

Analiz-I Final Sınavı konularıyla ilgili çözüm örnekleri:

1. Fonksiyonların türevlerini bulunuz:

a) $y = \cos [\ln(x^2 + 3\sqrt{x} + 2)]$

Çözüm: $D(f) = [0, +\infty)$ dir. Bileşke fonksiyonunun türevi kuralına göre her $x > 0$ için

$$\begin{aligned} y' &= \{\cos [\ln(x^2 + 3\sqrt{x} + 2)]\}' = -\sin [\ln(x^2 + 3\sqrt{x} + 2)] \cdot [\ln(x^2 + 3\sqrt{x} + 2)]' = \\ &= -\sin [\ln(x^2 + 3\sqrt{x} + 2)] \cdot \frac{(x^2 + 3\sqrt{x} + 2)'}{x^2 + 3\sqrt{x} + 2} = -\sin [\ln(x^2 + 3\sqrt{x} + 2)] \cdot \frac{2x + \frac{3}{2\sqrt{x}}}{x^2 + 3\sqrt{x} + 2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

b) $y = (\sin^2 x + 1)^{\cos 2x}$

Çözüm: $D(f) = \mathbb{R}$ dir. Kuvvet-üstel fonksiyonun türevi kuralına göre her $x \in \mathbb{R}$ noktasında

y' türevini bulalım. Her iki tarafın logaritmasını alıp diferansiyellersek

$$\begin{aligned} (\ln y)' &= \left[\ln (\sin^2 x + 1)^{\cos 2x} \right]' = [\cos 2x \cdot \ln (\sin^2 x + 1)]' \\ \frac{y'}{y} &= -2 \sin 2x \ln (\sin^2 x + 1) + \cos 2x \frac{(\sin^2 x + 1)'}{\sin^2 x + 1} = \\ &= -2 \sin 2x \ln (\sin^2 x + 1) + \cos 2x \frac{2 \sin x (\sin x)'}{\sin^2 x + 1} = -2 \sin 2x \ln (\sin^2 x + 1) + \cos 2x \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x + 1} = \\ &= -2 \sin 2x \ln (\sin^2 x + 1) + \frac{\sin 4x}{2(\sin^2 x + 1)} \text{ bulunur. Buradan} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= y \left[-2 \sin 2x \ln (\sin^2 x + 1) + \frac{\sin 4x}{2(\sin^2 x + 1)} \right] = \\ &(\sin^2 x + 1)^{\cos 2x} \left[-2 \sin 2x \ln (\sin^2 x + 1) + \frac{\sin 4x}{2(\sin^2 x + 1)} \right] \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

2. $y = e^x \tan x + x \ln(x + 1) + \arctan x$ fonksiyonunun grafiğine $x_0 = 0$ apsisli noktada teğet ve normal doğruların denklemlerini bulunuz.

Çözüm: Fonksiyon grafiğine teğetin $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ denkleminde $x_0 = 0$,

$$y_0 = f(x_0) = e^0 \tan 0 + 0 \cdot \ln(0 + 1) + \arctan 0 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 = 0 \text{ ve}$$

$$y' = (e^x \tan x + x \ln(x + 1) + \arctan x)' = e^x \tan x + \frac{e^x}{\cos^2 x} + \ln(x + 1) + \frac{x}{x+1} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x_0) = f'(0) = \left[e^x \tan x + \frac{e^x}{\cos^2 x} + \ln(x + 1) + \frac{x}{x+1} + \frac{1}{1+x^2} \right]_{x=0} =$$

$$e^0 \tan 0 + \frac{e^0}{\cos^2 0} + \ln(0 + 1) + \frac{0}{0+1} + \frac{1}{1+0^2} = 1 + 1 = 2 \text{ dikkate alınırsa } (0, 0) \text{ noktasındaki teğet doğrunu denklemini } y = 0 + 2(x - 0) \text{ veya } y = 2x \text{ şeklinde bulunur.}$$

Buna göre grafiğin $(0, 0)$ noktasında normalin denklemini $y = f(0) - \frac{1}{f'(0)}(x - 0)$ veya $y = -\frac{x}{2}$ şeklinde yazılır.

3. $x = \sin^3 t$, $y = t^2 \tan^3 t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ parametrik denklemlerinin tanımladığı $y = y(x)$ fonksiyonunun y'_x türevini bulunuz.

Çözüm: $x = \sin^3 t$ fonksiyonu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aralığında kesin artan olduğundan birebir

fonksiyondur, dolayısıyla verilmiş denklemler bir $y = y(x)$ fonksiyonu tanımlıyor.

$$x'_t = (\sin^3 t)' = 3 \sin^2 t \cos t \text{ ve } y'_t = (t^2 \tan^3 t)' = 2t \tan^3 t + 3t^2 \tan^2 t (1 + \tan^2 t) \text{ sonlu türevleri}$$

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aralığında var ve $x'_t = 3 \sin^2 t \cos t \neq 0$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dir. O halde teorem gereği $x = \sin^3 t$ noktasında $y'_x(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t \tan^3 t + 3t^2 \tan^2 t (1 + \tan^2 t)}{3 \sin^2 t \cos t}$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ türevi vardır.

4. $y = x + \cos(x + y - e^x)$ denkleminin tanımladığı $y = y(x)$ kapalı fonksiyonunun y'_x türevini bulunuz. $y(0) = 1$ olmak üzere $y'_x(0)$ türevini bulunuz.

Çözüm: Denklemden y 'yi $y = y(x)$ şeklinde türevlenebilir fonksiyon sayarak her iki tarafın x değişkenine göre türevi alınırsa $y' = [x + \cos(x + y - e^x)]'_x \Rightarrow$

$$y' = 1 - \sin(x + y - e^x)(x + y - e^x)'_x \Rightarrow y' = 1 - \sin(x + y - e^x)(1 + y' - e^x) \text{ veya}$$

$y'_x [1 + \sin(x + y - e^x)] = 1 - \sin(x + y - e^x)(1 - e^x)$ denklemi elde edilir. Bu denklemden y'_x çekilerek $y'_x = \frac{1 - \sin(x + y - e^x)(1 - e^x)}{1 + \sin(x + y - e^x)}$, ardından $x = 0$, $y(0) = 1$ dikkate alınmakla

$$y'_x(0) = \frac{1 - \sin(0 + y(0) - e^0)(1 - e^0)}{1 + \sin(0 + y(0) - e^0)} \Big|_{x=0} = \frac{1 - \sin(0 + 1 - 1)(1 - 1)}{1 + \sin(0 + 1 - 1)} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1 \Rightarrow y'_x(0) = 1 \text{ bulunur.}$$

5. $y = (x^3 + x^2 + 1) \sin 2x$ fonksiyonunun $y^{(4)}(x)$ türevini *Leibniz* kuralına göre bulunuz.

Çözüm: $u(x) = x^3 + x^2 + 1$, $v(x) = \sin 2x$ ve $y = u(x)v(x)$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ noktasında

$$u' = (x^3 + x^2 + 1)' = 3x^2 + 2x, u'' = (3x^2 + 2x)' = 6x + 2, u''' = (6x + 2)' = 6, u^{(4)} = (6)' = 0$$

$$v' = (\sin 2x)' = 2 \cos 2x, v'' = (2 \cos 2x)' = -4 \sin 2x, v''' = (-4 \sin 2x)' = -8 \cos 2x,$$

$$v^{(4)} = (-8 \cos 2x)' = 16 \sin 2x \text{ sonlu türevleri vardır. Leibniz formülüne göre } n = 4 \text{ iken}$$

$$y^{(4)} = \sum_{k=0}^4 C_n^k u^{(k)} v^{(4-k)} = uv^{(4)} + 4u'v''' + 6u''v'' + 4u'''v' + u^{(4)}v \text{ veya}$$

$$y^{(4)} = (x^3 + x^2 + 1) 16 \sin 2x + 4(3x^2 + 2x)(-8 \cos 2x) + 6(6x + 2)(-4 \sin 2x) + 4 \cdot 6 \cdot 2 \cos 2x + 0 \cdot \sin 2x = 16(x^3 + x^2 + 1 - 9x - 3) \sin 2x + 16(3 - 6x^2 - 4x) \cos 2x \text{ yahut}$$

$$y^{(4)} = 16(x^3 + x^2 - 9x - 2) \sin 2x - 16(6x^2 + 4x - 3) \cos 2x, x \in \mathbb{R} \text{ bulunur.}$$

6. Aşağıdaki limitleri *L'hospital* kuralını uygulayarak hesaplayınız:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(1 + \sin^2 x)} = ?$$

Çözüm: $x = 0$ noktasının yakın delinmiş komşuluğunda $f(x) = \ln(x^2 + 1)$,

$$g(x) = \ln(1 + \sin^2 x) \text{ fonksiyonları tanımlı ve } f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, g'(x) = \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} \text{ sonlu türevleri}$$

$$\text{var, ayrıca } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2 + 1) = \ln(0^2 + 1) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \sin^2 x) = \ln(1 + \sin^2 0) = 0 \text{ dir. } \frac{0}{0} \text{ tipinde belirsizlik için } L'hospital$$

$$\text{kuralına göre } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(1 + \sin^2 x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\ln(x^2 + 1)]'}{[\ln(1 + \sin^2 x)]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{\frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(1 + \sin^2 x)}{2 \sin x \cos x(x^2 + 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin^2 x}{\cos x(x^2 + 1)} = 1 \cdot \frac{1 + \sin^2 0}{(0^2 + 1) \cos 0} = 1 \text{ bulunur.}$$

Not: Bu çözümde birinci meşhur limiti kullanmadan bir kez daha *L'hospital* kuralı

uygulanarak aynı sonuç elde edilebilirdi.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 3^+} (e^x - e^3) \ln(x - 3) = ?$$

Çözüm: $x = 3$ noktasının yakın sağ komşuluğunda $f(x) = \frac{1}{e^x - e^3}$, $g(x) = \ln(x - 3)$

fonksiyonları tanımlı ve $f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x - e^3)^2}$, $g'(x) = \frac{1}{x-3}$ sonlu türevleri var, ayrıca

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{e^x - e^3} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x - 3) = -\infty$ dir. $\frac{\infty}{\infty}$ tipinde belirsizlik için

$L'hospital$ kuralına göre $\lim_{x \rightarrow 3^+} (e^x - e^3) \ln(x - 3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\frac{1}{x-3}}{-\frac{e^x}{(e^x - e^3)^2}} =$
 $= -\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(e^x - e^3)^2}{(x-3)e^x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[(e^x - e^3)^2]'}{[(x-3)e^x]'} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(e^x - e^3)e^x}{e^x + (x-3)e^x} = 2 \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{e^x - e^3}{x-2} = 2 \cdot \frac{e^3 - e^3}{3-2} = \frac{0}{1} = 0$
 bulunur.

c) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} (\tan x)^{2x-\pi} = ?$

Çözüm: Kuvvet üstel fonksiyonunu limiti kuralını kullanalım. $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} (2x - \pi) = \pi - \pi = 0$ olduğunu dikkate alırsak verilmiş limit için $[\infty^0]$ tipinde

belirsizlik durumu sözkonusudur. Limiti değişken değiştirilmesi ile

$$L = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} (\tan x)^{2x-\pi} = \left[\frac{\pi}{2} - x = t \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - t \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+ \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\tan(\frac{\pi}{2} - t))^{-2t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} (\cot t)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\tan t)^{2t} = e^{\lim_{t \rightarrow 0^+} 2t \ln \tan t} = e^k \text{ şeklinde yazarak } k = \lim_{t \rightarrow 0^+} 2t \ln \tan t$$

limitine indirgeyelim. O halde $L'hospital$ kuralına göre

$$k = 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln \tan t = [0 \cdot \infty] = 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln \tan t}{\frac{1}{t}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(\ln \tan t)'}{(\frac{1}{t})'} = 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\tan t} \cos^2 t}{-\frac{1}{t^2}} =$$

$$-2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2}{\sin t \cos t} = -4 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2}{\sin 2t} = \left[\frac{0}{0} \right] = -4 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(t^2)'}{(\sin 2t)'} = -4 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t}{2 \cos 2t} = -4 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\cos 2t} =$$

$$= -\frac{4 \cdot 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0 \text{ dolayısıyla } L = e^k = e^0 = 1 \text{ bulunur.}$$

7. $y = x - \ln x^2$ fonksiyonunun monotonluk aralıklarını, ekstremum noktalarını ve ekstremum değerlerini bulunuz.

Çözüm: Fonksiyonun tanım kümesi $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ dir. Her

$x \neq 0$ noktasında sonlu $y' = (x - \ln x^2)' = 1 - \frac{2}{x}$ türevi vardır. Monotonluk şartını kullanarak y' türevinin işaretine göre monotonluk aralıklarını belirleyelim.

$y' = 1 - \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow x = 2 \in D(f)$ kritik noktası vardır. $-\infty < x < 0$ ve $2 < x < +\infty$ iken

$y' > 0$, $0 < x < 2$ iken $y' < 0$ olur. Bu ise $(-\infty, 0)$ ve $(2, +\infty)$ aralıklarında fonksiyonun artan, $(0, 2)$ aralığında azalan olması demektir. Bu durumda $x = 2$ noktasının solundan sağına geçişte türev işaretini eksiden artıya değiştiğinden $x = 2$ fonksiyonun yerel minimum noktası,

$y = f(2) = 2 - \ln 4$ ise yerel minimum değeridir. $x_{\min} = 2$, $y_{\min} = 2 - \ln 4$ dir. Elde edilmiş

özellikler tabloyla da verilebilir.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
	artandır	azalandır	artandır	

$$y_{\min} = 2 - \ln 4$$

8. $y = x^3 \ln x + 2x$ fonksiyonunun büyüklük aralıklarını ve grafiğinin büküm noktalarını bulunuz.

Çözüm: $f(x) = x^3 \ln x + 2x$ fonksiyonu $D(f) = (0, +\infty)$ aralığında tanımlı, elemanter fonksiyon olduğu için sürekli ayrıca her $x \in (0, +\infty)$ noktasında sonlu

$$f'(x) = (x^3 \ln x + 2x)' = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} + 2 = 3x^2 \ln x + x^2 + 2 \text{ ve}$$

$f''(x) = (3x^2 \ln x + x^2 + 2)' = 6x \ln x + 3x + 2x = 6x \ln x + 5x$ türevleri vardır. Bu durumda büyüklük aralıkları $f''(x) = 6x \ln x + 5x > 0$ ve $f''(x) = 6x \ln x + 5x < 0$ eşitsizliklerinin

çözümlerine göre belirlenebilir. $f''(x) = 6x \ln x + 5x = 0 \Leftrightarrow x(6 \ln x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ veya

$6 \ln x + 5 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D(f)$ ve $x = e^{-\frac{5}{6}} \in D(f)$ kritik noktası vardır. $x = e^{-\frac{5}{6}}$ fonksiyonun

dönüm noktası olabilir. $x \in (0, e^{-\frac{5}{6}}) \Rightarrow f''(x) = x(6 \ln x + 5) < 0$,

$x \in (e^{-\frac{5}{6}}, +\infty) \Rightarrow f''(x) = x(6 \ln x + 5) > 0$ yani $x = e^{-\frac{5}{6}}$ noktasının solunda fonksiyon

konkav, sağında konveksdir, dolayısıyla $x_2 = e^{-\frac{5}{6}}$ fonksiyonun dönüm noktasıdır. $(0, e^{-\frac{5}{6}})$

konkavlık aralığı, $(e^{-\frac{5}{6}}, +\infty)$ konvekslik aralığıdır.

$f(e^{-\frac{5}{6}}) = e^{-\frac{15}{6}} \ln e^{-\frac{5}{6}} + 2e^{-\frac{5}{6}} = -\frac{5}{6}e^{-\frac{15}{6}} + 2e^{-\frac{5}{6}} = y_0$ olmak üzere $(e^{-\frac{5}{6}}, y_0)$ noktası fonksiyon

grafiğinin dönüm (büküm) noktasıdır. Açıklanan özellikler ikinci mertebeden türevin işaret

tablosuyla da verilebilir.

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$	$+\infty$
$f''(x)$	tanımsız	-	+	
$f(x)$	tanımsız	konkav	y_0	konveks

9. $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$ fonksiyonunu türev yardımıyla inceleyerek grafiğini çiziniz.

Çözüm: Fonksiyon $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$ kümesinde tanımlıdır.

Grafiğin eksenlerle kesişim noktalarını bulalım. $x = 0$ için $y = \frac{0}{4-0^2} = 0$ grafik orijinden geçiyor. Benzer şekilde $y = \frac{x}{4-x^2} = 0$ iken $x = 0$ bulunur. $x \in (-\infty, -2)$ iken $f(x) > 0$,

$x \in (-2, 0)$ iken $f(x) < 0$, $x \in (0, 2)$ iken $f(x) > 0$ ve $x \in (2, +\infty)$ iken $f(x) < 0$ dir.

$f(-x) = \frac{-x}{4-(-x)^2} = -\frac{x}{4-x^2} = -f(x)$, $x \in D(f)$ olduğundan tek fonksiyondur dolayısıyla grafik

orijine nazaran simetriktr. Peryodik fonksiyon değildir. $f(x)$ kesir rasyonel fonksiyon

olduğundan $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$ aralıklarının her birinde süreklidir.

$x_1 = -2$, $x_2 = 2$ noktalarında tanımsız olduğundan bu noktalar süreksizlik noktalarıdır. Bu noktalarda tektaraflı limitleri bulalım.

$$f(-2-0) = \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{x}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{x}{2-x} \cdot \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{1}{2+x} = \frac{-2}{4} \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$f(-2+0) = \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x}{2-x} \cdot \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{1}{2+x} = \frac{-2}{4} \cdot (+\infty) = -\infty \text{ olduğundan } x = -2$$

doğrusu düşey asimptotdur. $f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x}{2-x} \cdot \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{1}{2+x} = \frac{2}{4} \cdot (+\infty) = +\infty$,

$$f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x}{2-x} \cdot \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{1}{2+x} = \frac{2}{4} \cdot (-\infty) = -\infty \text{ olduğundan } x = 2 \text{ doğrusu düşey}$$

asimptotdur. Tanım aralıklarının $x = -\infty$ ve $x = +\infty$ sınır noktalarında fonksiyonun

limitlerini bulalım. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{4}{x^2}-1} = \frac{0}{0-1} = 0$ olduğundan OX eksenini

$x \rightarrow +\infty$ şartında fonksiyon grafiğinin yatay asimptotudur. Benzer şekilde

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{4}{x^2}-1} = \frac{0}{0-1} = 0 \text{ ve } OX \text{ eksenini } x \rightarrow -\infty \text{ şartında fonksiyon}$$

grafiğinin yatay asimptotudur. Yatay asimptot var olduğundan $x \rightarrow \pm\infty$ şartında eğik

asimptot yoktur.

Her $x \in D(f)$ noktasında sonlu $f'(x) = \left(\frac{x}{4-x^2}\right)' = \frac{1 \cdot (4-x^2) - x \cdot (-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{4-x^2+2x^2}{(4-x^2)^2} = \frac{4+x^2}{(4-x^2)^2}$ sonlu

türevi vardır. $f'(x) = \frac{4+x^2}{(4-x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 4+x^2 = 0$ denkleminin $x \in \mathbb{R}$ kökü yoktur, dolayısıyla

fonksiyonun stasyoner (duraklama) noktası yoktur. O halde ekstremum noktası ve ekstremum

değeri de yoktur. $\forall x \in D(f) \Rightarrow 4+x^2 > 0$ ve $(4-x^2)^2 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ dolayısıyla

$(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$ aralıklarının her birinde fonksiyon artandır.

Her $x \in D(f)$ noktasında sonlu

$$f''(x) = \left(\frac{4+x^2}{(4-x^2)^2}\right)' = \frac{2x(4-x^2)^2 - 2(4-x^2)(-2x)(4+x^2)}{(4-x^2)^4} = \frac{2x(4-x^2)+4x(4+x^2)}{(4-x^2)^3} = \frac{24x+2x^3}{(4-x^2)^3} = \frac{2x(12+x^2)}{(4-x^2)^3}$$

sonlu trevi vardır. Buradan $f''(x) = \frac{2x(12+x^2)}{(4-x^2)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x(12+x^2) = 0$ ve $12+x^2 \neq 0 \Rightarrow x = 0$

bir tek kritik nokta bulunur. $x \in (-\infty, -2)$ iken $f''(x) > 0$, $x \in (-2, 0)$ iken $f''(x) < 0$,

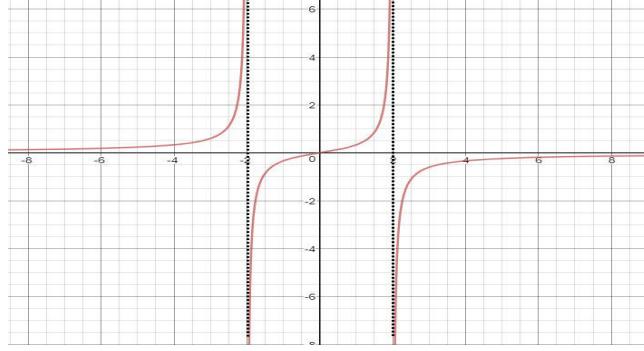
olduğundan $f(x)$ fonksiyonu $(-\infty, -2)$ de konveks (dışbükey), $(-2, 0)$ de konkavdır

(içbükeydir). $x \in (0, 2)$ iken $f''(x) > 0$, $x \in (2, +\infty)$ iken $f''(x) < 0$ olduğundan $f(x)$

fonksiyonu $(0, 2)$ de konveks, $(2, +\infty)$ de konkavdır (içbükeydir). Bu durumda $x = 0$ noktası

fonksiyonun, $(0, 0)$ noktası grafiğin büküm noktasıdır. (Yukarıdaki özellikler $f'(x)$, $f''(x)$ türelerinin işaret tablosuyla da verilebilir. Tablo çiziniz.)

Grafiğin $(0, 0)$ büküm noktasını, $x = -2$, $x = 2$ düşey asimptotlarını ve elde edilenlere göre grafiği çizelim.



10. İntegraller tablosuna göre bulunuz:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = ?$$

Çözüm: İntegralde $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1$, $x \in \mathbb{R}$ özdeşliği

$$\text{kullanılarak } I = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x}{\sin^4 x \cos^2 x} dx =$$

$$\int \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x \cos^2 x} dx + 2 \int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^4 x \cos^2 x} dx + \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + 2 \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{\cot^2 x}{\sin^2 x} dx =$$

$$= \tan x - 2 \cot x - \int \cot^2 x d \cot x = \tan x - 2 \cot x - \frac{1}{3} \cot^3 x + c \text{ elde edilir.}$$

11. Değişken değiştirme veya kısmi integrasyon yöntemiyle hesaplayınız:

$$\text{a) } \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^2 x + 4}} = ?$$

Çözüm: İntegrali, uygun değişken değiştirmesi uygulayıp basit integrale indirgeyerek hesaplayalım. Buna göre

$$I = \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^2 x + 4}} = [\sin x = t, dt = \cos x dx, x = \arcsin t] = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 4}} = \ln |t + \sqrt{t^2 + 4}| + c =$$

$$= \ln |\sin x + \sqrt{\sin^2 x + 4}| + c \text{ bulunur.}$$

$$\text{b) } \int x^3 e^{x^2} dx = ?$$

Çözüm: İntegrale kısmi integrasyon yöntemini uygulayalım. Buna göre $\int x^3 e^{x^2} dx =$

$$\frac{1}{2} \int x^2 e^{x^2} d(x^2) = \left[u = x^2, du = 2x dx, dv = e^{x^2} d(x^2), v = e^{x^2} \right] = \frac{1}{2} \int x^2 d(e^{x^2}) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[x^2 e^{x^2} - \int e^{x^2} d(x^2) \right] = \frac{1}{2} \left[x^2 e^{x^2} - e^{x^2} \right] + c \text{ bulunur.}$$

12. Rasyonel kesirlerin integrallerini bulunuz:

$$\text{a) } \int \frac{7x^3 - 9}{x^4 - 5x^3 + 6x^2} dx = ?$$

Çözüm: $f(x) = \frac{7x^3 - 9}{x^4 - 5x^3 + 6x^2}$ basit rasyonel kesiridir.

$x^4 - 5x^3 + 6x^2 = x^2(x^2 - 5x + 6) = x^2(x - 2)(x - 3)$ açılımına göre kesrin sade kesirlere

açılımı $\frac{7x^3 - 9}{x^4 - 5x^3 + 6x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 2} + \frac{D}{x - 3}$ şeklinde olmalıdır.

Sağ taraftaki kesirleri toplayarak $\frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2} = \frac{Ax(x-2)(x-3)+B(x-2)(x-3)+Cx^2(x-3)+Dx^2(x-2)}{x^2(x-2)(x-3)}$

ardından payları eşitleyerek

$$7x^3 - 9 = A(x^3 - 5x^2 + 6x) + B(x^2 - 5x + 6) + C(x^3 - 3x^2) + D(x^3 - 2x^2) =$$

$(A + C + D)x^3 + (-5A + B - 3C - 2D)x^2 + 6Ax + 6B$ özdeşliğini elde ederiz. Buradan

$$\text{polinomların eşitlik şartına göre} \begin{cases} A + C + D = 7 \\ -5A + B - 3C - 2D = 0 \\ 6A - 5B = 0 \\ 6B = -9 \end{cases} \quad \text{denklemler sistemi elde edilir.}$$

Sistemden, bilinen yöntemlerin biriyle $A = -\frac{5}{4}$, $B = -\frac{3}{2}$, $C = -\frac{47}{4}$, $D = 20$ bulunur. Bu

değerler açılımda yerine yazılarak $\int \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2} dx = \int \left(\frac{-5/4}{x} + \frac{-3/2}{x^2} + \frac{-47/4}{x-2} + \frac{20}{x-3} \right) dx =$

$$= -\frac{5}{4} \int \frac{dx}{x} - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2} - \frac{47}{4} \int \frac{dx}{x-2} + 20 \int \frac{dx}{x-3} = -\frac{5}{4} \ln|x| + \frac{3}{2x} - \frac{47}{4} \ln|x-2| + 20 \ln|x-3| + c \text{ veya}$$

$$\int \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2} dx = -\frac{5}{4} \ln|x| + \frac{3}{2x} - \frac{47}{4} \ln|x-2| + 20 \ln|x-3| + c \text{ elde edilir.}$$

b) $\int \frac{dx}{(x^2+x)(x^2+1)} = ?$

Çözüm: Basit kesirlere açılım hakkındaki teoreme göre $\frac{1}{(x^2+x)(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ olacak

şekilde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ sayıları bulmalıyız. Sağ taraftaki kesirleri toplayarak

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)} = \frac{A(x+1)(x^2+1)+Bx(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+x)}{x(x+1)(x^2+1)} \text{ ardından payları eşitleyerek}$$

$$A(x+1)(x^2+1) + B(x^3+x) + (Cx+D)(x^2+x) =$$

$(A+B+C)x^3 + (A+C+D)x^2 + (A+B+D)x + A = 1$ özdeşliğini elde ederiz. Buradan

$$\text{polinomların eşitlik şartına göre} \begin{cases} A + B + C = 0 \\ A + C + D = 0 \\ A + B + D = 0 \\ A = 1 \end{cases} \quad \text{denklemler sistemi elde edilir. Sistemi}$$

çözerek $A = 1$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = -\frac{1}{2}$, buluruz. Bu değerler açılımda yerine yazılarak

$$\int \frac{dx}{(x^2+x)(x^2+1)} = \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{x+1}{x^2+1} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln|x^2+1| - \frac{1}{2} \arctan x + c \text{ elde edilir.}$$

13. İrrasyonel ifadelerin integrallerini bulunuz:

a) $\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx = ?$

Çözüm: $\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx = (ax+b)\sqrt{3-2x-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ olacak şekilde a, b ve $\lambda \in \mathbb{R}$

sayılarını bulalım. a, b ve λ bilinmeyenlerini bulmak için eşitliğin her iki tarafının türevini

$$\text{alalım. Buna göre } \left(\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx \right)' = \left[(ax+b)\sqrt{3-2x-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} \right]' \text{ veya}$$

$$\frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}} = a\sqrt{3-2x-x^2} + (ax+b) \frac{(3-2x-x^2)'}{2\sqrt{3-2x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{3-2x-x^2}} \Rightarrow$$

$$3x^2-5x = a(3-2x-x^2) - (ax+b) \frac{2+2x}{2} + \lambda \Rightarrow 3x^2-5x = a(3-2x-x^2) - (ax+b)(1+x) + \lambda \Rightarrow$$

$$3x^2 - 5x = -2ax^2 - (3a + b)x + 3a - b + \lambda \Rightarrow \begin{cases} -2a = 3 \\ -3a - b = -5 \\ 3a - b + \lambda = 0 \end{cases} \text{ elde edilir. Bu sistemi}$$

bilinen yöntemlerin biriyle çözerek $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{19}{2}$, $\lambda = 14$ buluruz. Sonuçta $\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx =$
 $(-\frac{3}{2}x + \frac{19}{2})\sqrt{3-2x-x^2} + 14 \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \frac{19-3x}{2} \cdot \sqrt{3-2x-x^2} + 14 \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}} =$
 $= \frac{19-3x}{2} \cdot \sqrt{3-2x-x^2} + 14 \arcsin \frac{x+1}{2} + c$ elde edilir.

b) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}} = ?$

Çözüm: İntegrali $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}} = \int \frac{xdx}{(x+1)^{\frac{1}{3}}+(x+1)^{\frac{1}{2}}}$ şeklinde yazalım. $\text{ekok}(3, 2) = 6$ olduğu için

$x + 1 = t^6$ değişken değiştiyesi yapalım. Buna göre $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}} =$
 $[x + 1 = t^6, x = t^6 - 1, dx = 6t^5 dt] = \int \frac{(t^6-1)6t^5 dt}{t^2+t^3} = \int \frac{(t^6-1)6t^5 dt}{t^2(1+t)} = 6 \int \frac{(t^6-1)t^3 dt}{1+t} =$
 $= 6 \int \frac{(t^9-t^3)dt}{1+t} = 6 \int (t^8 - t^7 + t^6 - t^5 + t^4 - t^3) dt = 6 \left(\frac{t^9}{9} - \frac{t^8}{8} + \frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} \right) + c =$
 $= \frac{2}{3} \sqrt[6]{(x+1)^9} - \frac{3}{4} \sqrt[6]{(x+1)^8} + \frac{6}{7} \sqrt[6]{(x+1)^7} - (x+1) + \frac{6}{5} \sqrt[6]{(x+1)^5} - \frac{3}{2} \sqrt[6]{(x+1)^4} + c$

c) $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2} dx = ?$

Çözüm: İntegrali standart formda yazalım ve binom diferansiyelinin integrali için uygun değişken değiştirmesini kullanarak rasyonel kesrin integraline indirgeyelim

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2} dx = \int x^{-2} (1+x^3)^{\frac{1}{3}} dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} m = -2, n = 3, p = \frac{1}{3}, \frac{m+1}{n} + p = \frac{-2+1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \in \mathbb{Z} \\ 1+x^3 = t^3 x^3, x = (t^3-1)^{-\frac{1}{3}}, dx = -\frac{1}{3} (t^3-1)^{-\frac{4}{3}} \cdot 3t^2 dt \end{array} \right] = \int x^{-2} (1+x^3)^{\frac{1}{3}} dx =$$

$$= - \int (t^3-1)^{\frac{2}{3}} t (t^3-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} (t^3-1)^{-\frac{4}{3}} \cdot 3t^2 dt = - \int (t^3-1)^{-1} t^3 dt = - \int \frac{t^3}{t^3-1} dt =$$

$$= - \int \left(\frac{t^3-1}{t^3-1} + \frac{1}{t^3-1} \right) dt = - \int \frac{t^3-1}{t^3-1} dt - \int \frac{dt}{t^3-1} =$$

$$= - \int dt - \int \frac{dt}{t^3-1} = -t - \int \frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)} = -t - \int \left(\frac{A}{t-1} + \frac{Ct+D}{t^2+t+1} \right) dt. \text{ Buradaki}$$

bilinmeyen A, B, C cabitlerini $\frac{A}{t-1} + \frac{Ct+D}{t^2+t+1} = \frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)}$ sağlanacak şekilde seçelim.

$$A(t^2 + t + 1) + (t - 1)(Ct + D) = 1 \text{ özdeşliğinden } At^2 + At + A + Ct^2 + Dt - Ct - D = 1 \Rightarrow$$

$$(A + C)t^2 + (A - C + D)t + A - D = 1 \Rightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ A - C + D = 0 \\ A - D = 1 \end{cases} \text{ sistemini elde ederiz. Bu}$$

sistemden $3A = 1, C = -A, D = A - 1 \Rightarrow A = 1/3, C = -1/3, D = -2/3$ bulunur.

$$\text{Katsayıların değerlerini integralde dikkate alarak } I = -t - \int \left(\frac{A}{t-1} + \frac{Ct+D}{t^2+t+1} \right) dt =$$

$$= -t - \int \left(\frac{1/3}{t-1} - \frac{t/3+2/3}{t^2+t+1} \right) dt = -t - \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{3} \int \frac{t+2}{t^2+t+1} dt = -t - \frac{1}{3} \ln |t-1| + \frac{1}{6} \int \frac{2t+1+3}{t^2+t+1} dt =$$

$$= -t - \frac{1}{3} \ln |t-1| + \frac{1}{6} \int \frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} + \frac{1}{6} \int \frac{3}{t^2+t+1} dt =$$

$$= -t - \frac{1}{3} \ln |t-1| + \frac{1}{6} \ln |t^2+t+1| + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= -t - \frac{1}{3} \ln |t-1| + \frac{1}{6} \ln |t^2+t+1| + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\
&-t - \frac{1}{3} \ln |t-1| + \frac{1}{6} \ln |t^2+t+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c = \\
&= \left(-t - \frac{1}{3} \ln |t-1| + \frac{1}{6} \ln |t^2+t+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) \Big|_{t=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}} + c = \\
&= -\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x} - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt[3]{1+x^3}-x}{\sqrt{3\sqrt{(1+x^3)^2+x}\sqrt[3]{1+x^3+x^2}}} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}} + c
\end{aligned}$$

14. Trigonometrik ifadelerin integrallerini bulunuz:

a) $\int \frac{(\tan x + \sin x) dx}{\cos^5 x} = ?$

Çözüm: İntegralaltı ifadeyi dönüştürerek uygun değişken değişimesi yardımıyla integrali hesaplayalım. Buna göre

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{(\tan x + \sin x) dx}{\cos^5 x} = \int \frac{\sin x(1+\cos x) dx}{\cos^6 x} = [\cos x = t, \quad dt = -\sin x dx] = -\int \frac{(1+t) dt}{t^6} = \\
&= -\int \left(\frac{1}{t^6} + \frac{1}{t^5}\right) dt = -\int \frac{dt}{t^6} - \int \frac{dt}{t^5} = -\int t^{-6} dt - \int t^{-5} dt = \frac{1}{5t^5} + \frac{1}{4t^4} + c = \frac{1}{5\cos^5 x} + \frac{1}{4\cos^4 x} + c
\end{aligned}$$

elde edilir.

b) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = ?$

Çözüm: İntegralde $\tan \frac{x}{2} = t$ evrensel değişken değişimesi yapalım. Buna göre

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \left[x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \right] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \\
&= 2 \int \frac{dt}{2t+1-t^2} = -2 \int \frac{dt}{(t-1)^2 - (\sqrt{2})^2} = -2 \int \frac{d(t-1)}{(t-1)^2 - (\sqrt{2})^2} = -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}} \right| + c = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}{\tan \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}} \right| + c \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

c) $\int x \sin 2x \cos 3x dx = ?$

Çözüm: İntegralde $\sin 2x \cos 3x = \frac{1}{2} (\sin 5x - \sin x)$ özdeşliğini kullanarak

$$I = \int x \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int x (\sin 5x - \sin x) dx = \frac{1}{2} \int x \sin 5x dx - \frac{1}{2} \int x \sin x dx = I_1 - I_2$$

yazabiliriz. Elde edilen integrallere kısmi integrasyon formülünü uygulayalım. Buna göre

$$I_1 = \frac{1}{2} \int x \sin 5x dx = [u = x, \quad dv = \sin 5x dx, \quad du = dx, \quad v = -\frac{1}{5} \cos 5x] =$$

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{5} x \cos 5x + \frac{1}{5} \int \cos 5x dx \right] = -\frac{1}{10} x \cos 5x + \frac{1}{50} \sin 5x + c \text{ ve}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int x \sin x dx = [u = x, \quad dv = \sin x dx, \quad du = dx, \quad v = -\cos x] =$$

$$\frac{1}{2} \left[-x \cos x + \int \cos x dx \right] = -\frac{1}{2} x \cos x + \frac{1}{2} \sin x + c \text{ elde edilir. Sonuçta}$$

$$I = \int x \sin 2x \cos 3x dx = I_1 - I_2 = -\frac{1}{10} x \cos 5x + \frac{1}{50} \sin 5x + \frac{1}{2} x \cos x - \frac{1}{2} \sin x + c \text{ elde edilir.}$$

d) $\int \cot^5 x dx = ?$

Çözüm: İntegrale $\cot x = t$ değişken değiştirmesini uygulayalım. Buna göre

$$\begin{aligned}
\int \cot^5 x dx &= [\cot x = t, \quad dt = -(1 + \cot^2 x) dx, \quad dx = -\frac{dt}{1+t^2}] = -\int \frac{t^5 dt}{1+t^2} = -\int \frac{t^5+t^3-t^3-t+t}{1+t^2} dt = \\
&= -\int \left[\frac{t^3(1+t^2)}{1+t^2} - \frac{t(1+t^2)}{1+t^2} + \frac{t}{1+t^2} \right] dt = -\int [t^3 - t + \frac{t}{1+t^2}] dt = -\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \int \frac{t dt}{1+t^2} =
\end{aligned}$$

$$-\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} = -\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln |1+t^2| + c = -\frac{\cot^4 x}{4} + \frac{\cot^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln (1 + \cot^2 x) + c$$

bulunur.