

Analiz-I Vize Sınavı konularıyla ilgili çözüm örnekleri

1. Limitleri bulunuz: a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)\sqrt{x^2 - 1}} + \\ &+ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(\sqrt{x} + 1)\sqrt{(x-1)(x+1)}} + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x} + 1)\sqrt{x+1}} + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x} + 1)\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{1-1}}{(\sqrt{1} + 1)\sqrt{1+1}} + \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{0}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[4]{x^7} \ln\left(1 + 3 \tan^2 \frac{1}{x}\right) = L$

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{7}{4}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + 3 \tan^2 \frac{1}{x}\right) = \ln\left(1 + 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \tan^2 \frac{1}{x}\right) = \ln(1 + 3 \tan^2 0) = \ln 1 = 0$ dir, dolayısıyla $[0 \cdot \infty]$ şeklinde belirsizlik durumu vardır. Bilinen limitlerden faydalanarak $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow x \rightarrow +\infty$ olacak şekilde değişken değiştirmesi uygulayarak

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^7} \ln\left(1 + 3 \tan^2 \frac{1}{x}\right) &= [0 \cdot \infty] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[4]{t^7}} \ln(1 + 3 \tan^2 t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + 3 \tan^2 t)}{\sqrt[4]{t^7}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + 3 \tan^2 t)}{3 \tan^2 t} \cdot \frac{3 \tan^2 t}{\sqrt[4]{t^7}} = 3 \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt[4]{t} \frac{\ln(1 + 3 \tan^2 t)}{3 \tan^2 t} \cdot \left(\frac{\tan t}{t}\right)^2 = \\ &\left[\lim_{t \rightarrow 0^+} \tan^2 t = \tan^2 0 = 0 \Rightarrow z = 3 \tan^2 t \rightarrow 0^+, t \rightarrow 0^+ \right] = 3 \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt[4]{t} \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + z)}{z} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\tan t}{t}\right)^2 = 3 \cdot 0 \cdot 1^2 = 0 \end{aligned}$$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 1$ kullanalım

Cevap: $L = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2 \arctan^2 x\right)^{\frac{\csc x}{x}} = L$

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2 \arctan^2 x\right) = 1 + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \arctan^2 x = 1 + 2 \cdot (\arctan 0)^2 = 1 + 2 \cdot 0 = 1 + 0 = 1$ ve

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sin x} = \frac{1}{0 \cdot \sin 0} = \frac{1}{0} = \infty$ dolayısıyla $[1^\infty]$ belirsizlik durumu vardır. Kuvvet-Üstel fonksiyonun limiti kuralına göre

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2 \arctan^2 x\right)^{\frac{\csc x}{x}} = \left[u(x) = 2 \arctan^2 x \rightarrow 0, v(x) = \frac{\csc x}{x} \rightarrow \infty, x \rightarrow 0 \right] = e^k,$$

$$k = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x}{x} \ln(1 + 2 \arctan^2 x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x}{x} \ln(1 + 2 \arctan^2 x) = \lim_{x \rightarrow 0} u(x)v(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x}{x} 2 \arctan^2 x =$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan^2 x}{x \sin x} = [x \rightarrow 0 \Rightarrow \arctan x \sim x, \sin x \sim x] = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \cdot x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 2 \cdot 1 = 2 \text{ elde edilir.}$$

cevap: $L = e^k = e^2$.

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-2}} = L$

Çözüm: Pay ve paydada $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}) = +\infty - (+\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-2}) = +\infty - (+\infty)$

belirsizlik durumları var iken kesrin limiti kuralını uygulayamayız. Bu nedenle kesrin pay ve paydasını $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}$ 'in eşleniği olan $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}$ ifadesine, $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-2}$ 'in eşleniği

olan $\sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{(x+2)(x-2)} + \sqrt[3]{(x-2)^2}$ ifadesine çarpalım. Buna göre basitleştirme sonucu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}) \left(\sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{(x+2)(x-2)} + \sqrt[3]{(x-2)^2} \right)}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-2}) \left(\sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{(x+2)(x-2)} + \sqrt[3]{(x-2)^2} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2 - x+2) \left(\sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{(x+2)(x-2)} + \sqrt[3]{(x-2)^2} \right)}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})(x+2 - x+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \left(\sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{(x+2)(x-2)} + \sqrt[3]{(x-2)^2} \right)}{4(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2/3} \left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)} + \sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x}\right)^2} \right)}{x^{1/2} \left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}} \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/6} \cdot \frac{\sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)} + \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1-\frac{2}{x}\right)^2}}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)} + \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1-\frac{2}{x}\right)}} = (+\infty) \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+0)^2} + \sqrt[3]{(1+0)(1-0)} + \sqrt[3]{(1-0)^2}}{\sqrt{(1+0)} + \sqrt{(1-0)}} =$$

$$= (+\infty) \cdot \frac{1+1+1}{1+1} = (+\infty) \cdot \frac{3}{2} = +\infty \text{ bulunur.}$$

Cevap: $L = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} \frac{1 - \cot^2 3x}{\sqrt{2} \cos 3x - 1} = L$

Çözüm:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} \frac{1 - \cot^2 3x}{\sqrt{2} \cos 3x - 1} = \left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} (1 - \cot^2 3x) = 1 - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} \cot^2 3x = 1 - \cot^2 \frac{3\pi}{12} = 1 - \cot^2 \frac{\pi}{4} = 1 - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} (\sqrt{2} \cos 3x - 1) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} \sqrt{2} \cos 3x - 1 = \sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{12} - 1 = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} - 1 = 1 - 1 = 0 \end{array} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} \frac{1 - \cot^2 3x}{\sqrt{2} \cos 3x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} \frac{\sin^2 3x - \cos^2 3x}{(\sqrt{2} \cos 3x - 1) \sin^2 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} \frac{1 - 2 \cos^2 3x}{(\sqrt{2} \cos 3x - 1) \sin^2 3x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} \frac{1 - 2 \cos^2 3x}{(\sqrt{2} \cos 3x - 1) \sin^2 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} \frac{(1 - \sqrt{2} \cos 3x)(1 + \sqrt{2} \cos 3x)}{(\sqrt{2} \cos 3x - 1) \sin^2 3x} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} \frac{1 + \sqrt{2} \cos 3x}{\sin^2 3x} = \\
&= - \frac{1 + \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} \sqrt{2} \cos 3x}{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} \sin^2 3x} = - \frac{1 + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} = - \frac{1 + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = - \frac{1+1}{\frac{1}{2}} = -4
\end{aligned}$$

Cevap: $L = -4$

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ limitinin tanımına dayanarak $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 1) = 3$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $D(f) = \mathbb{R}$, $f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ noktasının her δ -komşuluğunda tanımlıdır. Tanıma göre $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 1) = 3$ olduğunu göstermek için

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x (0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |2x^2 - 3x + 1 - 3| < \varepsilon)$ önermesi sağlanacak şekilde $\forall \varepsilon > 0$ 'a karşılık $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ bulmak yeterlidir.

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |2x^2 - 4x + x + 1 - 3| = |2x(x - 2) + (x - 2)| = |x - 2| \cdot |2x + 1| = |x - 2| \cdot |2(x - 2) + 5| \leq$$

$$|x - 2| \cdot (2|x - 2| + 5) = 2|x - 2|^2 + 5|x - 2| < 2\delta^2 + 5\delta \text{ olduğu dikkate alınarak } \delta(\varepsilon) > 0 \text{ sayısı}$$

$0 < \delta(\varepsilon) \leq 1$ olacak şekilde aranılabilir. O halde

$$0 < |x - 2| < \delta \leq 1 \Rightarrow |2x^2 - 3x + 1 - 3| < 2\delta^2 + 5\delta \leq 2\delta + 5\delta = 7\delta < \varepsilon \Rightarrow |2x^2 - 3x + 1 - 3| < 7\delta < \varepsilon$$

önermesi $0 < \delta(\varepsilon) \leq 1$, $\delta < \frac{\varepsilon}{7}$ iken geçeli olacaktır. Sonuçta $0 < \delta(\varepsilon) \leq \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{7} \right\}$ şartını sağlayan

her $\delta(\varepsilon)$ sayısı için $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x (0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |2x^2 - 3x + 1 - 3| < \varepsilon)$ önermesi tüm geçerli olur, bu ise $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 1) = 3$ demektir.

3. Fonksiyonların sonsuz küçük veya sonsuz büyük olduğunu belirleyiniz:

$$\text{a) } f(x) = \frac{1 - \sqrt{\cos x^2}}{1 - \cos \sqrt{x^3}}, x \rightarrow 0, \quad \text{b) } f(x) = \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{\sqrt{x^3}}, x \rightarrow +\infty$$

Çözüm:

$$\text{a) } f(x) = \frac{1 - \sqrt{\cos x^2}}{1 - \cos \sqrt{x^3}} \text{ fonksiyonunun } x \rightarrow 0 \text{ şartında sonuz küçülen (büyüyen) olup olmadığına}$$

karar vermek için limitini bulalım.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x^2})(1 + \sqrt{\cos x^2})}{(1 - \cos \sqrt{x^3})(1 + \sqrt{\cos x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{(1 - \cos \sqrt{x^3})(1 + \sqrt{\cos x^2})} = \\
&= \left[x \rightarrow 0 \Rightarrow 1 - \cos x^2 \sim \frac{x^4}{2}, 1 - \cos \sqrt{x^3} \sim \frac{x^3}{2}, \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{\cos x^2}) = 1 + 1 = 2 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{2}}{\frac{x^3}{2}(1 + \sqrt{\cos x^2})} =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + \sqrt{\cos x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x}{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{\cos x^2})} = \frac{0}{2} = 0$$
 elde edilir, dolayısıyla $f(x)$, $x \rightarrow 0$ şartında sonsuz küçük fonksiyondur.

b) $f(x) = \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{\sqrt{x^3}}$ fonksiyonunu $x \rightarrow +\infty$ şartında sonuz küçülen (büyüyen) olup olmadığına karar vermek için limitini bulalım. Kuvvet-üstel fonksiyonun limiti kuralına göre

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{\sqrt{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{2x+1} \right)^{\sqrt{x^3}} = \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2x+1} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3} = +\infty \right] = [1^\infty] = e^k \\ k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2x+1} \cdot \sqrt{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{3/2}}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2 + \frac{1}{x}} = +\infty \cdot \frac{2}{2+0} = +\infty \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^k = e^{+\infty} = +\infty$ elde edilir, dolayısıyla $f(x)$, $x \rightarrow +\infty$ şartında sonsuz büyük fonksiyondur.

4. Tektaraflı limitleri kullanarak $f(x) = \frac{2 \tan x - |\sin x|}{x}$ fonksiyonunun $x=0$ noktasında limitinin varlığını inceleyiniz.

Çözüm: Önce, $x=0$ noktasında fonksiyonun sağdan ve soldan limitlerini bulalım. Bunun için $0 < x < \pi/2 \Rightarrow \sin x > 0$ ve $-\pi/2 < x < 0 \Rightarrow \sin x < 0$ olduğunu dikkate alalım. Buna göre

$$\begin{aligned} f(1+0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \tan x - |\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \tan x - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 \tan x}{x} - \frac{\sin x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \tan x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \\ f(1-0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \tan x - |\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \tan x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 \tan x}{x} + \frac{\sin x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \tan x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \text{ bulunur. O hadle } f(1+0) = 1 \neq 3 = f(1-0) \text{ olduğundan} \\ &\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ limiti yoktur.} \end{aligned}$$

5. Aşağıdakilerin geçerli olduğunu gösteriniz:

a) $\ln(1 + \sqrt[3]{x^2} \tan x) = o(\sqrt[3]{x^2} \arcsin x^2), x \rightarrow 0$

Çözüm: Tanıma göre $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x^2} \tan x)}{\sqrt[3]{x^2} \arcsin x^2} = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Limiti bulalım

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x^2} \tan x)}{\sqrt[3]{x^2} \arcsin x^2} = \left[\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2} \tan x = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2} \arcsin x^2 = 0 \right] = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \left[x \rightarrow 0 \Rightarrow \ln \left(1 + \sqrt[3]{x^2} \tan x \right) \sim \sqrt[3]{x^2} \tan x \sim x \sqrt[3]{x^2}, \arcsin x^2 \sim x^2 \text{ olduğunu kullanalım} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2} \tan x}{\sqrt[3]{x^2} \arcsin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{0} = 0.$$

Cevap: a) geçerlidir.

b) $\frac{x^2 + 4x}{\sqrt{1 + 2x^6} + 1} \simeq \frac{1}{x}, x \rightarrow \infty$

Çözüm: Bağıntının geçerliliğini göstermek için $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x}{\sqrt{1 + 2x^6} + 1} : \frac{1}{x} = A \in \mathbb{R}, A \neq 0$ olduğunu

göstermek yeterlidir. Limiti bularaka

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x}{\sqrt{1 + 2x^6} + 1} : \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 4x)x}{\sqrt{1 + 2x^6} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{4}{x}\right)x^3}{x^3 \left(\sqrt{\frac{1}{x^6} + 2} + \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^6} + 2} + \frac{1}{x^3}} =$$

$$= \frac{1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{x^6} + 2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}} = \frac{1 + 0}{\sqrt{2} + 0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \text{ elde edilir.}$$

Cevap: Verilmiş fonksiyonlar $x \rightarrow +\infty$ şartında aynı mertebededirler.

c) $\left(\sqrt{x^6 + 2x^4 + 1} - x\sqrt{x^4 + 1} \right) \sim x, x \rightarrow +\infty$

Çözüm: Tanıma göre $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^6 + 2x^4 + 1} - x\sqrt{x^4 + 1}}{x} = 1$ olduğunu göstermeliyiz. Bu amaçla kesrin

pay ve paydasını payın eşleniğine çarpıp fonksiyonun ifadesini dönüştürerek

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^6 + 2x^4 + 1} - x\sqrt{x^4 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^6 + 2x^4 + 1} - x\sqrt{x^4 + 1} \right) \left(\sqrt{x^6 + 2x^4 + 1} + x\sqrt{x^4 + 1} \right)}{x \left(\sqrt{x^6 + 2x^4 + 1} + x\sqrt{x^4 + 1} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6 + 2x^4 + 1 - x^2(x^4 + 1)}{x \left(\sqrt{x^6 + 2x^4 + 1} + x\sqrt{x^4 + 1} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6 + 2x^4 + 1 - x^6 - x^2}{x^4 \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^6}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^4 \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^6}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)}{x^4 \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^6}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \right)} =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^6}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}} = \frac{2 - 0 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + \sqrt{1 + 0}} = \frac{2}{1 + 1} = 1 \text{ buluruz. Böylece denklik}$$

bağıntısı geçerlidir.

6. Fonksiyonlar arasındaki $\sim$ denklik bağıntısından faydalanarak limiti bulunuz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 4x) \left(\sqrt[3]{1+x^2} - 1 \right)}{(3^x - 1)^2 \arctan^2 x} = L$$

Çözüm: Bilinen kurala göre kesrin pay ve paydasındaki çarpanları kendi denkleleriyle değiştirelim. O halde

$$1 - \cos 4x \sim \frac{(4x)^2}{2}, \sqrt[3]{1+x^2} - 1 \sim \frac{x^2}{3}, (3^x - 1)^2 \sim x^2 \ln^2 3, \arctan^2 x \sim x^2, x \rightarrow 0 \text{ dikkate alınarak}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 4x) \left(\sqrt[3]{1+x^2} - 1 \right)}{(3^x - 1)^2 \arctan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(4x)^2}{2} \cdot \frac{x^2}{3}}{x^2 \ln^2 3 \cdot x^2} = \frac{8}{3 \ln^2 3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = \frac{8}{3 \ln^2 3} \lim_{x \rightarrow 0} 1 = \frac{8}{3 \ln^2 3} \text{ bulunur.}$$

Cevap: $L = \frac{8}{3 \ln^2 3}$

7. $f(x) = \frac{|x-1|}{\arctan(x^2-1)}$ fonksiyonunun sürekliliğini inceleyiniz, varsa süreksizlik noktalarını bulunuz ve tipini belirleyiniz.

Çözüm: $D(f) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \arctan(x^2-1) \neq 0\} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2-1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ tanım kümesini oluşturan her aralıkta $f(x)$ elemanter fonksiyondur, teorem gereği bu kümede süreklidir. O halde $f(x)$ sadece tanımsız olduğu $x=1$ ve $x=-1$ noktalarında süreksizdir. Bu süreksizlik noktalarının tipini belirleyelim. Bu amaçla fonksiyonun $x=1$ ve $x=-1$ noktalarında tektaraflı limitlerini bulalım.

$$\begin{aligned} f(1+0) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{\arctan(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\arctan(x^2-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)\arctan(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{(x+1)\arctan(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x+1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{\arctan(x^2-1)} = \\ &= \left[x \rightarrow 1^+ \Rightarrow t = x^2-1 \rightarrow 0 \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x+1)} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\arctan t} = \frac{1}{1+1} \cdot 1 = \frac{1}{2} \\ f(1-0) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{\arctan(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{\arctan(x^2-1)} = - \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\arctan(x^2-1)} = - \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{(x+1)\arctan(x^2-1)} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x+1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{\arctan(x^2-1)} = - \frac{1}{1+1} \cdot 1 = -\frac{1}{2} \text{ olduğuna göre } f(1-0) = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} = f(1+0) \end{aligned}$$

dolayısıyla $x=1$ fonksiyonun birinci tip süreksizlik noktasıdır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} f(-1+0) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x-1|}{\arctan(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-(x-1)}{\arctan(x^2-1)} = - \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x^2-1)}{(x+1)\arctan(x^2-1)} = - \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} \cdot \\ &\cdot \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x^2-1)}{\arctan(x^2-1)} = - \frac{1}{+0} \cdot 1 = -\infty \cdot 1 = -\infty \end{aligned}$$

$f(-1-0) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x-1|}{\arctan(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-(x-1)}{\arctan(x^2-1)} = - \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x^2-1)}{(x+1)\arctan(x^2-1)} = - \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} \cdot \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x^2-1)}{\arctan(x^2-1)} = - \frac{1}{-0} \cdot 1 = +\infty \cdot 1 = +\infty$ bulunur, dolayısıyla $x = -1$ fonksiyonun ikinci tip süreksizlik noktasıdır.

8. $\alpha(x) = \arctan^2 x + x^4 + 2\ln^2(1+x)$ ve $\beta(x) = ax^n$, ($a, n \in \mathbb{R}$) olmak üzere $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \rightarrow 0$ olacak şekilde a ve n sayılarını bulunuz.

Çözüm: Tanım gereği a ve n sayılarını

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan^2 x + x^4 + 2\ln^2(1+x)}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left[\frac{\arctan^2 x}{x^2} + x^2 + 2 \cdot \frac{\ln^2(1+x)}{x^2} \right]}{ax^n} = \\ &= \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-2}} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan x}{x} \right)^2 + \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^2 \right] = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-2}} [1+0+2 \cdot 1] = \frac{3}{a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-2}} = 1 \end{aligned}$$

sağlanacak şekilde seçmeliyiz. Buna göre $0 \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-2}} \in \mathbb{R}$ dolayısıyla $n-2=0$ yani $n=2$, çünkü

$n > 2$ için ve $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-2}} = \infty$, $n < 2$ için ve $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-2}} = 0$ dır. Sonuçta $n=2$ için

$$\frac{3}{a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-2}} = \frac{3}{a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2-2}} = \frac{3}{a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^0} = \frac{3}{a} \lim_{x \rightarrow 0} 1 = \frac{3}{a} = 1 \text{ yahut } a=3 \text{ olmalıdır.}$$

Cevap: $n=2$ ve $a=3$ için $\alpha(x) \sim \beta(x) = 3x^2$, $x \rightarrow 0$ geçerli olur.

9. a 'nın hangi değerinde $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+\sin x) + \sqrt{1+x}-1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ fonksiyonu $x=0$ noktasında

sürekli olur?

Çözüm: Süreklilik tanımına göre a sayısını $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = a$ şartını sağlayan değerini bulmalıyız. Bu amaçla $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ limitini bulalım.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x) + \sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \ln(1+\sin x)}{x \sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \ln(1+\sin x)}{x \sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \\ &= \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ olduğundan } a = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

için $f(x)$ fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli olur.