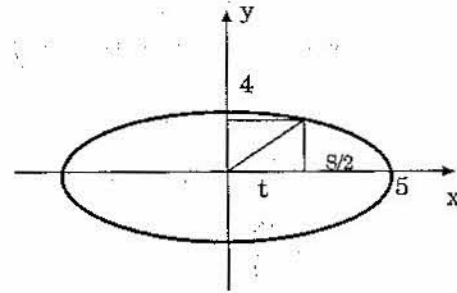
5. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow x = t$ ve $h = 6$ ise

$$y = 4 \sqrt{1 - \frac{t^2}{25}} = \frac{s}{2}$$

$$A(t) = \frac{h \cdot s}{2} = 24 \sqrt{1 - \frac{t^2}{25}}$$

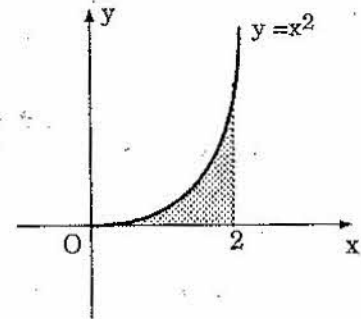
$$V = \int_{-5}^5 24 \sqrt{1 - \frac{t^2}{25}} dt = 24 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cdot 5 \cos \varphi d\varphi$$

$$= 120 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\varphi + 1}{2} d\varphi = 60 \left(\frac{\sin 2\varphi}{2} + \varphi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 60\pi \text{ cm}^3$$



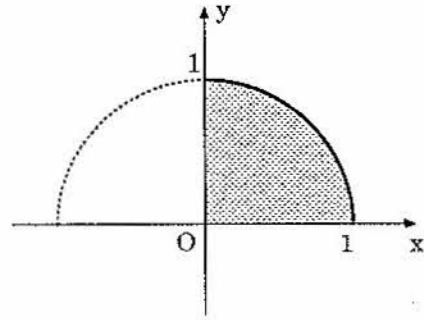
6. a) $V = \pi \int_0^2 f^2(x) dx = \pi \int_0^2 x^4 dx$

$$= \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5} \text{ br}^3$$



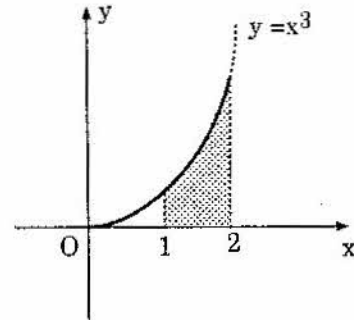
b) $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 (1 - x^2)^2 dx \\
 &= \pi \int_0^1 (1 - 2x^2 + x^4) dx \\
 &= \pi \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 \\
 &= \pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{8\pi}{15} br^3
 \end{aligned}$$



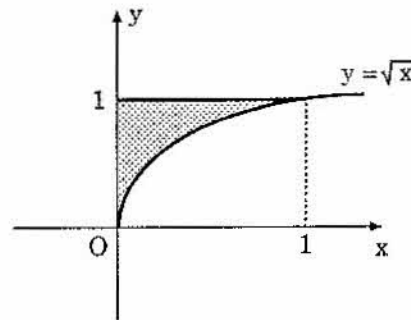
c) $y = x^3$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_1^2 f^2(x) dx = \pi \int_1^2 x^6 dx \\
 &= \pi \frac{x^7}{7} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{7} (2^7 - 1) \\
 &= \frac{127}{7} \pi br^3
 \end{aligned}$$



ç) $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 1$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 \left[1 - (\sqrt{x})^2 \right] dx = \pi \int_0^1 (1 - x) dx \\
 &= \pi \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} br^3
 \end{aligned}$$

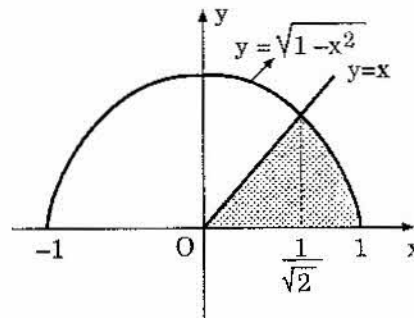


d) $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = x$, $y = 0$

$$y = y \Rightarrow x = \sqrt{1-x^2}$$

$$x^2 = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1, x^2 = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$V = \pi \int_0^{1/\sqrt{2}} (x)^2 dx + \pi \int_{1/\sqrt{2}}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx$$

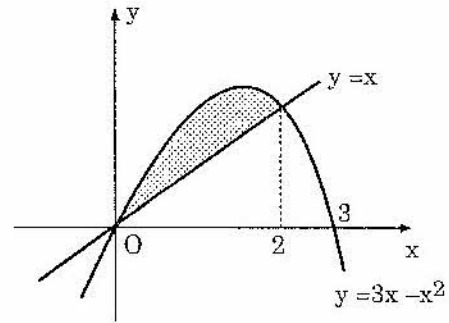


$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{3} x^3 \Big|_0^{1/\sqrt{2}} + \pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{1/\sqrt{2}}^1 \\
&= \frac{\pi}{6\sqrt{2}} + \pi \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{2\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3\sqrt{2}} + \frac{2\pi}{3} \\
&= \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{3} (2 - \sqrt{2}) \text{ br}^3
\end{aligned}$$

e) $y = 3x - x^2$, $y = x$
 $y = y \Rightarrow x = 3x - x^2$
 $x^2 = 2x$
 $\Rightarrow x = 0 \text{ ve } x = 2$

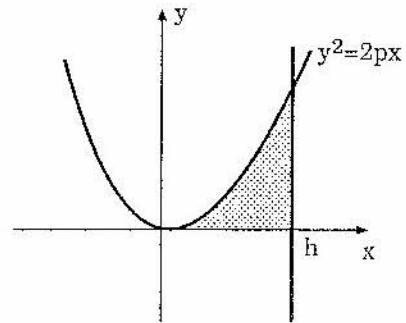
$$V = \pi \int_0^2 [(3x - x^2)^2 - x^2] dx$$

$$= \pi \int_0^2 [9x^2 - 6x^3 + x^4] dx = \pi \left(\frac{64}{3} - 24 + \frac{32}{5} \right) = \frac{56\pi}{15} \text{ br}^3$$



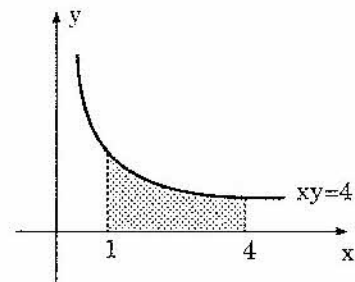
f) $y^2 = 2px$, $x = h$, $y = 0$

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^h f^2(x) dx = \pi \int_0^h 2px dx \\
&= \pi px^2 \Big|_0^h = \pi p h^2 \text{ br}^3
\end{aligned}$$



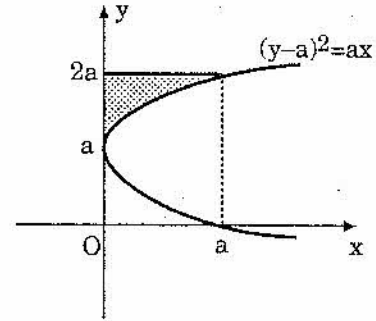
g) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$

$$\begin{aligned}
v &= \pi \int_1^4 \frac{16}{x^2} dx = \pi 16 \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^4 \\
&= 16\pi \left(-\frac{1}{4} + 1 \right) = 12\pi \text{ br}^3
\end{aligned}$$



h) $(y-a)^2 = ax$, $x=0$, $y=2a$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^a (f^2(x) - g^2(x)) dx \\
 &= \pi \int_0^a \left(4a^2 - (a + \sqrt{ax})^2 \right) dx \\
 &= \pi \left(\int_0^a 3a^2 - 2a^{3/2} x^{1/2} - ax \right) dx \\
 &= \pi \left(3a^2 x - \frac{4}{3} a^{3/2} x^{3/2} - a \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a = \pi \left(3a^3 - \frac{4}{3} a^3 - \frac{a^3}{2} \right) = \frac{7\pi}{6} a^3 \text{ br}^3
 \end{aligned}$$

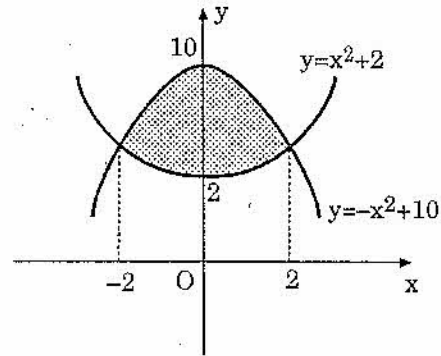


1) $y = x^2 + 2$, $y = -x^2 + 10$

$$x^2 + 2 = -x^2 + 10$$

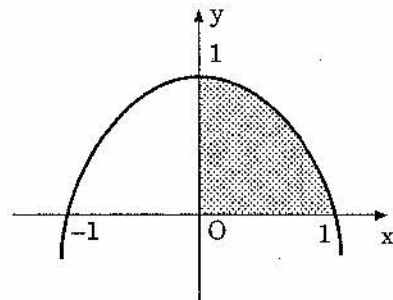
$$2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-2}^2 [f^2(x) - g^2(x)] dx \\
 &= \pi \int_{-2}^2 \left[(-x^2 + 10)^2 - (x^2 + 2)^2 \right] dx \\
 &= \pi \int_{-2}^2 (x^4 - 20x^2 + 100 - x^4 - 4x^2 - 4) dx \\
 &= \pi \int_{-2}^2 (-24x^2 + 96) dx = \pi \left(-8x^3 + 96x \right) \Big|_{-2}^2 = 256\pi \text{ br}^3
 \end{aligned}$$



7. a) $y = 1 - x^2$, $x=0$, $x=1$, $y=0$

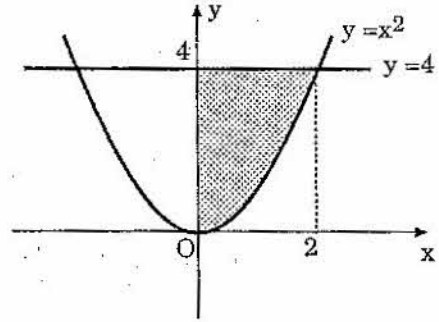
$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 g^2(y) dy = \pi \int_0^1 (\sqrt{1-y})^2 dy \\
 &= \pi \left(y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \text{ br}^3
 \end{aligned}$$



b) $y = x^2$, $x = 0$, $y = 4$

$$V = \pi \int_0^4 g^2(y) dy = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 dy$$

$$= \pi \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^4 \right) = 8\pi \text{ br}^3$$



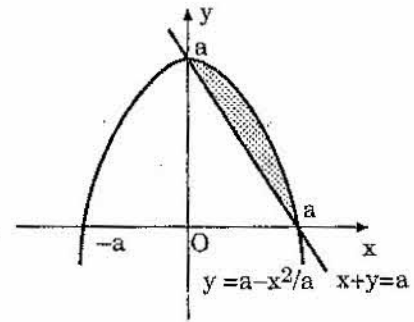
c) $y = a - \frac{x^2}{a}$, $x + y = a$

$$V = \pi \int_0^a \left[\left(\sqrt{a^2 - ay} \right)^2 - (y - a)^2 \right] dy$$

$$= \pi \int_0^a [a^2 - ay - y^2 + 2ay - a^2] dy$$

$$= \pi \int_0^a ay - y^2 dy = \pi \left(a \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \Big|_0^a \right)$$

$$= \pi \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right) = \pi \frac{a^3}{6} \text{ br}^3$$

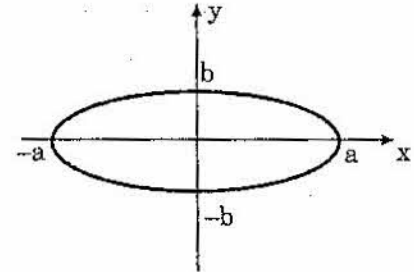


d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$V = \pi \int_{-b}^b g^2(y) dy = \pi \int_{-b}^b \left(a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2 \right) dy$$

$$= \pi \left(a^2 y - \frac{a^2}{b^2} \frac{y^3}{3} \Big|_{-b}^b \right)$$

$$= \pi \left(a^2 b - \frac{a^2 b}{3} + a^2 b - \frac{a^2 b}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$



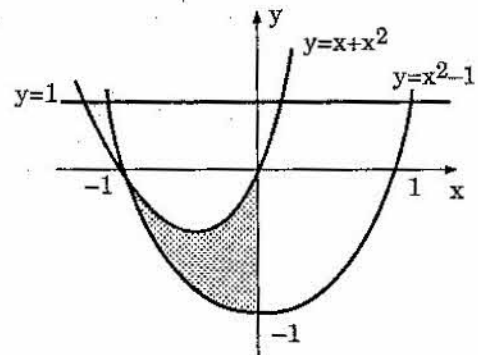
8. a) $y = x + x^2$, $y = x^2 - 1$, $x = 0$ eksen $y = 1$

$$x + x^2 = x^2 - 1 \Rightarrow x = -1$$

$$V = \pi \int_{-1}^0 |x^2 - 1 - 1|^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^0 |x + x^2 - 1|^2 dx$$

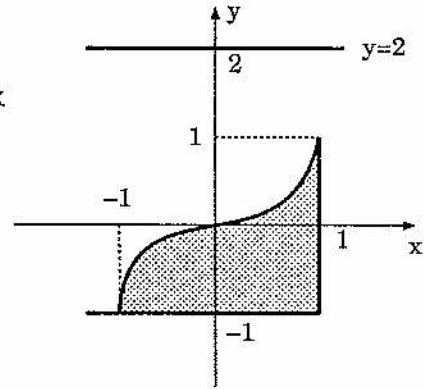
$$= \pi \int_{-1}^0 (4 - 4x^2 + x^4) dx$$



$$\begin{aligned}
& -\pi \int_{-1}^0 (1 - 2(x + x^2) + (x + x^2)^2) dx \\
& = \pi \left(4x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^0 \right) - \pi \left(x - x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^0 \right) \\
& = \pi \left(4 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5} \right) - \pi \left(1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{2} \pi \text{ br}^3
\end{aligned}$$

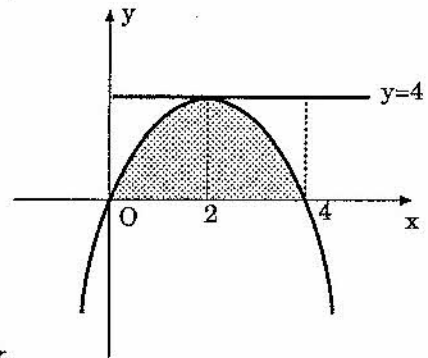
b) $y = x^3$, $y = -1$, $x = 1$ $y = 2$ eksen

$$\begin{aligned}
V & = \pi \int_{-1}^1 |-1 - 2|^2 dx - \pi \int_{-1}^1 (x^3 - 2)^2 dx \\
& = 18\pi - \pi \int_{-1}^1 (x^6 - 4x^3 + 4) dx \\
& = 18\pi - \pi \left(\frac{x^7}{7} - x^4 + 4x \Big|_{-1}^1 \right) \\
& = 18\pi - \pi \left(\frac{58}{7} \right) = \frac{68}{7} \pi \text{ br}^3
\end{aligned}$$



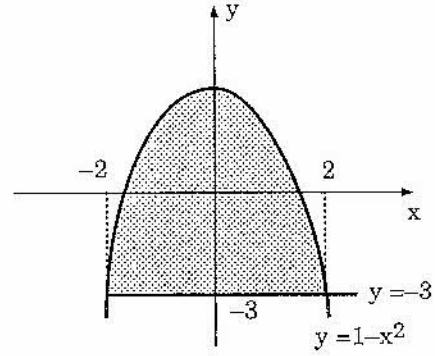
c) $y = 4x - x^2$, $y = 0$ eksen $y = 4$

$$\begin{aligned}
V & = \pi \int_0^4 [4^2 - (4 - 4x + x^2)^2] dx \\
& = 64\pi - 2\pi \int_0^2 (x - 2)^4 dx \\
& = 64\pi - 2\pi \left(\frac{(x - 2)^5}{5} \Big|_0^2 \right) \\
& = 64\pi - 2\pi \left(\frac{32}{5} \right) = 64\pi - \frac{64\pi}{5} = \frac{256\pi}{5}
\end{aligned}$$



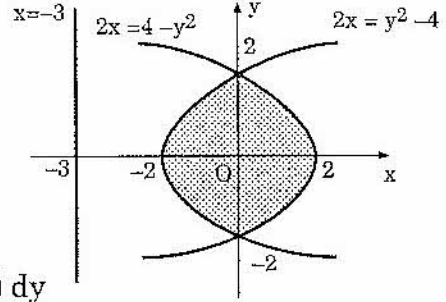
d) $y = 1 - x^2$, $y = -3$ eksen $y = -3$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-2}^2 \left| 1 - x^2 - (-3) \right|^2 dx \\
 &= \pi \int_{-2}^2 (4 - x^2)^2 dx \\
 &= \pi \int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx \\
 &= \pi \left(16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-2}^2 \\
 &= 2\pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) = \frac{512}{15} \pi \text{ br}^3
 \end{aligned}$$



e) $2x = 4 - y^2$, $2x = y^2 - 4$ eksen $x = -3$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-2}^2 \left| \frac{4 - y^2}{2} - (-3) \right|^2 dy \\
 &\quad - \pi \int_{-2}^2 \left| \frac{y^2 - 4}{2} - (-3) \right|^2 dy \\
 &= \frac{\pi}{4} \int_{-2}^2 (100 - 20y^2 + y^4) dy - \frac{\pi}{4} \int_{-2}^2 (y^4 + 4y^2 + 4) dy \\
 &= \frac{\pi}{4} \int_{-2}^2 (96 - 24y^2) dy = \frac{\pi}{4} \left(96y - 8y^3 \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{\pi}{2} (192 - 64) = 64\pi \text{ br}^3
 \end{aligned}$$



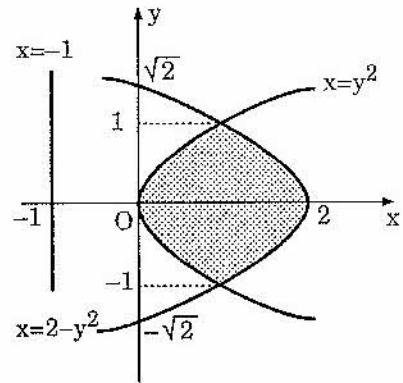
f) $x = y^2$, $x = 2 - y^2$, $x = -1$ eksen

$$x = x \Rightarrow y^2 = 2 - y^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 1$$

$$\Rightarrow y = \pm 1$$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-1}^1 (2 - y^2 - (-1)^2) dy \\
 &\quad - \pi \int_{-1}^1 (y^2 - (-1))^2 dy
 \end{aligned}$$



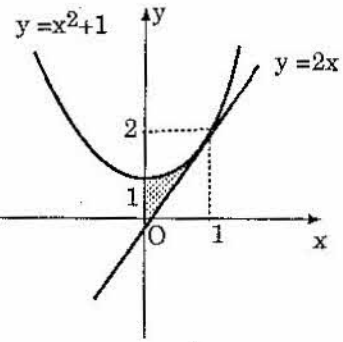
$$\begin{aligned}
 &= \pi \int_{-1}^1 (9 - 6y^2 + y^4) dy - \pi \int_{-1}^1 (y^4 + 2y^2 + 1) dy \\
 &= \pi \int_{-1}^1 (8 - 8y^2) dy = 8\pi y - \frac{8y^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{32\pi}{3} \text{ br}^3
 \end{aligned}$$

9. $y = x^2 + 1$, $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2$

$$y' = 2x \Big|_{x=1} = 2 \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = 2(x - 1)$$

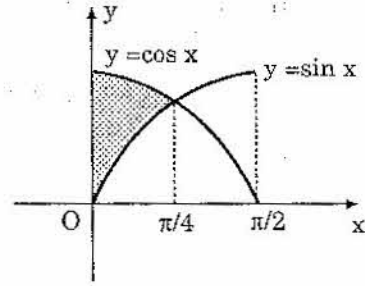
$$y = 2x \text{ (teğet denklemi)}$$



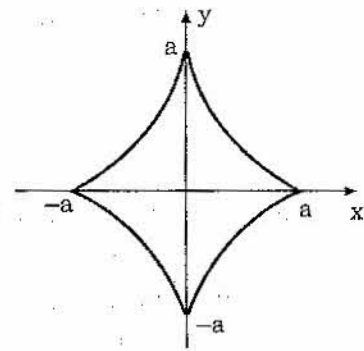
$$\begin{aligned}
 \text{a) } V &= \pi \int_0^1 (f^2(x) - g^2(x)) dx \\
 &= \pi \int_0^1 ((x^2 + 1)^2 - (2x)^2) dx \\
 &= \pi \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2) dx \\
 &= \pi \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx \\
 &= \pi \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{2}{3} x^3 + x \right]_0^1 = \frac{8\pi}{15} \text{ br}^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } V &= \pi \int_0^1 \left(\frac{y}{2} \right)^2 dy + \pi \int_1^2 \left[\left(\frac{y}{2} \right)^2 - (y-1) \right] dy \\
 &= \pi \frac{y^3}{12} \Big|_0^1 + \pi \left[\frac{y^3}{12} - \frac{(y-1)^2}{2} \right] \Big|_1^2 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \text{ br}^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \\
 &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{\pi}{2} \text{ br}^3
 \end{aligned}$$



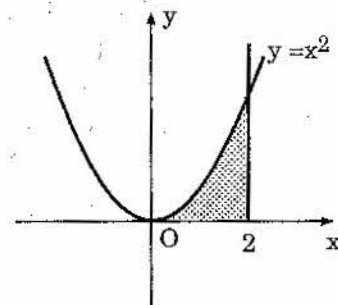
$$\begin{aligned}
 11. \quad V &= \pi \int_{-a}^a (a^{2/3} - x^{2/3})^3 dx \quad [x = a \cos^3 \theta] \\
 &= \pi \int_0^{\pi} a^2 (1 - \cos^2 \theta)^3 a \cdot 3 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\
 &= 3\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta)^3 \cos^2 \theta d\theta \\
 &= 3\pi a^3 \int_{-1}^1 (1 - u^2)^3 u^2 du \\
 &= 3\pi a^3 \left[\frac{u^3}{3} - \frac{3}{5} u^5 + \frac{3}{7} u^7 - \frac{u^9}{9} \right]_{-1}^1 = \frac{32\pi a^3}{105} \text{ br}^3
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 12. \quad V &= \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} [a(1 - \cos t)]^2 a(1 - \cos t) dt \\
 &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 (1 - \cos t) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)^6 dt = 5\pi^2 a^3 \text{ br}^3
 \end{aligned}$$

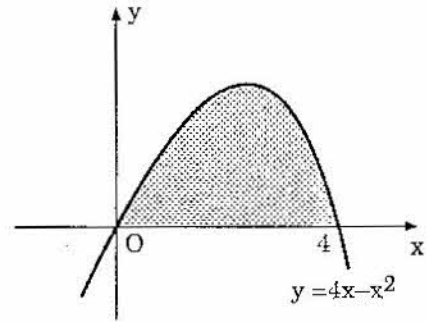
$$13. \quad a) \quad y = x^2, \quad x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0$$

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx \\
 &= 2\pi \int_0^2 x \cdot x^2 dx = \frac{\pi}{2} x^4 \Big|_0^2 = 8\pi \text{ br}^3
 \end{aligned}$$



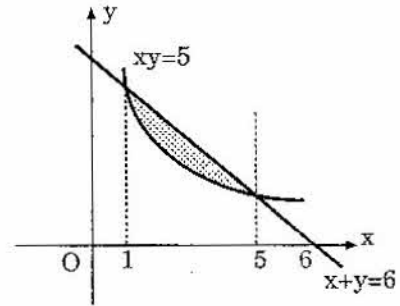
b) $y = 4x - x^2$ $y = 0$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx \\ &= 2\pi \int_0^4 x (4x - x^2) dx \\ &= 2\pi \left(4 \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^4 \\ &= \frac{128}{3} \pi \text{ br}^3 \end{aligned}$$



c) $y = -x + 6$, $xy = 5$

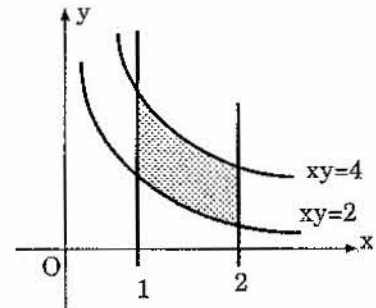
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^5 x |f(x) - g(x)| dx \\ &= 2\pi \int_1^5 x \left(-x + 6 - \frac{5}{x} \right) dx \\ &= 2\pi \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5) dx \\ &= 2\pi \left(-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right) \Big|_1^5 = \frac{64\pi}{3} \text{ br}^3 \end{aligned}$$



($y = y \Rightarrow \frac{5}{x} = -x + 6$, $5 = -x^2 + 6x \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$, $x = 1$ ve $x = 5$)

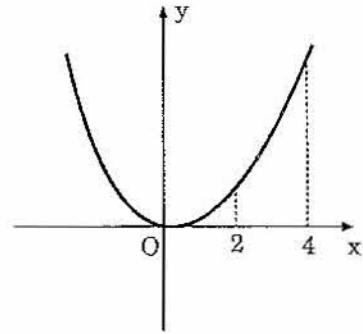
d) $xy = 2$, $xy = 4$ $x = 1$ $x = 2$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^2 x |f(x) - g(x)| dx \\ &= 2\pi \int_1^2 x \left(\frac{4}{x} - \frac{2}{x} \right) dx \\ &= 4\pi (2 - 1) = 4\pi \text{ br}^3 \end{aligned}$$



e) $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx \\ &= 2\pi \int_2^4 x \cdot \frac{1}{4} x^2 dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{x^4}{4} \Big|_2^4 \right) = 30\pi \text{ br}^3 \end{aligned}$$



14. $V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} x |\cos x - \sin x| dx$

$$+ 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x |\sin x - \cos x| dx$$

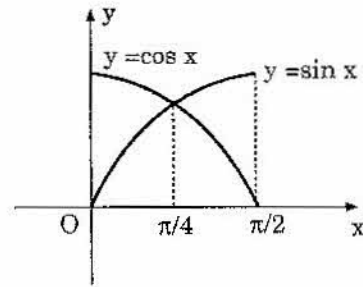
$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos x dx - 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x dx$$

$$+ 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx - 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

$$= 2\pi \left(x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx \right) - 2\pi \left(x(-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx \right)$$

$$+ 2\pi \left(x \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \right) - 2\pi \left(x(-\cos x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \right)$$

$$= \pi^2 (\sqrt{2} - 1)$$



15. $V = \pi \int_a^b y^2 dx$

$$x = r \cos \theta = a(1 + \cos \theta) \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta = a(1 + \cos \theta) \sin \theta$$

$$dx = [a (-\sin\theta) (\cos\theta) - a \sin\theta (1+\cos\theta)] d\theta$$

$$= - a (\sin\theta + 2 \sin\theta \cos\theta) d\theta = - a \sin \theta (1 + 2\cos\theta) d\theta$$

$$V = \pi \int_0^{\pi} y^2 dx = \pi \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos\theta)^2 \sin^2\theta [-a \sin\theta (1 + 2\cos\theta)] d\theta$$

$$= - a^3 \pi \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)^2 (1 + 2 \cos\theta) \sin^3\theta d\theta$$

$$= - a^3 \pi \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)^2 (1 + 2 \cos\theta) (1 - \cos^2 \theta) \sin\theta d\theta$$

$\cos\theta = u$ değişken değiştirilmesi yapılırsa

$$V = a^3 \pi \int_1^{-1} (1 + u)^2 (1 + 2u) (1 - u^2) du$$

$$= a^3 \pi \int_1^{-1} (-2u^5 - 5u^4 - 2u^3 + 4u^2 + 4u + 1) du$$

eşitliği elde edilir. Tek fonksiyonların simetrik aralıklardaki integralleri sıfır olduğundan

$$V = a^3 \pi \int_1^{-1} (-5u^4 + 4u^2 + 1) du = a^3 \pi \int_{-1}^1 (5u^4 - 4u^2 - 1) du$$

$$= 2a^3 \pi \int_0^1 (5u^4 - 4u^2 - 1) du = 2a^3 \pi \left(u^5 - \frac{4}{3} u^3 - u \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{3} \pi a^3$$

DÖNEL YÜZEYLERİN ALANI

1. $y = f(x)$ eğrisinin $x = a$ ve $x = b$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının x - eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

dir.

2. Eğri denkleminin $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ biçiminde verilmesi durumunda

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |r \cos \varphi| \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

olur.

PROBLEMLER

1. Aşağıda denklemleri verilen eğri parçalarının Ox - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeylerin alanlarını bulunuz.

(a) $y = \frac{1}{3} (x^2 + 2)^{3/2}$, $0 \leq x \leq 3$

(b) $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$

(c) $y = 2\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 8$

(d) $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$

2. Aşağıda denklemleri verilen eğri parçalarının Oy - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

(a) $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq \sqrt{3}$

(b) $y = \ln x$, $1 \leq x \leq 2$

3. Orijin ile (h, r) noktasını birleştiren doğru parçasının Ox - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen koninin yanal alanını bulunuz.
4. Yarıçapı R olan bir kürenin yüzey alanını hesaplayınız.
5. $y = x^2$ parabolünün $O(0, 0)$ ve $A(\sqrt{2}, 2)$ noktaları arasındaki parçasının Oy - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.
6. $x^2 + y^2 = a^2$ çemberinin $[x_1, x_1 + h]$ aralığına karşılık gelen parçasının Ox - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen küre parçasının alanını bulunuz.
7. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ Astroid eğrisinin Ox - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.
8. $4x^2 + y^2 = 4$ elipsinin birinci bölgedeki parçasının Oy - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

9. Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = 2t^2 + 1 \\ y = 3t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

olan eğri parçasının Ox - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

10. Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$

olan astroid eğrisinin Oy - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen yüzeyin alanını bulunuz.

11. Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} \\ y = 4 - \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

olan eğrinin koordinat eksenleriyle kesim noktaları arasında kalan parçasının, Ox- eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen yüzeyin alanını bulunuz.

12. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ sikloid eğrisinin bir yayının

(a) Oy- eksenini

(b) en yüksek noktasına teğet olan doğru

etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

13. $r = 2a \cos \varphi$ eğrisi $\varphi = \frac{\pi}{2}$ doğrusu etrafında döndürüldüğünde meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

14. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ lemniskatının Ox- eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

ÇÖZÜMLER

1. a) $y = \frac{1}{3} (x^2 + 2)^{3/2} \quad 0 \leq x \leq 3$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} (x^2 + 2)^{1/2} \cdot 2x = (x^2 + 2)^{1/2} x$$

$$1 + (y')^2 = 1 + (x^2 + 2) x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$$

$$S = 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3} (x^2 + 2)^{3/2} \cdot (x^2 + 1) dx = \frac{99}{2} \pi \text{ br}^2$$

b) $y = x^3 \quad 0 \leq x \leq 1$

$$S = 2\pi \int_0^1 |y| \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = \frac{2\pi}{36} \int_1^{10} \sqrt{u} du$$

$$= \frac{2\pi}{36} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^{10} = \frac{\pi}{9.3} (10^{3/2} - 1) = \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1) \text{ br}^2$$

c) $y = 2\sqrt{x} \quad 0 \leq x \leq 8$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^8 |y| \sqrt{1+(y')^2} dx = 2\pi \int_0^8 2\sqrt{x} \sqrt{1+\frac{1}{x}} dx = 4\pi \int_0^8 \sqrt{x+1} dx \\ &= 4\pi \left. \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} \right|_0^8 = \frac{208}{3} \pi \text{ br}^2 \end{aligned}$$

d) $y = \sin x \quad 0 \leq x \leq \pi$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^\pi |y| \sqrt{1+(y')^2} dx = 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1+\cos^2 x} dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1+u^2} du = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+u^2} du \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} u \sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{1+u^2}) \right) \Big|_0^1 \\ &= 2\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \right) \text{ br}^2 \end{aligned}$$

2. a) $y = \frac{x^2}{2} \quad 0 \leq x \leq \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_c^d |x| \sqrt{1+(x')^2} dy = 2\pi \int_0^{3/2} \sqrt{2y} \sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{y}}\right)^2} dy \\ &= 2\pi \int_0^{3/2} \sqrt{2y+1} dy = \pi \cdot \frac{2}{3} (1+2y)^{3/2} \Big|_0^{3/2} = \frac{2\pi}{3} (8-1) = \frac{14\pi}{3} \text{ br}^2 \end{aligned}$$

b) $y = \ln x \quad 1 \leq x \leq 2$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_c^d |x| \sqrt{1+(x')^2} dy = 2\pi \int_0^{\ln 2} e^y \sqrt{1+e^{2y}} dy = 2\pi \int_1^2 \sqrt{1+u^2} du \\ &= 2\pi \left(u \sqrt{1+u^2} + \ln(u + \sqrt{1+u^2}) \right) \Big|_1^2 \\ &= 2\pi \left(2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}) - \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) \right) \\ &= 2\pi \left(2\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}} \right) \text{ br}^2 \end{aligned}$$

3. $(0, 0)$ ile (h, r) noktasından geçen doğru denklemi

$$\frac{y-r}{r} = \frac{x-h}{h} \Rightarrow hy - hr = xr - hr \Rightarrow x = \frac{h}{r} y$$

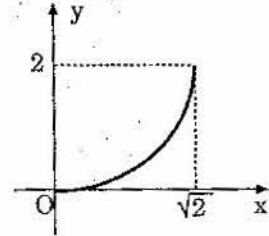
$$S = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} dx = 2\pi \frac{r}{h^2} \sqrt{r^2 + h^2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^h = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} \quad br^2$$

4. $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geq 0$ yarı çemberinin Ox etrafında döndürürsek küre elde ederiz.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-R}^R |y| \sqrt{1 + (y')^2} dy = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi R \int_{-R}^R dx = 4\pi R^2 \quad br^2 \end{aligned}$$

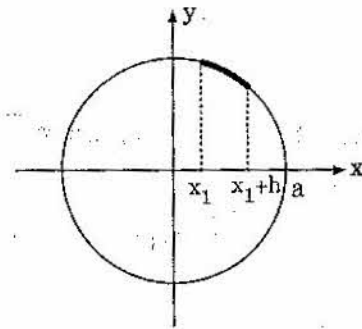
5. $y = x^2$, $0 \leq y \leq 2$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + (x')^2} dy = 2\pi \int_0^2 \sqrt{y} \sqrt{1 + \frac{1}{4y}} dy \\ &= \pi \int_0^2 \sqrt{1 + 4y} dy = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4y)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{9}{2} \pi \quad br^2 \end{aligned}$$

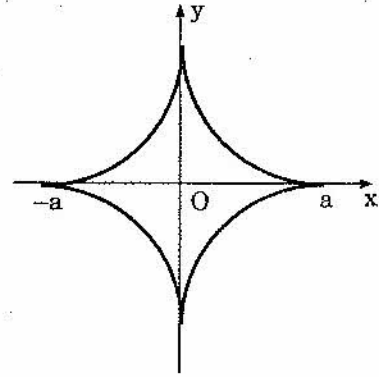


6. $S = 2\pi \int_{x_1}^{x_1+h} |y| \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad x_1 > 0$

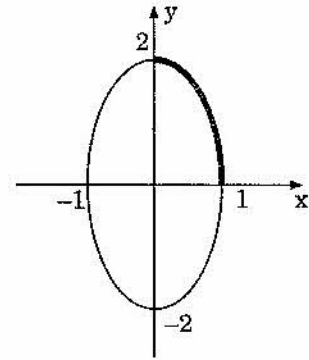
$$\begin{aligned} &= 2\pi \int_{x_1}^{x_1+h} \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi a \cdot (x_1 + h - x_1) = 2\pi a \cdot h \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 7. \quad S &= 2\pi \int_{-a}^a |y| \sqrt{1+(y')^2} dx \\
 &= 2\pi \cdot 2 \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \sqrt{1 + \frac{(a^{2/3} - x^{2/3})}{x^{2/3}}} dx \\
 &= 2\pi \cdot 2 \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \left(\frac{a}{x}\right)^{1/3} dx \\
 &= 2\pi (-2) \pi \frac{3}{2} a^{1/3} \frac{2}{5} (a^{2/3} - x^{2/3})^{5/2} \Big|_0^a \\
 &= 2 \cdot \frac{6\pi}{5} a^{1/3} (a^{5/3}) = \frac{12\pi}{5} a^2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 8. \quad S &= 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1+(x')^2} dy \quad x=0 \Rightarrow y=\pm 2 \\
 &= 2\pi \cdot \int_0^2 \frac{\sqrt{4-y^2}}{2} \sqrt{1 + \frac{y^2}{4(4-y^2)}} dy \\
 &= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^2 \sqrt{16-3y^2} dy \\
 &= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi/3} 4 \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cos t dt \\
 &= \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \cdot \int_0^{\pi/3} \frac{\cos 2t + 1}{2} dy \\
 &= \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sin 2t + 2t}{2} \Big|_0^{\pi/3} \right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = \pi \left(1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \right) br^2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 9. \quad S &= 2\pi \int_0^1 |y| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = 6\pi \int_0^1 t \sqrt{16t^2 + 9} dt \\
 &= \frac{6\pi}{32} \frac{2}{3} (16t^2 + 9)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} ((25)^{3/2} - 9^{3/2}) = \frac{\pi}{8} \cdot 98 = \frac{49}{4} \pi br^2
 \end{aligned}$$

$$10. \quad S = 2\pi \int_{-\pi}^0 a \sin^3 t \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= 6\pi a^2 \int_a^\pi |\sin^4 t \cos t| dt \\
&= 6\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t dt - 6\pi a^2 \int_{\pi/2}^\pi \sin^4 t \cos t dt \\
&= 6\pi a^2 \left(\frac{\sin^5 t}{5} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin^5 t}{5} \Big|_{\pi/2}^\pi \right) = 6\pi^2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right) = \frac{12}{5} \pi a^2 \text{ br}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11. S &= 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(4 - \frac{t^2}{2} \right) \sqrt{t^4 + t^2} dt = 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} 4t \sqrt{1+t^2} dt - \pi \int_0^{2\sqrt{2}} t^3 \sqrt{1+t^2} dt \\
&\quad [1+t^2 = u^2 \Rightarrow t dt = u du] \\
&= 8\pi \int_1^3 u^2 du - \pi \int_1^3 (u^4 - u^2) du = \frac{8\pi}{3} \left(u^3 \Big|_1^3 \right) - \pi \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \Big|_1^3 \right) \\
&= 29.6\pi \text{ br}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12. a) S &= 2\pi \int_0^\pi a(t - \sin t) \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\
&= 2\pi a^2 \sqrt{2} \int_0^\pi (t - \sin t) \sqrt{2} \cdot \sin \frac{t}{2} dt = 16\pi^2 a^2
\end{aligned}$$

$$b) (t = 0 \Rightarrow y = 0, t = \pi \Rightarrow y = 2a)$$

Sikloid eğrisinin en yüksek noktası $(x, y) = (\pi a, 2a)$ noktasıdır.

Bu noktadaki teğetin denklemi $y = 2a$ dır.

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_0^\pi |a(1 - \cos t) - 2a| \sqrt{a^2(2 - 2\cos t)} dt \\
&= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^\pi (1 + \cos t) \sqrt{1 - \cos t} dt \\
&= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^\pi \sqrt{2} \left(\sin \frac{t}{2} + \cos t \cdot \sin \frac{t}{2} \right) dt \\
&= 4\pi a^2 \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2} \cdot \sin \frac{t}{2} - \sin^3 \frac{t}{2} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi a^2 \left(-2 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^\pi - 2 \cos^3 \frac{t}{2} \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2} \right) \left(-\sin \frac{t}{2} \right) dt \right) \\
&= 4\pi a^2 \left[2 - 2(-1) + 2 \int_{-1}^0 (1 - u^2) du \right] \\
&= 4\pi a^2 \left(4 - 2 \left(u - \frac{u^3}{3} \Big|_{-1}^0 \right) \right) = 4\pi a^2 \left(4 - \frac{4}{3} \right) = \frac{32}{3} \pi a^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
13. \quad S &= 2\pi \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi/2} |r \cos u| \sqrt{4a^2 \cos^2 u + 4a^2 \sin^2 u} \, du \\
&= 16a^2 \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \, du = 16a^2 \pi \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2u}{2} \right) du \\
&= 8a^2 \pi \left[u + \frac{\sin 2u}{2} \right]_0^{\pi/2} = 4a^2 \pi^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
14. \quad S &= 2\pi \int_\alpha^\beta |r \sin u| \sqrt{r^2 + (r')^2} \, du \\
&= 2\pi \cdot 2 \int_0^{\pi/4} a \sqrt{\cos 2u} \cdot \sin u \sqrt{a^2 \cos 2u + \frac{a^2 \cdot \sin^2 2u}{\cos 2u}} \, du \\
&= 4\pi a^2 \cdot 2 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos 2u} \sin u \frac{1}{\sqrt{\cos 2u}} \, du = 4\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \sin u \, du \\
&= 4\pi a^2 \left(-\cos u \Big|_0^{\pi/4} \right) = 4\pi a^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2})
\end{aligned}$$

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. $y = \sqrt{|x|}$ eğrisiyle $x - 5y + 6 = 0$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

2. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını bulunuz.

(a) $y = 4(1 - x^2)$, $y = x^4 - 1$

(b) $y = x^4 - 4x^2 + 4$, $y = x^2$

(c) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

(d) $y = \frac{8}{x^2 + 4}$, $4y = x^2$

(e) $y = x + 1$, $y = \cos x$, $y = 0$

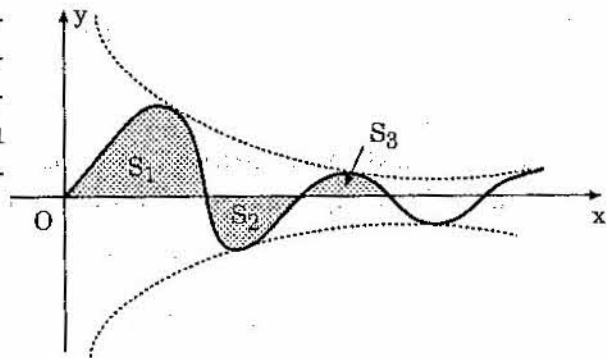
(f) $x = y^2 - 1$, $x = |y|\sqrt{1 - y^2}$

(g) $x = y^2(1 - y)$, $x = 0$, $y = 0$

3. $y^2 = (1 - x^2)^3$ eğrisi tarafından sınırlanan kapalı bölgenin alanını hesaplayınız.

4. $(y - 2)^2 = x^3$ eğrisinin iki kolu ile $x = 1$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

5. $y = e^{-x} \sin x$ eğrisiyle Ox - eksenini arasında kalan kapalı bölgelerin alanları $S_1, S_2, S_3, \dots$ olsun. (S_n) dizisinin, ortak oranı $e^{-\pi}$ olan bir geometrik dizi olduğunu gösteriniz.



6. $r = 12 \cos 3\phi$ gülünün içinde, $r = 6$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

7. Kutupsal koordinatlara geçerek $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2 y^2$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

8. Aşağıdaki eğri parçalarının uzunluklarını hesaplayınız.

(a) $y = \frac{2}{5}x^{5/4} - \frac{2}{3}x^{3/4}$, $1 \leq x \leq 16$

(b) $y = \int_0^x \sqrt{\sec^4 t - 1} dt$, $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

9. $y = \sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ eğri parçasının Ox- eksenini etrafında dönmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

10. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 \\ y = t \end{cases}$, $\sqrt{3} \leq t \leq 2\sqrt{2}$ eğri parçasının Ox- eksenini etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

11. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin Ox- eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cisimlerin hacimlerini bulunuz.

(a) $y = \sqrt{\cos x}$, $y = 1$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$

(b) $y = \sqrt{x}$, $x = 2$, $x = 0$, $y = 0$

(c) $y = x^2 + 1$, $y = -x + 3$

(d) $y = x^{3/2}$, $x = 1$, $y = 0$

(e) $y = \sqrt{x+1}$, $y = \sqrt{x-1}$, $x = 1$, $x = 3$

(f) $y = \cos x + \sin x$, $g(x) = \cos x - \sin x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$

12. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin Oy- eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cisimlerin hacimlerini hesaplayınız.

(a) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = x - 2$

(b) $y = \sin x$, $y = 1$, $x = 0$

(c) $y = \frac{4}{x^3}$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$

(d) $y = x^2 \sqrt{x^2 + 1}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$

(e) $y = |x - 2|$, $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + \frac{1}{2}$

(f) $x = \sqrt{1+y^3}$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$

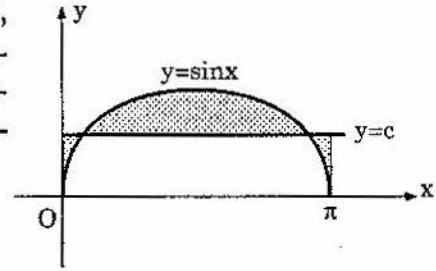
13. Birinci bölgede $x = y - y^3$ eğrisi ile $x = 1$, $y = 1$ ve $y = 0$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin aşağıdaki eksenler etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

(a) x - eksen (b) y - eksen (c) $x = 1$ (d) $y = 1$

14. $y^2 = \frac{2x^3 - x^4}{4}$ eğrisinin sınırladığı bölge x - eksen etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

15. $(y - x)^2 = x^3$ eğrisi ile $x = 1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge Ox - eksen etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

16. Yandaki şekilde, $y = \sin x$ eğrisi, $x=0$, $x = \pi$, $y = c$ doğruları tarafından sınırlanan taraflı bölge $y = c$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin hacminin minimum olması için c ne olmalıdır?



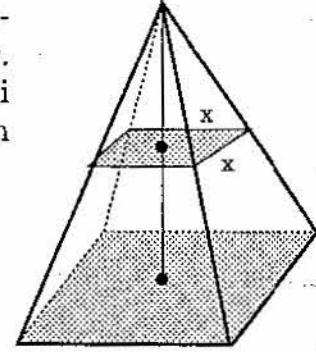
17. f , $[a, b]$ üzerinde pozitif tanımlı bir fonksiyon olsun. $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve Ox - eksen tarafından sınırlanan bölge, $c \leq a$ olmak üzere, $x = c$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

18. $y = x^4$ eksen, x - eksen ve $x = 1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge $x = -1$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

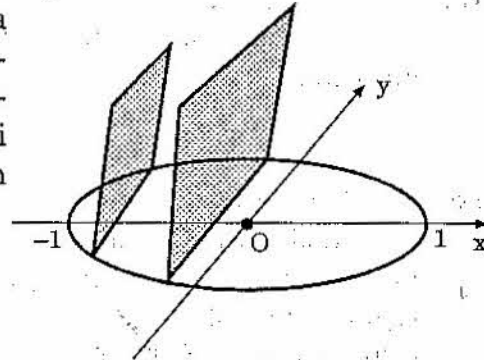
19. f ve g , $[a, b]$ üzerinde $g(x) \leq f(x)$ bağıntısını sağlayan iki sürekli fonksiyon olsun. $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ ve $x = b$ tarafından sınırlanan bölge, $c \leq a$ olmak üzere, $x = c$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Oluşan cismin hacmini bulunuz.

20. $y = 2x$, $y = -2x^2 + 4x$ eğrileri tarafından sınırlanan bölge $x = -1$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

21. 3 cm yüksekliğindeki bir kare piramidin, yüksekliğine dik düzlemlerle arakesiti birer karedir. Piramidin tepe noktasından x birim uzaktaki kesit, bir kenarı x olan bir karedir. Piramidin hacmini kesit yöntemiyle bulunuz.

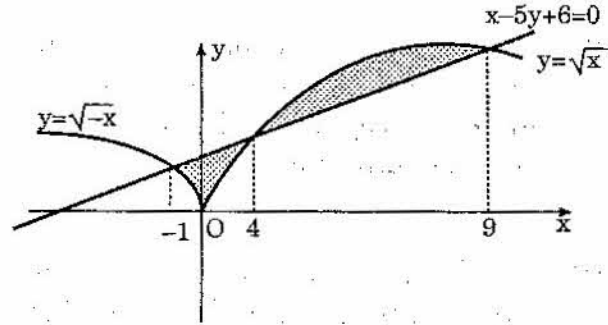


23. $x = -1$ ve $x = 1$ düzlemleri arasında kalan bir cismin x - eksenine dik düzlemlerle arakesiti birer karedir. Bu karelerin iki köşesi $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerinde bulunduğuna göre cismin hacmini bulunuz.



ÇÖZÜMLER

$$\begin{aligned}
 1. \quad A &= \int_{-1}^0 \left[\frac{1}{5}(x+6) - \sqrt{-x} \right] dx \\
 &= \int_0^4 \left[\frac{1}{5}(x+6) - \sqrt{x} \right] dx \\
 &\quad + \int_4^9 \left[\sqrt{x} - \frac{1}{5}(x+6) \right] dx \\
 &= \frac{13}{30} + \frac{16}{15} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3} \text{ br}^2
 \end{aligned}$$



2. a) $y = 4(1 - x^2)$, $y = x^4 - 1$

$$y = y \Rightarrow 4(1 - x^2) = x^4 - 1 \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$A = \int_{-1}^1 (4(1 - x^2) - x^4 + 1) dx = \int_{-1}^1 (-4x^2 - x^4 + 5) dx$$

$$= -\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5} + 5x \Big|_{-1}^1 = -\frac{4}{3} - \frac{1}{5} + 5 - \left(-\frac{4}{3} - \frac{1}{5} + 5\right) = \frac{104}{15} \text{ br}^2$$

b) $y = x^4 - 4x^2 + 4$, $y = x^2$

$$y = y \Rightarrow x^4 - 4x^2 + 4 = x^2 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 \Rightarrow x = \mp 2, x = \mp 1$$

$$A = \int_{-2}^2 |y_1 - y_2| dx$$

$$A = 2 \int_0^1 (x^4 - 4x^2 + 4 - x^2) dx + 2 \int_1^2 (x^2 - x^4 + 4x^2 - 4) dx +$$

$$= 2 \left(\frac{x^5}{5} - \frac{5}{3}x^3 + 4x \right) \Big|_0^1 + 2 \left(\frac{5x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - 4x \right) \Big|_1^2$$

$$= 2 \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 \right) + 2 \left(\frac{40}{3} - \frac{32}{5} - 8 - \frac{5}{3} + \frac{1}{5} + 4 \right) = 8 \text{ br}^2$$

c) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$, $y = \frac{1}{x^2+1}$

$$y = y \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$$

$$A = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^2} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - 2 + \arctan x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - 2 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi - 2 \text{ br}^2$$

d) $y = \frac{8}{x^2+4}$, $4y = x^2$

$$y = \frac{8}{4y+4} \Rightarrow 4y^2 + 4y - 8 = 0$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$y = 1 \Rightarrow x = \mp 2$$

$$A = \int_{-2}^2 \frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4} dx = 4 \arctan \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} \Big|_{-2}^2$$

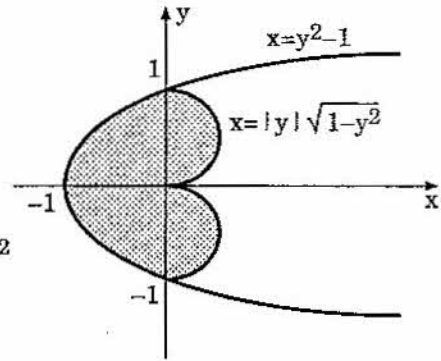
$$= 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{8}{12} + 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{8}{12} = 2\pi - \frac{4}{3} \text{ br}^2$$

e) $y = x + 1$, $y = \cos x$, $y = 0$

$$y = y \Rightarrow x + 1 = \cos x \Rightarrow x = 0$$

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{-1}^0 x + 1 dx = +\sin x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{x^2}{2} + x \Big|_{-1}^0 = \frac{3}{2} \text{ br}^2$$

$$\begin{aligned}
 f) \quad A &= \int_{-1}^1 (|y| \sqrt{1-y^2} - y^2 + 1) dy \\
 &= 2 \int_0^1 (y \sqrt{1-y^2} - y^2 + 1) dy \\
 &= 2 \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1-y^2)^{3/2} - \frac{y^3+y}{3} \right] \Big|_0^1 = 2 \text{ br}^2
 \end{aligned}$$



$$g) \quad x = y^2(1-y), \quad x=0 \Leftrightarrow y=0 \text{ ve } y=1$$

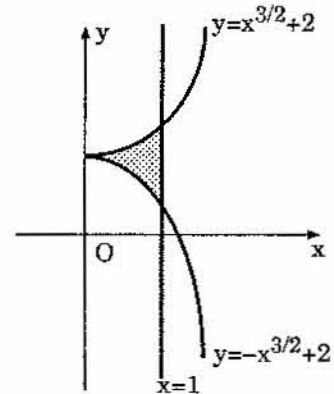
$$A = \int_c^d x dy = \int_0^1 y^2(1-y) dy = \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \text{ br}^2$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad A &= 2 \int_0^1 \left((1-x^2)^{3/2} - \left[-(1-x^2)^{3/2} \right] \right) dx = 4 \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2 x)^{3/2} \cdot (-\sin x) dx \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx = 4 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \int_0^{\pi/2} 1 - 2 \cos 2x + \frac{\cos 4x + 1}{2} dx \\
 &= \left[x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} + \frac{x}{2} \right] \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{4} \text{ br}^2
 \end{aligned}$$

$$4. \quad (y-2)^2 = x^3 \Rightarrow y = x^{3/2} + 2 \text{ veya}$$

$$y = -x^{3/2} + 2$$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 (x^{3/2} + 2 + x^{3/2} - 2) dx \\
 &= \int_0^1 2x^{3/2} dx = \frac{4}{5} x^{5/2} \Big|_0^1 = \frac{4}{5} \text{ br}^2
 \end{aligned}$$



$$5. \quad S_1 = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx = e^{-x} (-\cos x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x)(-e^{-x}) dx$$

$$= e^{-\pi} + 1 - \left(e^{-x} \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x (-e^{-x}) dx \right) = e^{-\pi} + 1 - \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx$$

$$\Rightarrow 2S_1 = e^{-\pi} + 1 \Rightarrow S_1 = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}$$

$$S_2 = \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \sin x dx = e^{-x} (-\cos x) \Big|_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x (-e^{-x}) dx$$

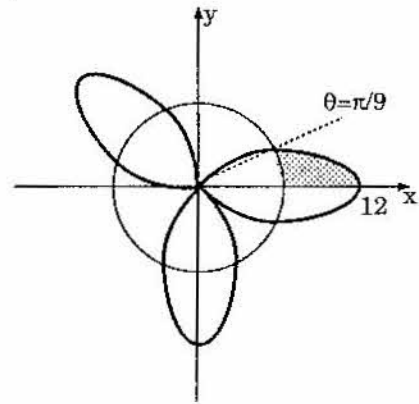
$$= -e^{-2\pi} - e^{-\pi} - \left(e^{-x} \sin x \Big|_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x (-e^{-x}) dx \right)$$

$$\Rightarrow -2S_2 = e^{-2\pi} + e^{-\pi} \Rightarrow -S_2 = \frac{e^{-2\pi} + e^{-\pi}}{2} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{e^{-2\pi} + e^{-\pi}}{e^{-\pi} + 1}$$

$$= \frac{e^{-\pi} + 1}{e^{-\pi} + 1} \cdot e^{-\pi} = e^{-\pi}$$

$$\Rightarrow S_n = S_1, e^{-\pi(n-1)} = (-1)^{n+1} \frac{e^{-n\pi} + e^{-(n-1)\pi}}{2}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad A &= 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/9} (144 \cos^2 3\theta - 36) d\theta \\ &= 3 \left(\int_0^{\pi/9} \left(144 \cdot \frac{\cos 6\theta + 1}{2} \right) - 36 \right) d\theta \\ &= 3 \left(72 \left(\frac{\sin 6\theta}{6} + \theta \right) - 36\theta \Big|_0^{\pi/9} \right) \\ &= 3 \left(12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 36 \frac{\pi}{9} \right) = 3 (6\sqrt{3} + 4\pi) \text{ br}^2 \end{aligned}$$

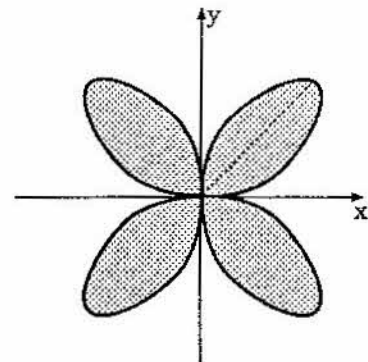


$$\begin{aligned} 7. \quad (x^2 + y^2)^3 &= 4x^2 y^2 \Rightarrow r^6 = 4r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \Rightarrow \\ r^2 &= 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \Rightarrow r^2 = \sin^2 2\theta \end{aligned}$$

$$\frac{A}{8} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r^2 d\theta \Rightarrow A = 4 \int_0^{\pi/4} \sin^2 2\theta d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} d\theta$$

$$= 2 \left(\theta - \frac{\sin 4\theta}{4} \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2}$$



8. a) $y = \frac{2}{5}x^{5/4} - \frac{3}{5}x^{3/4} \quad 1 \leq x \leq 16$

$$y' = \frac{1}{2}x^{1/4} - \frac{1}{2}x^{-1/4} \Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + \frac{1}{4}(x^{1/2} - 2 + x^{-1/2})$$

$$= 1 + \frac{1}{4} \frac{(x^{1/2} - 1)^2}{x^{1/2}}$$

$$\ell = \int_1^{16} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^{16} \frac{x^{1/2} + 1}{x^{1/4}} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5}x^{5/4} + \frac{4}{3}x^{3/4} \right) \Big|_1^{16} = \frac{256}{15} \text{ br}^2$$

b) $y = \int_0^x \sqrt{\sec^4 t - 1} dt, \quad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

$$y' = \sqrt{\sec^4 x - 1} \Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + \sec^4 x - 1 = \sec^4 x \Rightarrow$$

$$\ell = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 x dx = \tan x \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 2$$

9. $y = \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

$$S = 2\pi \int_0^{1/2} |y| \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad y' = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= 2\pi \int_0^{1/2} \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} dx = 2\pi \int_0^{1/2} dx = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi \text{ br}^2$$

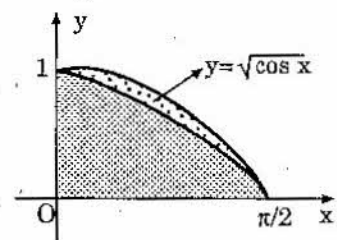
10. $x = \frac{1}{2}t^2, \quad y = t, \quad \sqrt{3} \leq t \leq 2\sqrt{2}$

$$S = 2\pi \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} |y| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = 2\pi \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} t \sqrt{t^2 + 1} dt = \pi \frac{2}{3} (t^2 + 1)^{3/2} \Big|_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}$$

$$= \pi \frac{2}{3} (27 - 8) = \frac{38}{3} \pi \text{ br}^2$$

11. a) $y = \sqrt{\cos x}, \quad y = 1, \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}$

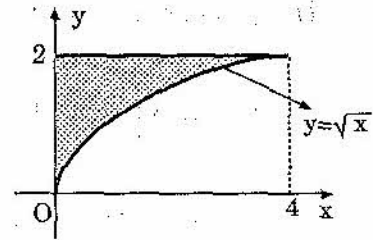
$$V = \pi \int_0^{\pi/2} (\sqrt{\cos x})^2 dx = \pi \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \pi \text{ br}^3$$



b) $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$, $y = 0$

$$V = \pi \int_0^4 \left(2^2 - (\sqrt{x})^2 \right) dx$$

$$= \pi \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^4 = \pi (16 - 8) = 8\pi \text{ br}^3$$



c) $y = x^2 + 1$

$$y = -x + 3$$

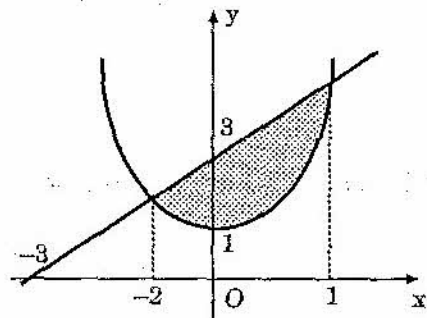
$$y = y \Rightarrow x^2 + 1 = -x + 3$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$$

$$V = \pi \int_{-2}^1 \left[(-x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_{-2}^1 (x^2 - 6x + 9 - x^4 - 2x^2 - 1) dx$$

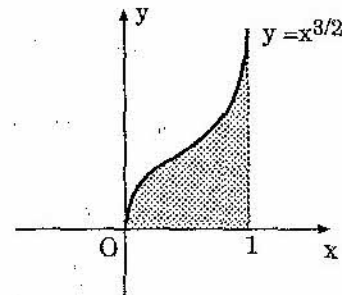
$$= \pi \left(-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{117\pi}{5} \text{ br}^3$$



d) $y = x^{3/2}$, $x = 1$, $y = 0$

$$V = \pi \int_0^1 (x^{3/2})^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 x^3 dx = \frac{\pi}{4} \text{ br}^3$$

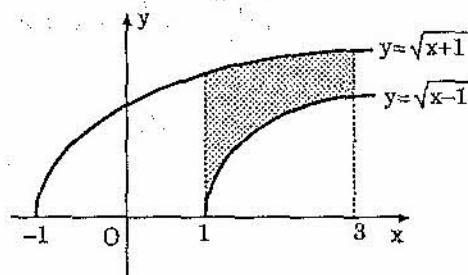


e) $y = \sqrt{x+1}$, $y = \sqrt{x-1}$, $x = 1$, $x = 3$

$$V = \pi \int_1^3 (y_1^2 - y_2^2) dx$$

$$= \pi \int_1^3 \left((\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2 \right) dx$$

$$= \pi \int_1^3 (x+1 - x+1) dx = 4\pi \text{ br}^3$$

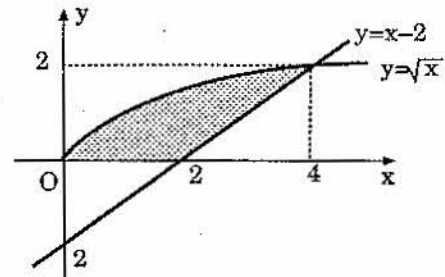


f) $y = \cos x + \sin x$, $y = \cos x - \sin x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi/4} [(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2] dx \\ &= \pi \int_0^{\pi/4} (1 + 2 \cos x \sin x - 1 + 2 \cos x \sin x) dx \\ &= 4\pi \frac{\sin^2 x}{2} \Big|_0^{\pi/4} = 2\pi \left(\frac{1}{2} \right) = \pi \text{ br}^3 \end{aligned}$$

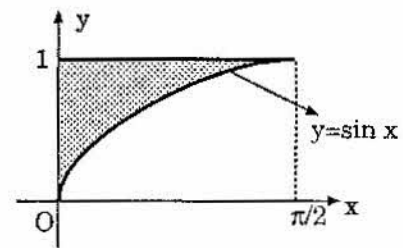
12. a) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = x - 2$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 [(y+2)^2 - (y^2)^2] dy \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} (y+2)^3 - \frac{1}{5} y^5 \right] \Big|_0^2 \\ &= \pi \left[\frac{64}{3} - \frac{32}{5} - \frac{8}{3} \right] = \frac{184}{15} \text{ br}^3 \end{aligned}$$



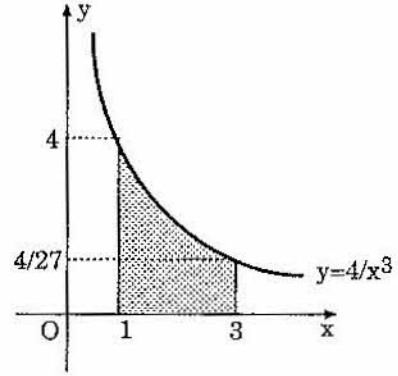
b) $y = \sin x$, $y = 1$, $x = 0$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (\arcsin y)^2 dy \\ &= \pi \left[\arcsin^2 y \cdot y \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 2 \arcsin y \cdot \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy \right] \\ &= \pi \left[\frac{\pi^2}{4} - 2 \left(-\arcsin y (1-y^2)^{1/2} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(-\sqrt{1-y^2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy \right] \\ &= \frac{\pi}{4} (\pi^2 - 8) \text{ br}^3 \end{aligned}$$



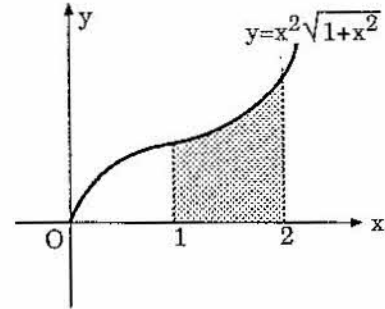
c) $y = \frac{4}{x^3}$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{4}{27}}^4 \left(\frac{4^{2/3}}{y^{2/3}} - 1 \right) dy + \pi \int_0^{4/27} (3^2 - 1^2) dy \\ &= \pi \left(4^{2/3} \cdot 3y^{1/3} - y \right) \Big|_{\frac{4}{27}}^4 + 8\pi \cdot \frac{4}{27} \\ &= \pi \left[4^{2/3} \cdot 3 \cdot 4^{1/3} - 4 - 4^{2/3} \cdot 3 \cdot \frac{4^{1/3}}{3} + \frac{4}{27} \right] + \frac{32\pi}{27} \\ &= \frac{16}{3} \pi \text{ br}^3 \end{aligned}$$

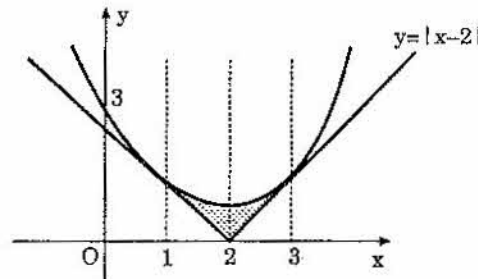


d) $y = x^2 \sqrt{x^2 + 1}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^2 x^2 \sqrt{1+x^2} dx \\ &= 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} t(t^2-1)t dt = 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} (t^4 - t^2) dt \\ &= \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3 \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \frac{100\sqrt{5} - 4\sqrt{2}}{15} \pi \end{aligned}$$



e)



Silindirik tabakalar yöntemiyle yapalım.

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^3 x |f(x) - g(x)| dx = 2\pi \int_1^3 x \left| \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2} - |x-2| \right| dx \\ &= 2\pi \int_1^3 \frac{1}{2} x [(x-2)^2 + 1] dx - 2\pi \int_1^3 x |x-2| dx \\ &= \pi \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 5x) dx + 2\pi \int_1^2 -x(x-2) dx - 2\pi \int_2^3 x(x-2) dx \\ &= \frac{16\pi}{3} + \frac{14\pi}{3} - \frac{8\pi}{3} = \frac{22\pi}{3} \text{ br}^3 \end{aligned}$$

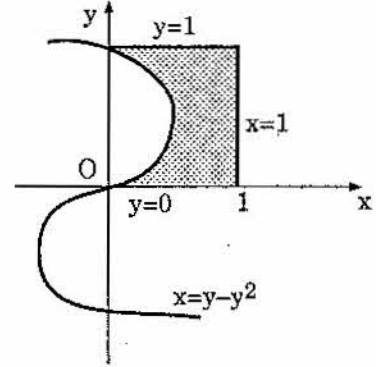
f) $x = \sqrt{1+y^3}$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$

$$V = \pi \int_1^2 x^2 dy = \pi \int_1^2 (1+y^3) dy = \pi \left[y + \frac{y^4}{4} \right]_1^2 = \frac{19}{4} \pi \text{ br}^3$$

13. a) $V = 2\pi \int_0^1 y |u(y)-v(y)| dy$

$$= 2\pi \int_0^1 y |1-(y-y^3)| dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 (y-y^2+y^4) dy = \frac{11}{15} \pi \text{ br}^3$$



b) $V = \pi \int_0^1 (x_1^2 - x_2^2) dy = \pi \int_0^1 [1 - (y - y^3)^2] dy$

$$= \pi \int_0^1 (1 - y^2 + 2y^4 - y^6) dy = \frac{97}{105} \pi \text{ br}^3$$

c) $V = \pi \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx = \pi \int_0^1 (1 - y + y^3)^2 dy$

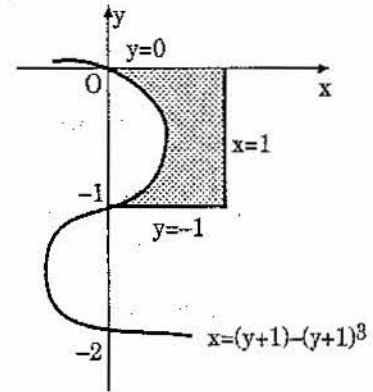
$$= \pi \int_0^1 (1 + y^2 + y^6 - 2y + 2y^3 - 2y^4) dy = \frac{97}{105} \pi$$

- d) Sözkonusu bölgenin $y = 1$ doğrusu etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmi, o bölgenin bir birim aşağı kaydırılmasıyla elde edilen bölgenin x - eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmine eşittir. Buna göre

$$V = 2\pi \int_{-1}^0 y [1 - (y+1) + (y+1)^3] dy$$

$$= -2\pi \int_{-1}^0 (y^4 + 3y^3 + 2y^2 + y) dy = \frac{23}{30} \pi \text{ br}^3$$

olur.



$$14. y^2 = \frac{2x^3 - x^4}{4}$$

$$y = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - x^4 = 0 \Leftrightarrow x^3(2 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ve } x = 2$$

$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 \frac{2x^3 - x^4}{4} dx = \pi \left(\frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{20} \right) \Big|_0^2 = \pi \left(2 - \frac{8}{5} \right) = \frac{2\pi}{5} \text{ br}^3$$

$$15. (y - x)^2 = x^3 \Rightarrow y - x = \pm x^{3/2} \Rightarrow y = x \pm x^{3/2}, \quad x = 1$$

$$V = \pi \int_0^1 [(x + x^{3/2})^2 - (x - x^{3/2})^2] dx = \pi \int_0^1 4x^{5/2} dx = \pi \cdot 4 \cdot \frac{2}{7} x^{7/2} \Big|_0^1 = \frac{8}{7} \pi \text{ br}^3$$

$$16. V = \pi \int_0^{\arcsin c} (c - \sin x)^2 dx$$

$$+ \pi \int_{\arcsin c}^{\pi - \arcsin c} (\sin x - c)^2 dx$$

$$+ \pi \int_{\pi - \arcsin c}^{\pi} (c - \sin x)^2 dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\arcsin c} (c - \sin x)^2 dx + \pi \int_{\arcsin c}^{\pi - \arcsin c} (\sin x - c)^2 dx$$

$$= 2\pi \left(c^2 x - 2c \cos x + \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) \Big|_0^{\arcsin c}$$

$$+ \pi \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + 2c \cos x + c^2 x \right) \Big|_{\pi - \arcsin c}^{\pi}$$

$$\cos(\arcsin c) = \sqrt{1 - c^2} \text{ ve } \sin(2 \arcsin c)$$

$$= 2 \cdot \sin(\arcsin c) \cos(\arcsin c) = 2 \cdot c \sqrt{1 - c^2} \text{ olduğundan}$$

$$V = 2\pi \left[c^2 \arcsin c + 2c \sqrt{1 - c^2} + \frac{\arcsin c}{2} - \frac{1}{2} c \sqrt{1 - c^2} - 2c \right]$$

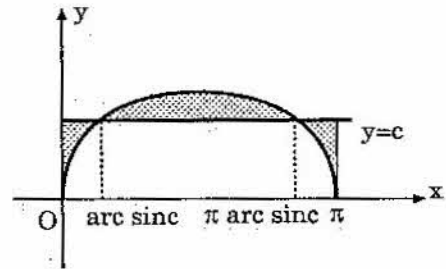
$$+ \pi \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\arcsin c}{2} + \frac{1}{2} c \sqrt{1 - c^2} - 2c \sqrt{1 - c^2} + c^2 \pi \right]$$

$$- c^2 \arcsin c - \frac{\arcsin c}{2} + \frac{1}{2} c \sqrt{1 - c^2} - 2c \sqrt{1 - c^2} - c^2 \arcsin c$$

$$= 2\pi \left[\frac{\pi}{4} - 2c + c^2 \frac{\pi}{2} \right]$$

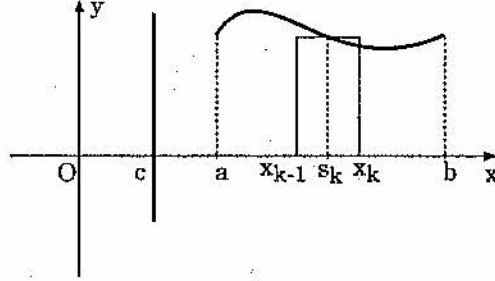
$$\Rightarrow V'_c = 0 \Leftrightarrow 2\pi(c\pi - 2) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{2}{\pi} \text{ dir ve } V''_c = 2\pi^2 > 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{2}{\pi} \text{ minimum nokta}$$



$$\begin{cases} x = \pi - u \\ dx = -du \end{cases}$$

17. $[a, b]$ aralığının bir parçalanması $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ olsun. $\Sigma_k \in [x_{k-1}, x_k]$ alalım.



Boyu $f(\Sigma_k)$, eni Δx_k olan dikdörtgenin $x = c$ eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen silindirik tabakanın hacmi

$$\begin{aligned} \Delta V_k &= |\pi (x_k - c)^2 - \pi (x_{k-1} - c)^2| f(\Sigma_k) \\ &= 2\pi \left| \frac{(x_k - c) + (x_{k-1} - c)}{2} \right| |f(\Sigma_k)| \cdot \Delta x_k \end{aligned}$$

$$\|P\| \rightarrow 0 \text{ için } \frac{(x_k - c) + (x_{k-1} - c)}{2} \equiv \Sigma_k - c$$

olacağından

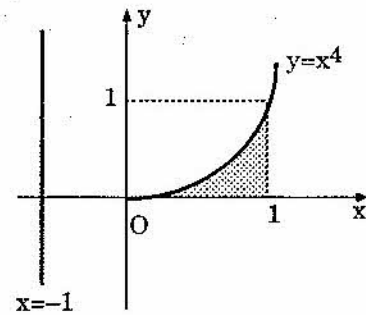
$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} 2\pi \sum_{k=1}^n (\Sigma_k - c) f(\Sigma_k) \Delta x_k \\ &= 2\pi \int_a^b (x - c) f(x) dx \end{aligned}$$

bulunur.

18. Problem 17 den

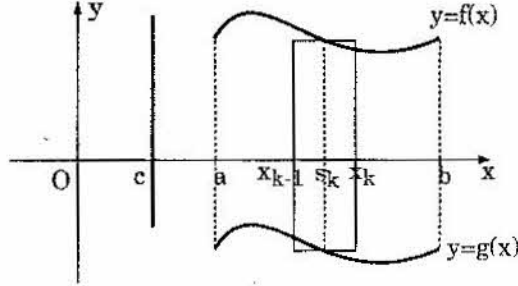
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (x - (-1)) \cdot f(x) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (x + 1) x^4 dx \\ &= 2\pi \left(\frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{11}{15} \pi br^3 \end{aligned}$$

olur.



19. $[a, b]$ aralığının bir parçalanması $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ olsun.

$\Sigma_k \in [x_{k-1}, x_k]$ alalım.



Boyu $(f(\Sigma_k) - g(\Sigma_k))$, eni Δx_k olan dikdörtgenin $x = c$ eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen silindirik tabakanın hacmi

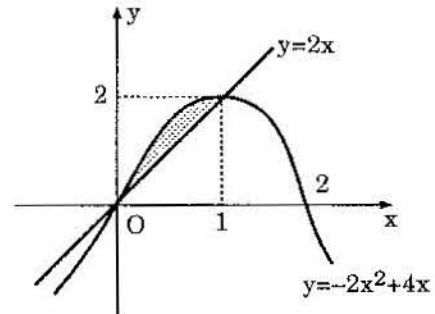
$$\begin{aligned} \Delta x_k &= (\pi(x_k - c)^2 - \pi(x_{k-1} - c)^2) (f(\Sigma_k) - g(\Sigma_k)) \\ &= 2\pi \frac{(x_k - c + x_{k-1} - c)}{2} (f(\Sigma_k) - g(\Sigma_k)) \Delta x_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &\cong 2\pi \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - c + x_{k-1} - c)}{2} (f(\Sigma_k) - g(\Sigma_k)) \Delta x_k \\ \frac{(x_k - c + x_{k-1} - c)}{2} &\cong \Sigma_k - c \text{ olduğundan} \end{aligned}$$

$\|P\| \rightarrow 0$ için

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} 2\pi \sum_{k=1}^n (\Sigma_k - c) (f(\Sigma_k) - g(\Sigma_k)) \Delta x_k \\ &= 2\pi \int_0^b (x - c) (f(x) - g(x)) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20. \quad V &= 2\pi \int_a^b (x - c) |f(x) - g(x)| dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (x - (-1)) (-2x^2 + 4x - 2x) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (x + 1) (2x - 2x^2) dx \\ &= 4\pi \int_0^1 x^2 + x - x^3 - x^2 dx \\ &= 4\pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 4\pi \cdot \frac{1}{4} = \pi \end{aligned}$$



21. Kesit bir kare ve kenarı x birim olduğundan, kesitin alanı $A(x) = x^2$

$$V = \int_0^3 A(x) dx = \int_0^3 x^2 dx = 9 \text{ br}^3$$

22. $t^2 + \left(\frac{S}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow S^2 = 4 - 4t^2$

$\Rightarrow$ kesitin alanı $A(t) = 4 - 4t^2$

$$V = \int_{-1}^1 A(t) dt = \int_{-1}^1 (4 - 4t^2) dt = 4 \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1$$

$$= 4 \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = 4 \cdot \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{16}{3}$$

