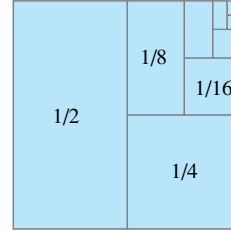


SONSUZ DİZİLER VE SERİLER

GİRİŞ İki hatta birkaç sayının nasıl toplanacağını herkes bildiği halde sonsuz tane sayının nasıl toplanacağı o kadar açık değildir. Bu bölümde sonsuz seriler teorisinin konusu olan bu gibi soruları çalışacağız. Sonsuz serilerin toplamaları bazen

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$

toplamında olduğu gibi sonludur. Bu toplam geometrik olarak aşağıda gösterildiği gibi birim karenin daima ikiye bölünmesiyle elde edilen alanlarla temsil edilir. Küçük dikdörtgenlerin alanlarının toplamı içini doldurmuş oldukları birim karenin alanını verir. Toplanan terim sayısını arttırdıkça toplam alana daha çok yaklaşılır.



Bazı sonsuz serilerin toplamaları ise

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

toplamında olduğu gibi sonlu değildir. İlk birkaç terimin toplamı terim sayısı arttıkça giderek çoğalır. Yeteri kadar terim toplamakla önceden belirlenmiş herhangi bir sabit sayı aşılar.

Bazı serilerde ise,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

harmonik serisinde olduğu gibi toplamın sonlu olup olmadığı açık değildir. Toplanan terim sayısını arttırdıkça sonlu bir değere yaklaşıp yaklaşılmadığı veya sınırsız olarak büyüyen bir toplam elde edilip edilmediği açık değildir.

Sonsuz diziler ve seriler teorisini geliştirirken, önemli bir uygulama türetilen bir $f(x)$ fonksiyonunu x 'in kuvvetlerinin bir sonsuz toplamı olarak temsil etme metodu verir. Bu metotla polinomların nasıl hesaplandığı, türetildiği ve integre edildiği hakkındaki bilgilerimizi polinomlardan çok daha genel olan bir fonksiyonlar sınıfına genişletebiliriz. Ayrıca bir fonksiyonu sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının sonsuz bir toplamı olarak temsil etmenin bir yöntemini inceleyeceğiz. Bu yöntem fonksiyonları incelemek için güçlü bir araç verecektir.

11.1

Diziler

TARİHSEL DENEME

Diziler ve Seriler

Bir dizi verilen bir sıra ile

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

gibi bir sayılar listesidir. $a_1, a_2, a_3, \dots$ vs. her biri bir sayıyı temsil eder. Bunlar dizinin **terimleri** dir. Örneğin,

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots, 2n, \dots$$

dizisinin ilk terimi $a_1 = 2$, ikinci terimi $a_2 = 4$ ve n .terimi $a_n = 2n$ dir. n tamsayısına a_n 'nin **indisi** denir ve a_n 'nin listenin neresinde bulunduğunu gösterir. Genelde

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

dizisini 1'i a_1 'e, 2'yi a_2 'ye, 3'ü a_3 'e ve genel olarak pozitif n tamsayısını n .terim a_n 'ye gönderen bir fonksiyon olarak düşünebiliriz. Bu, bir dizinin aşağıdaki formel tanımına yol açar.

TANIM**Sonsuz Dizi**

Bir **sonsuz sayı dizisi** tanım kümesi pozitif tamsayılar kümesi olan bir fonksiyondur.

Örneğin

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots, 2n, \dots$$

dizisi ile eşlenen fonksiyon 1'i $a_1 = 2$ 'ye 2'yi $a_2 = 4$ 'e vs. gönderir. Bu dizinin genel davranışı

$$a_n = 2n$$

formülü ile tanımlanır.

Tanım kümesini verilen bir n_0 sayısından büyük tamsayılar olarak da alabilir ve bu tipte diziler de düşünebiliriz.

$$12, 14, 16, 18, 20, 22, \dots$$

dizisi $a_n = 10 + 2n$ formülü ile tanımlanır. Bu dizi ayrıca n indisi 6 dan başlayıp artmak üzere daha basit olan $b_n = 2n$ formülü ile de tanımlanabilir. Böyle basit formüller elde edebilmek için dizinin ilk indisini herhangi bir sayı olarak alabiliriz. Yukarıdaki $\{a_n\}$ dizisi a_1 ile başlarken $\{b_n\}$ dizisi b_6 ile başlamaktadır. Sıra önemlidir. Zira 1, 2, 3, 4... dizisi 1, 2, 3, 4 ... dizisi ile aynı değildir.

Diziler

$$a_n = \sqrt{n},$$

$$b_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n},$$

$$c_n = \frac{n-1}{n},$$

$$d_n = (-1)^{n+1}$$

gibi terimlerini belirten kuralları yazarak veya

$$\{a_n\} = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}, \dots\}$$

$$\{b_n\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \dots\right\}$$

$$\{c_n\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots\right\}$$

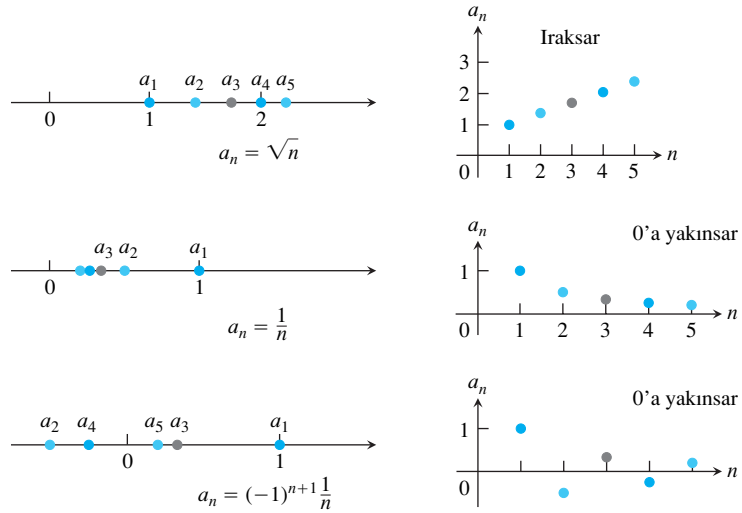
$$\{d_n\} = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots\}$$

şeklinde listelenerek tanımlanabilirler. Bazen

$$\{a_n\} = \{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$$

da yazarız.

Şekil 11.1, dizileri grafik olarak temsil etmenin iki yolunu göstermektedir. İlki, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ terimlerinden ilk birkaçını reel eksen üzerinde işaretler. İkinci yöntem diziyi tanımlayan fonksiyonun grafiğini gösterir. Fonksiyon sadece tamsayılarda tanımlıdır ve grafik xy -düzleminde, $(1, a_1), (2, a_2), \dots, (n, a_n), \dots$ noktalarına işaretlenmiş bazı noktalardan oluşur.



ŞEKİL 11.1 Diziler, reel eksen üzerinde noktalar veya yatay n -ekseni terimin indis sayısı, düşey a_n eksenini de terimin değeri olmak üzere xy -düzleminde noktalar olarak temsil edilebilirler.

Yakınsaklık ve İraksaklık

Bazen bir dizideki sayılar, n indisi arttıkça, tek bir değere yaklaşır. n arttıkça terimleri 0'a yaklaşan

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$$

dizisinde ve terimleri 1'e yaklaşan

$$\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, 1 - \frac{1}{n}, \dots\right\}$$

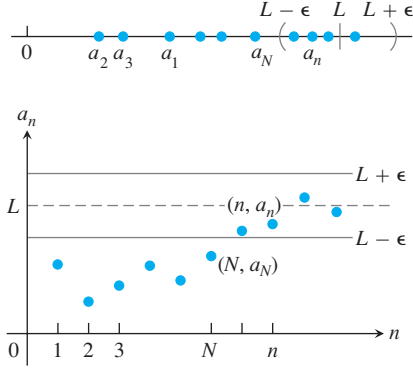
dizisinde durum böyledir. Diğer taraftan

$$\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}, \dots\}$$

gibi dizilerde n indisi arttıkça herhangi bir sayıdan daha büyük olan terimler vardır. Ayrıca

$$\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots\}$$

gibi diziler asla tek bir değere yaklaşımadan 1 ve -1 arasında ileri geri sıçrar. Aşağıdaki tanım bir dizinin bir limit değere yakınsamasının anlamını açıklamaktadır. Tanım şunu söylemektedir: bir dizide n indisini bir N sayısından büyük alarak dizinin terimleri üzerinde yeteri kadar ilerlersek a_n ile dizinin limiti arasındaki fark önceden belirlenmiş herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısından küçük kalır.



ŞEKİL 11.2 $y = L$, $\{(n, a_n)\}$ noktalar dizisinin yatay asimptotu ise $a_n \rightarrow L$ dir. Yukarıdaki şekilde a_N 'den sonraki bütün a_n 'ler L 'nin ϵ civarındadır.

TANIMLAR

Yakınsaklık, İraksaklık, Limit

Her pozitif ϵ sayısına

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \epsilon$$

$\{a_n\}$ dizisi L sayısına **yakınsar**. Böyle bir L sayısı mevcut değilse, $\{a_n\}$ **ıraksar** deriz.

$\{a_n\}$ dizisi L 'ye yakınsıyorsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ veya kısaca $a_n \rightarrow L$ yazar ve L 'ye dizinin **limiti** deriz (Şekil 11.2).

Tanım, x sonsuza giderken bir $f(x)$ fonksiyonunun limiti tanımına çok benzerdir (Bölüm 2.4'te $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$). Dizilerin limitlerini hesaplamak için bu bağıntıyı kullanılacağız.

ÖRNEK 1 Tanımı Uygulamak

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} k = k \quad (k \text{ herhangi bir sabit})$$

olduğunu gösterin.

Çözüm

(a) $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$n > N \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon$$

gerektirmesi sağlanacak şekilde bir N tamsayısının var olduğunu göstermemiz gerekir. Yukarıdaki gerektirme, $(1/n) < \epsilon$ veya $n > 1/\epsilon$ ise geçerli olacaktır. N , $1/\epsilon$ 'den daha büyük bir tamsayı ise gerektirme her $n > N$ için geçerli olur. Bu, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$ olduğunu ispatlar.

(b) $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |k - k| < \epsilon$$

gerektirmesi sağlanacak şekilde bir N tamsayısının var olduğunu göstermemiz gerekir. $k - k = 0$ olduğundan, herhangi bir pozitif N sayısı kullanırsak gerektirme geçerli olacaktır. Bu herhangi bir k sabiti için $\lim_{n \rightarrow \infty} k = k$ olduğunu ispatlar. ■

TARİHSEL BİYOGRAFI

Nicole Oresme
(1320–1382 dolaylarında)

ÖRNEK 2 İraksak Bir Dizi

$\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots\}$ dizisinin ıraksadığını gösterin.

Çözüm Dizinin bir L sayısına yakınsadığını varsayın. Limit tanımında $\epsilon = 1/2$ seçerek, n indisi bir N sayısından büyük olan bütün a_n dizi terimleri L 'nin $\epsilon = 1/2$ civarında bulunmaları gerekir. Dizinin diğer her terimi gibi 1 terimi tekrarlı olarak gözüktüğünden 1 sayısı L 'nin $\epsilon = 1/2$ civarında bulunmalıdır. Bundan dolayı $|L - 1| < 1/2$ veya buna denk olarak $1/2 < L < 3/2$ olmalıdır. Benzer şekilde -1 sayısı da keyfi büyük indislerle tekrarlı olarak dizide gözükür. Dolayısıyla, $|L - (-1)| < 1/2$ veya buna denk olarak $-3/2 < L < -1/2$ eşitsizlikleri de ayrıca sağlanmalıdır. Fakat bu aralıklar örtüşmediklerinden L sayısı $(1/2, 3/2)$ ve $(-3/2, -1/2)$ ve aralıklarının ikisinde birden bulunamaz. Bu nedenle böyle bir L limiti yoktur ve dolayısıyla dizi ıraksar.

Şuna dikkat edin aynı düşünce sadece $1/2$ için değil 1'den küçük herhangi bir pozitif ϵ sayısı için de geçerlidir. ■

$\{\sqrt{n}\}$ dizisi de ıraksar fakat nedeni farklıdır. n indisinin artmasıyla birlikte terimleri herhangi bir sabit sayıdan daha büyük olur. Bu dizinin davranışını

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$$

yazarak tanımlarız. Bir dizinin limitini sonsuz olarak yazmakla, n arttıkça a_n ile ∞ arasındaki farkın azaldığını söylemiyoruz. Dizinin yakınsadığı bir sonsuz sayısının var olduğunu da söylemiyoruz. Sadece n arttıkça, a_n 'nin sayısal olarak büyüdüğünü ve nihayetinde herhangi sabit bir sayıdan büyük kaldığını açıklayan bir notasyon kullanıyoruz.

TANIM Sonsuza İraksama

Her M sayısına karşılık, N 'den büyük her n için $a_n > M$ olacak şekilde bir N tamsayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi **sonsuz ıraksar** deriz. Bu şart sağlanırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{veya} \quad a_n \rightarrow \infty$$

yazarız. Benzer şekilde, her m sayısına karşılık, her $n > N$ için $a_n < m$ olacak şekilde bir N tamsayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi **eksi sonsuz ıraksar** deriz ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{veya} \quad a_n \rightarrow -\infty$$

yazarız.

Bir dizi sonsuza veya eksi sonsuza ıraksamadan da ıraksak olabilir. Bunu Örnek 2'de gördük. Ayrıca $\{1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, \dots\}$ ve $\{1, 0, 2, 0, 3, 0, \dots\}$ dizileri de böyle dizilere örnektir.

Dizilerin Limitlerini Hesaplamak

Daima dizi limitinin formel tanımını, ϵ 'ları ve N 'leri hesaplayarak, kullanmak zorunda olsaydık dizilerin limitlerini hesaplamak zahmetli bir iş olurdu. Neyse ki birkaç basit örnek geliştirebilir ve bunları birçok dizinin limitlerinin çabucak incelenmesinde kullanabiliriz. Dizilerin nasıl birleştirilebileceklerini ve nasıl karşılaştırılabileceklerini anlamamız gerekecektir. Diziler, tanım kümeleri pozitif tamsayılar kümesine kısıtlanmış fonksiyonlar olduklarından Bölüm 2'de fonksiyon limitleri hakkındaki teoremlerin diziler için versiyonlarının olması çok şaşırtıcı değildir.

TEOREM 1

$\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ reel sayı dizileri, A ve B reel sayılar olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ ise aşağıdaki kurallar geçerlidir.

1. *Toplama Kuralı:* $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$
2. *Fark Kuralı:* $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = A - B$
3. *Çarpım Kuralı:* $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
4. *Sabit Çarpım Kuralı:* $\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot b_n) = k \cdot B$ (Herhangi bir k)
5. *Bölüm Kuralı:* $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ $B \neq 0$ için

İspatı Bölüm 2.2'deki Teorem 1'in ispatına benzerdir ve atlanacaktır.

ÖRNEK 3 Teorem 1'i Uygulamak

Teorem 1'i Örnek 1'deki limitleri birleştirirsek şunları buluruz:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = -1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = -1 \cdot 0 = 0$ Sabit Çarpım Kuralı ve Örnek 1a
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1$ Fark Kuralı ve Örnek 1a
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} = 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 5 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ Çarpım Kuralı
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 7n^6}{n^6 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4/n^6) - 7}{1 + (3/n^6)} = \frac{0 - 7}{1 + 0} = -7.$ Toplama ve Bölüm Kuralı ■

Teorem 1'i uygularken dikkatli olun. Teorem, örneğin, $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizilerinin $\{a_n + b_n\}$ toplamlarının limiti varsa $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizilerinin her birinin limitinin var olduğunu söylemiyor. Meselâ $\{a_n\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ve $\{b_n\} = \{-1, -2, -3, \dots\}$ dizilerinin ikisi de iraksaktır, fakat toplamları $\{a_n + b_n\} = \{0, 0, 0, \dots\}$ açık olarak 0'a yakınsar.

Teorem 1'in bir sonucu şudur: iraksak bir dizinin sıfırdan farklı her katı iraksar. Tersine, bir $c \neq 0$ için $\{ca_n\}$ dizisinin yakınsadığını varsayın. Bu durumda Teorem 1'deki Sabit Çarpım Kuralında $k = 1/c$ alarak

$$\left\{\frac{1}{c} \cdot ca_n\right\} = \{a_n\}$$

dizisinin yakınsadığını görürüz. Böylece, $\{ca_n\}$ yakınsamadıkça $\{a_n\}$ yakınsamaz. Eğer $\{a_n\}$ yakınsamazsa $\{ca_n\}$ yakınsamaz.

Aşağıdaki teorem Bölüm 2.2'deki Sandviç Teoreminin dizi versiyonudur. Alıştırma 95'te teoremi ispatlamanız istenmektedir.

TEOREM 2 Diziler İçin Sandviç Teoremi

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ reel sayı dizileri olsunlar. Belirli bir N indisinden büyük her n için $a_n \leq b_n \leq c_n$ geçerliyse ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ ise, bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ olur.

Teorem 2'nin hemen görülen bir sonucu, $|b_n| \leq c_n$ ve $c_n \rightarrow 0$ ise, $-c_n \leq b_n \leq c_n$ olduğundan $b_n \rightarrow 0$ olmasıdır. Aşağıdaki örnekte bunu kullanıyoruz.

ÖRNEK 4 Sandviç Teoremini Uygulamak

$1/n \rightarrow 0$ olduğunda, aşağıdakileri biliyoruz.

- (a) $\frac{\cos n}{n} \rightarrow 0$ çünkü $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$;
 (b) $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ çünkü $0 \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$;
 (c) $(-1)^n \frac{1}{n} \rightarrow 0$ çünkü $-\frac{1}{n} \leq (-1)^n \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$. ■

Teorem 1 ve 2'nin uygulanması yakınsak bir diziye sürekli bir fonksiyonun uygulanmasının yakınsak bir dizi oluşturacağını belirten bir teoremle genişletilir. Teoremi ispatsız veriyoruz (Alıştırma 96).

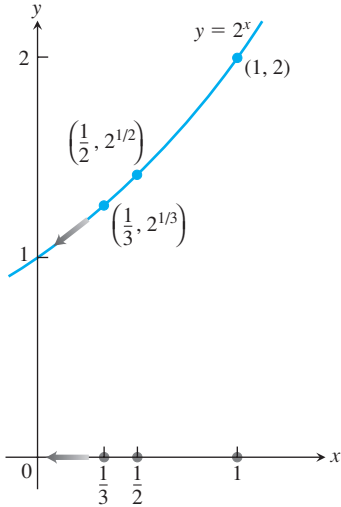


FIGURE 11.3 $n \rightarrow \infty$ iken, $1/n \rightarrow 0$ ve $2^{1/n} \rightarrow 2^0$ dır. (Örnek 6).

TEOREM 3 Diziler İçin Sürekli Fonksiyon Teoremi

$\{a_n\}$ bir reel sayı dizisi olsun. $a_n \rightarrow L$ ve f fonksiyonu L 'de sürekli ve bütün a_n 'lerde tanımlı ise, $f(a_n) \rightarrow f(L)$ olur.

ÖRNEK 5 Teorem 3'ü Uygulamak

$\sqrt{(n+1)/n} \rightarrow 1$ olduğunu gösterin.

Çözüm $(n+1)/n \rightarrow 1$ olduğunu biliyoruz. Teorem 3'te $f(x) = \sqrt{x}$ ve $L = 1$ almak $\sqrt{(n+1)/n} \rightarrow \sqrt{1} = 1$ verir. ■

ÖRNEK 6 $\{2^{1/n}\}$ Dizisi

$\{1/n\}$ dizisi 0'a yakınsar. Teorem 3'te $a_n = 1/n$, $f(x) = 2^x$ ve $L = 0$ olarak, $2^{1/n} = f(1/n) \rightarrow f(L) = 2^0 = 1$ olduğunu görürüz. $\{2^{1/n}\}$ dizisi 1'e yakınsar (Şekil 11.3). ■

l'Hôpital Kuralını Kullanmak

Aşağıdaki teorem bazı dizilerin limitini bulmada l'Hôpital kuralını kullanmamızı sağlar. Teorem, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ile $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ arasındaki bağıntıyı sağlar.

TEOREM 4

$f(x)$ 'in her $x \geq n_0$ için tanımlı bir fonksiyon olduğunu ve $\{a_n\}$ 'nin her $n \geq n_0$ için $a_n = f(n)$ olacak şekilde bir reel sayı dizisi olduğunu varsayın. Bu durumda,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{olur.}$$

İspat $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ olduğunu varsayın. Her pozitif ϵ sayısına karşılık

$$x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

gerektirmesi gerçekleştirilecek şekilde bir M sayısı vardır.

N tamsayısı M 'den büyük ve n_0 'dan büyük veya eşit olsun. Bu durumda

$$n > N \quad \Rightarrow \quad a_n = f(n) \quad \text{ve} \quad |a_n - L| = |f(n) - L| < \epsilon. \quad \blacksquare$$

ÖRNEK 7 L'Hôpital Kuralını Uygulamak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0. \text{ olduğunu gösterin.}$$

Çözüm $(\ln x)/x$ fonksiyonu her $x \geq 1$ için tanımlıdır ve pozitif tamsayılarda verilen diziyle uyuşur. Dolayısıyla, Teorem 4'e göre, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)/n$, eğer varsa $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln x)/x$ 'e eşit olacaktır. L'Hôpital kuralının bir kere uygulanışı

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

olduğunu gösterir. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)/n = 0$ sonucunu çıkarırız. ■

Bir dizinin limitini bulmak için L'Hôpital kuralını kullanırken, genellikle n 'ye sürekli bir reel değişken gibi davranır ve doğrudan n 'ye göre türev alırız. Bu bizi Örnek 7'de yaptığımız gibi a_n formülünü yeniden yazmaktan kurtarır.

ÖRNEK 8 L'Hôpital Kuralını Uygulamak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{5n} \text{ 'yi bulun.}$$

Çözüm l'Hôpital kuralına göre (n 'ye göre türev alarak)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{5n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot \ln 2}{5} \\ &= \infty \end{aligned}$$

buluruz. ■

ÖRNEK 9 Yakınsaklığı Belirlemek İçin L'Hôpital Kuralını Uygulamak

n . terimi

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n$$

colan dizi yakınsar mı? Yakınsarsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 'yi bulun.

Çözüm Limit 1^∞ belirsiz formuna götürür. Önce a_n 'nin doğal logaritmasını alarak formu $\infty \cdot 0$ haline getirirsek, l'Hôpital kuralını uygulayabiliriz.

$$\begin{aligned} \ln a_n &= \ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n \\ &= n \ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right). \end{aligned}$$

Bu durumda,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right) && \infty \cdot 0 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right)}{1/n} && \frac{0}{0} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2/(n^2-1)}{-1/n^2} && \text{l'Hôpital Kuralı} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2-1} = 2.
 \end{aligned}$$

bulunur. $\ln a_n \rightarrow 2$ ve $f(x) = e^x$ sürekli olduğundan, Teorem 4

$$a_n = e^{\ln a_n} \rightarrow e^2$$

olduğunu söyler. $\{a_n\}$ dizisi e^2 'ye yakınsar. ■

Sık Karşılaşılan Limitler

Aşağıdaki teorem sık sık karşılaşılan bazı limitleri vermektedir.

TEOREM 5

Aşağıdaki altı dizi karşılarında gösterilen limitlere yakınsarlar.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1 \quad (x > 0)$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \quad (|x| < 1)$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x \quad (\text{her } x \text{ için})$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (\text{her } x \text{ için})$

(3)–(6) formüllerinde, $n \rightarrow \infty$ iken x sabit kalır.

Faktöriyel Gösterim

$n!$ (“ n faktöriyel”) 1’den n ’ye kadar olan tamsayıların $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ çarpımı anlamına gelir

$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ olduğuna dikkat edin. Yani

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \text{ ve}$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5 \cdot 4! = 120 \text{ 'dir.}$$

0!’yi 1 olarak tanımlarız. Faktöriyeller, aşağıdaki tablonun gösterdiği gibi, ekspanansiyellerden bile hızlı büyürler.

n	e^n (yuvarlanmış)	$n!$
1	3	1
5	148	120
10	22,026	3,628,800
20	4.9×10^8	2.4×10^{18}

İspat Birinci limit Örnek 7 de hesaplanmıştı. Sonraki ikisi logaritma olarak ve Teorem 4’ü uygulayarak ispatlanabilir (Alıştırma 93 ve 94). Diğer ispatlar Ek 3’te verilmiştir. ■

ÖRNEK 10 Teorem 5’i Uygulamak

$$(a) \frac{\ln(n^2)}{n} = \frac{2 \ln n}{n} \rightarrow 2 \cdot 0 = 0 \quad \text{Formül 1}$$

$$(b) \sqrt[n]{n^2} = n^{2/n} = (n^{1/n})^2 \rightarrow (1)^2 = 1 \quad \text{Formül 2}$$

$$(c) \sqrt[n]{3n} = 3^{1/n} (n^{1/n}) \rightarrow 1 \cdot 1 = 1 \quad x=3 \text{ ile Formül 3 ve Formül 2}$$

- (d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ $x = -\frac{1}{2}$ ile Formül 4
- (e) $\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{-2}{n}\right)^n \rightarrow e^{-2}$ $x = -2$ ile Formül 5
- (f) $\frac{100^n}{n!} \rightarrow 0$ $x = 100$ ile Formül 6 ■

Tekrarlamalı Tanımlar

Şimdiye kadar, her a_n 'yi doğrudan n 'nin değerinden hesapladık. Ama diziler genellikle

1. Başlangıç teriminin veya terimlerinin değer(ler)i ve
2. Sonraki terimleri kendilerinden önce gelen terimlerden hesaplamak için **tekrarlama formülü** adı verilen bir kural verilerek tanımlanır.

ÖRNEK 11 Tekrarlamalı Olarak Tanımlanan Diziler

- (a) $a_1 = 1$ ve $a_n = a_{n-1} + 1$ ifadeleri pozitif tamsayılardan oluşan $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ dizisini tanımlar. $a_1 = 1$ ile, $a_2 = a_1 + 1 = 2$, $a_3 = a_2 + 1 = 3$ vs. buluruz.
- (b) $a_1 = 1$ ve $a_n = n \cdot a_{n-1}$ ifadeleri faktöriyelerden oluşan $1, 2, 6, 24, \dots, n!, \dots$ dizisini tanımlar. $a_1 = 1$ ile, $a_2 = 2 \cdot a_1 = 2$, $a_3 = 3 \cdot a_2 = 6$, $a_4 = 4 \cdot a_3 = 24$ vs. buluruz.
- (c) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ ve $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ ifadeleri **Fibonacci sayıları** denen $1, 1, 2, 3, 5, \dots$ dizisini oluşturur. $a_1 = 1$ ve $a_2 = 1$ ile, $a_3 = 1 + 1 = 2$, $a_4 = 2 + 1 = 3$, $a_5 = 3 + 2 = 5$ vs. elde ederiz.
- (d) Newton yöntemini uygulayarak görebileceğimiz gibi, $x_0 = 1$ ve $x_{n+1} = x_n - [(\sin x_n - x_n^2)/(\cos x_n - 2x_n)]$ ifadeleri, $\sin x - x^2 = 0$ denkleminin bir çözümüne yakınsayan bir dizi tanımlarlar.

Sınırlı Azalmayan Diziler

Genel bir dizinin terimleri, bazen büyüyerek bazen de küçülerek, sıçramalar yapabilir. Dizilerin önemli özel bir çeşidi, her bir terimin en az kendisinden önceki kadar büyük olduğu dizilerdir.

TANIM

Azalmayan Diziler

Her n için $a_n \leq a_{n+1}$ özelliğini taşıyan bir $\{a_n\}$ dizisine **azalmayan dizi** denir.

ÖRNEK 12 Azalmayan Diziler

- (a) Doğal sayılardan oluşan $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ dizisi.
- (b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ dizisi
- (c) Sabit $\{3\}$ dizisi ■

İki tür azalmayan dizi vardır—terimleri herhangi sonlu bir sınırı aşan diziler ve aşmayanlar.

TANIMLAR Sınırlı, Üst Sınır, En Küçük Üst Sınır

Her n için $a_n \leq M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi üstten sınırlıdır. M sayısı $\{a_n\}$ için bir üst sınırdır. M sayısı $\{a_n\}$ 'nin bir üst sınırı ise ve M 'den daha küçük bir sayı $\{a_n\}$ için bir üst sınır olamıyorsa M sayısı $\{a_n\}$ 'nin en küçük üst sınırıdır.

ÖRNEK 13 Sınırlılık Tanımını Uygulamak

(a) $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ dizisinin bir üst sınırı yoktur.

(b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ dizisi üstten $M = 1$ ile sınırlıdır.

1'den daha küçük bir sayı dizinin bir üst sınırı olamaz, dolayısıyla 1 en küçük üst sınırdır (Alıştırma 113).

Üstten sınırlı azalmayan bir dizinin her zaman bir en küçük alt sınırı vardır. Bu reel sayıların, Ek 4'te incelenen, tamlık özelliğinin bir sonucudur. L en küçük üst sınırı, dizinin L 'ye yakınsadığını ispatlayacağız.

$(1, a_1), (2, a_2), \dots, (n, a_n), \dots$ noktalarını xy -düzleminde işaretlediğimizi varsayın. M dizinin bir üst sınırı ise bütün bu noktalar $y = M$ doğrusu üstünde veya aşağısında bulunacaklardır (Şekil 11.4). $y = L$ doğrusu bu tip doğruların en altta bulunanıdır. (n, a_n) noktalarının hiçbirisi $y = L$ 'nin üzerinde bulunmaz, fakat bazıları, ϵ pozitif bir sayı olmak üzere, daha alttaki bir $y = L - \epsilon$ doğrusunun yukarısında bulunurlar. Dizi L 'ye yakınsar, çünkü

(a) n 'nin bütün değerleri için $a_n \leq L$ 'dir ve

(b) $\epsilon > 0$ ise, $a_N > L - \epsilon$ olacak şekilde en azından bir N tamsayısı vardır.

$\{a_n\}$ 'nin azalmayan bir dizi olması bize ayrıca

$$\text{her } n \geq N \text{ için } a_n \geq a_N > L - \epsilon$$

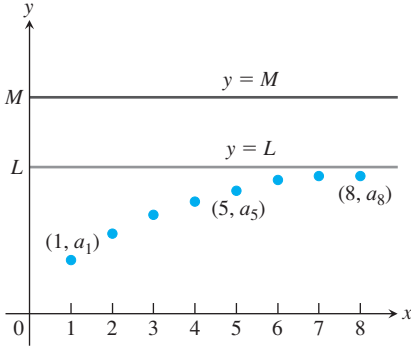
olduğunu söyler. Yani, N inci sayıdan büyük bütün a_n sayıları L 'nin ϵ civarında bulunurlar. Bu da L 'nin $\{a_n\}$ dizisinin limiti olma koşuludur.

Azalmayan dizilerin özellikleri aşağıdaki teoremden özetlenmiştir. Artmayan diziler için de benzer bir sonuç geçerlidir (Alıştırma 107).

TEOREM 6 Azalmayan Dizi Teoremi

Reel sayılardan oluşan azalmayan bir dizi, ancak ve yalnız üstten sınırlı ise yakınsar. Azalmayan bir dizi yakınsıyorsa, en küçük üst sınırına yakınsar.

Teorem 6, üstten sınırlı azalmayan bir dizinin yakınsak olmasını gerektirir. Dizi üstten sınırlı değilse sonsuza ıraksar.



ŞEKİL 11.4 Azalmayan bir dizinin terimlerinin bir M üst sınırı varsa, limitleri $L \leq M$ olur.

ALİŞTIRMALAR 11.1

Bir Dizinin Terimlerini Bulmak

1–6 alıştırmalarının her birinde bir $\{a_n\}$ dizisinin n . terimi a_n 'nin formülü verilmektedir. a_1, a_2, a_3 ve a_4 'ün değerlerini bulun.

1. $a_n = \frac{1-n}{n^2}$
2. $a_n = \frac{1}{n!}$
3. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$
4. $a_n = 2 + (-1)^n$
5. $a_n = \frac{2^n}{2^{n+1}}$
6. $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$

7–12 alıştırmalarının her birinde dizinin ilk terimi veya ilk iki terimi ile birlikte bir tekrarlıma formülü verilmektedir. Dizinin ilk on terimini yazın.

7. $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + (1/2^n)$
8. $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n/(n+1)$
9. $a_1 = 2, a_{n+1} = (-1)^{n+1}a_n/2$
10. $a_1 = -2, a_{n+1} = na_n/(n+1)$
11. $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$
12. $a_1 = 2, a_2 = -1, a_{n+2} = a_{n+1}/a_n$

Bir Dizinin Formülünü Bulmak

13–22 alıştırmalarındaki dizilerin n . teriminin formülünü bulun.

13. 1, -1, 1, -1, 1, ... dizisi Değişen işaretli 1'ler
14. -1, 1, -1, 1, -1, ... dizisi Değişen işaretli 1'ler
15. 1, -4, 9, -16, 25, ... dizisi Pozitif tamsayıların kareleri, işaretleri değişiyor.
16. $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$ dizisi Pozitif tamsayıların karelerinin tersleri, işaretleri değişiyor.
17. 0, 3, 8, 15, 24, ... dizisi Pozitif tamsayıların karelerinden 1 çıkartılmış
18. -3, -2, -1, 0, 1, ... dizisi -3'ten başlayan tamsayılar
19. 1, 5, 9, 13, 17, ... dizisi Her ikinci tek tamsayı
20. 2, 6, 10, 14, 18, ... dizisi Her ikinci çift tamsayı
21. 1, 0, 1, 0, 1, ... dizisi Sırayla değişen 1'ler ve 0'lar
22. 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, ... dizisi Her tamsayının tekrarlanması

Limit Bulmak

23–81 alıştırmalarındaki $\{a_n\}$ dizilerinden hangileri yakınsar, hangileri ıraksar? Her yakınsak dizinin limitini bulun.

23. $a_n = 2 + (0.1)^n$
24. $a_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$
25. $a_n = \frac{1-2n}{1+2n}$
26. $a_n = \frac{2n+1}{1-3\sqrt{n}}$
27. $a_n = \frac{1-5n^4}{n^4+8n^3}$
28. $a_n = \frac{n+3}{n^2+5n+6}$
29. $a_n = \frac{n^2-2n+1}{n-1}$
30. $a_n = \frac{1-n^3}{70-4n^2}$
31. $a_n = 1 + (-1)^n$
32. $a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$
33. $a_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)$
34. $a_n = \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) \left(3 + \frac{1}{2^n}\right)$
35. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$
36. $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$
37. $a_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$
38. $a_n = \frac{1}{(0.9)^n}$
39. $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$
40. $a_n = n\pi \cos(n\pi)$
41. $a_n = \frac{\sin n}{n}$
42. $a_n = \frac{\sin^2 n}{2^n}$
43. $a_n = \frac{n}{2^n}$
44. $a_n = \frac{3^n}{n^3}$
45. $a_n = \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$
46. $a_n = \frac{\ln n}{\ln 2n}$
47. $a_n = 8^{1/n}$
48. $a_n = (0.03)^{1/n}$
49. $a_n = \left(1 + \frac{7}{n}\right)^n$
50. $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
51. $a_n = \sqrt[n]{10n}$
52. $a_n = \sqrt[n]{n^2}$
53. $a_n = \left(\frac{3}{n}\right)^{1/n}$
54. $a_n = (n+4)^{1/(n+4)}$
55. $a_n = \frac{\ln n}{n^{1/n}}$
56. $a_n = \ln n - \ln(n+1)$
57. $a_n = \sqrt[n]{4^n n}$
58. $a_n = \sqrt[n]{3^{2n+1}}$
59. $a_n = \frac{n!}{n^n}$ (İpucu: $1/n$ ile karşılaştırın.)

60. $a_n = \frac{(-4)^n}{n!}$
61. $a_n = \frac{n!}{10^{6n}}$
62. $a_n = \frac{n!}{2^n \cdot 3^n}$
63. $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/(\ln n)}$
64. $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
65. $a_n = \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$
66. $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$
67. $a_n = \left(\frac{x^n}{2n+1}\right)^{1/n}, \quad x > 0$
68. $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$
69. $a_n = \frac{3^n \cdot 6^n}{2^n \cdot n!}$
70. $a_n = \frac{(10/11)^n}{(9/10)^n + (11/12)^n}$
71. $a_n = \tanh n$
72. $a_n = \sinh(\ln n)$
73. $a_n = \frac{n^2}{2n-1} \sin \frac{1}{n}$
74. $a_n = n\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$
75. $a_n = \tan^{-1} n$
76. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \tan^{-1} n$
77. $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{2^n}}$
78. $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$
79. $a_n = \frac{(\ln n)^{200}}{n}$
80. $a_n = \frac{(\ln n)^5}{\sqrt{n}}$
81. $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$
82. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + n}}$
83. $a_n = \frac{1}{n} \int_1^n \frac{1}{x} dx$
84. $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^p} dx, \quad p > 1$

Teori ve Örnekler

85. Bir dizinin ilk terimi $x_1 = 1$ 'dir. Birbirini izleyen her terim kendinden önce gelen terimlerin toplamıdır:

$$x_{n+1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Dizi ilk terimlerinden yeteri kadarını yazarak, x_n için $n \geq 2$ değerlerinde geçerli olacak genel bir formül yazın.

86. Bir rasyonel sayı dizisi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots, \frac{a}{b}, \frac{a+b}{a}, \dots$$

Burada paylar bir dizi, paydalar ikinci bir dizi ve bunların oranları üçüncü bir dizi oluşturur. x_n ve y_n sırasıyla n . kesir $r_n = x_n/y_n$ 'nin pay ve paydası olsun.

- a. $x_1^2 - 2y_1^2 = -1, x_2^2 - 2y_2^2 = +1$ ve daha genel olarak, $a^2 - 2b^2 = -1$ veya $+1$ ise sırasıyla

$$(a + 2b)^2 - 2(a + b)^2 = +1 \text{ veya } -1,$$

olduğunu doğrulayın.

- b. $r_n = x_n/y_n$ kesirleri n arttıkça bir limite yaklaşır. Bu limit nedir? (*İpucu:* $r_n^2 - 2 = \pm(1/y_n)^2$ olduğunu ve y_n 'nin n 'den küçük olmadığını göstermek için (a) şikkını kullanın.

87. **Newton yöntemi** Aşağıdaki diziler Newton yönteminin

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

tekrarlamalı formülünden gelirler. Diziler yakınsar mı? Yakınsarlarsa, hangi değere yakınsarlar? Her durumda, işe diziyi üreten f fonksiyonunu tanımlayarak başlayın.

- a. $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$
- b. $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{\tan x_n - 1}{\sec^2 x_n}$
- c. $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - 1$
88. a. $f(x)$ 'in $[0, 1]$ aralığındaki her x için türetilbildiğini ve $f(0) = 0$ olduğunu varsayın. $a_n = nf(1/n)$ kuralıyla $\{a_n\}$ dizisini tanımlayın. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = f'(0)$ olduğunu gösterin.

(a) şikkındaki sonucu kullanarak aşağıdaki $\{a_n\}$ dizilerinin limitlerini bulun.

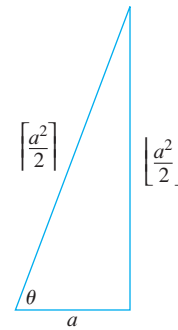
b. $a_n = n \tan^{-1} \frac{1}{n}$ c. $a_n = n(e^{1/n} - 1)$

d. $a_n = n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$

89. **Pisagor üçlülere** $a^2 + b^2 = c^2$ ise, a, b ve c 'den oluşan bir pozitif tamsayılar üçlüsüne **Pisagor üçlüsü** denir. a bir tek tamsayı ve

$$b = \left\lfloor \frac{a^2}{2} \right\rfloor \quad \text{ve} \quad c = \left\lceil \frac{a^2}{2} \right\rceil$$

sırasıyla $a^2/2$ 'nin tamsayı taban ve tavanları olsun.



- a. $a^2 + b^2 = c^2$ olduğunu gösterin (*İpucu:* $a = 2n + 1$ alın ve b ile c 'yi n cinsinden ifade edin.)

- b. Doğrudan hasaplayarak, veya şekle bakarak, aşağıdaki limiti bulun

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a^2}{2}} \right]$$

90. $n!$ 'in n . kökü

- a. $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n\pi)^{1/(2n)} = 1$ ve buradan Stirling yaklaşımını kullanarak (Bölüm 8, Ek Alıştırma 50a)

n 'nin büyük değerleri için $\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e}$ olduğunu gösterin.

- T** b. (a) şıkkındaki yaklaşımı $n = 40, 50, 60, \dots$, hesap makinesinin izin verdiği kadar ilerleyerek hesaplayın.

91. a. c herhangi bir pozitif sabit olmak üzere, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n^c) = 0$ olduğunu varsayarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^c} = 0$$

olduğunu gösterin.

- b. c pozitif bir sabit ise, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n^c) = 0$ olduğunu ispatlayın. (*İpucu:* $\epsilon = 0.001$ ve $c = 0.04$ ise, $n > N$ iken $|1/n^c - 0| < \epsilon$ olmasını sağlamak için N ne kadar büyük olmalıdır?)

- 92. Fermuar teoremi** Dizileri için “fermuar” teoremini ispatlayın: $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ 'nin ikisi de L 'ye yakınsıyorsa:

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$$

dizisi de L 'ye yakınsar.

93. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ olduğunu ispatlayın.

94. $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1, (x > 0)$ olduğunu ispatlayın.

95. Teorem 2'yi ispatlayın. 96. Teorem 3'ü ispatlayın.

97–100 alıştırmasında, dizinin azalmayan olup olmadığını ve üstten sınırlı olup olmadığını belirleyin.

$$97. a_n = \frac{3n+1}{n+1}$$

$$98. a_n = \frac{(2n+3)!}{(n+1)!}$$

$$99. a_n = \frac{2^n 3^n}{n!}$$

$$100. a_n = 2 - \frac{2}{n} - \frac{1}{2^n}$$

101–106 alıştırmasındaki dizilerden hangileri yakınsaktır, hangileri iraksaktır? Yanıtlarınızı açıklayın.

$$101. a_n = 1 - \frac{1}{n}$$

$$102. a_n = n - \frac{1}{n}$$

$$103. a_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

$$104. a_n = \frac{2^n - 1}{3^n}$$

$$105. a_n = ((-1)^n + 1) \left(\frac{n+1}{n} \right)$$

- 106.** Bir dizinin ilk terimi $x_1 = \cos(1)$ 'dir. Bunu izleyen terimler, $x_2 = x_1$ veya $\cos(2)$, hangisi daha büyükse, ve $x_3 = x_2$ veya $\cos(3)$, hangisi daha büyükse, (sağa doğru bu şekilde devam eder) dir. Genel olarak,

$$x_{n+1} = \max \{x_n, \cos(n+1)\}$$

ile verilir.

- 107. Artmayan diziler** Her n için $a_n \geq a_{n+1}$ olan bir $\{a_n\}$ sayı dizisi-ne **artmayan dizi** denir. Her n için $M \leq a_n$ olacak şekilde bir M sayısı bulunabiliyorsa, $\{a_n\}$ dizisi **alttan sınırlıdır**. Böyle bir M sayısına dizinin **alt sınırı** denir. Teorem 6'dan alttan sınırlı artmayan bir dizinin yakınsadığını ve alttan sınırlı olmayan artmayan bir dizinin iraksadığını çıkarın.

(Alıştırma 107'nin devamı) Alıştırma 107'nin sonucunu kullanarak, 108–112 alıştırmasındaki dizilerin hangilerinin yakınsadığını, hangilerinin iraksadığını belirleyin.

$$108. a_n = \frac{n+1}{n}$$

$$109. a_n = \frac{1 + \sqrt{2n}}{\sqrt{n}}$$

$$110. a_n = \frac{1 - 4^n}{2^n}$$

$$111. a_n = \frac{4^{n+1} + 3^n}{4^n}$$

$$112. a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 3$$

- 113. $\{n/(n+1)\}$ dizisinin en küçük üst sınırı 1'dir.** M 1'den küçük bir sayıysa, $\{n/(n+1)\}$ 'in terimlerinin eninde sonunda M 'yi aşacağını gösterin. Yani, $M < 1$ ise, herhangi bir $n > N$ için $n/(n+1) > M$ olacak şekilde bir N tamsayısı vardır. Her n için, $n/(n+1) < 1$ olduğundan, bu 1'in $\{n/(n+1)\}$ için en küçük alt sınır olduğunu ispatlar.

- 114. En küçük üst sınırların tekliği** M_1 ve M_2 $\{a_n\}$ dizisinin en küçük üst sınırları ise, $M_1 = M_2$ olduğunu gösterin. Yani, bir dizinin iki farklı en küçük üst sınırı olamaz.

- 115.** Pozitif sayılardan oluşan bir $\{a_n\}$ dizisinin, üstten sınırlıysa, yakınsayacağı doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.

- 116.** $\{a_n\}$ yakınsak bir diziye, her pozitif ϵ sayısına karşılık,

$$m > N \text{ ve } n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon$$

gerektirmesi sağlanacak şekilde bir N tamsayısı bulunabileceğini gösterin.

- 117. Limitlerin tekliği** Dizilerin limitlerinin tek olduğunu ispatlayın. Yani, L_1 ve L_2 , $a_n \rightarrow L_1$ ve $a_n \rightarrow L_2$ olacak şekilde iki sayı ise $L_1 = L_2$ olduğunu gösterin.

- 118. Limitler ve alt diziler** Bir dizinin terimleri verilen sıralarıyla başka bir dizinin içinde yer alıyorsa, ilk diziye ikinci dizinin **alt dizisi** deriz. Bir $\{a_n\}$ dizisinin iki alt dizisinin farklı $L_1 \neq L_2$ limitleri varsa, $\{a_n\}$ 'nin iraksadığını ispatlayın.

- 119.** Bir $\{a_n\}$ dizisi için, çift indisli terimler a_{2k} , tek indisli terimler a_{2k+1} ile gösterilmektedir. $a_{2k} \rightarrow L$ ve $a_{2k+1} \rightarrow L$ ise, $a_n \rightarrow L$ olduğunu ispatlayın.

- 120.** Bir $\{a_n\}$ dizisi için ancak ve yalnız $\{|a_n|\}$ mutlak değerler dizisi 0'a yakınsarsa, dizinin 0'a yakınsayacağını gösterin.

T Limitlerin Hesap Makinesiyle Araştırılması

121–124 alıştırmaalarında, eşitsizliğin her $n > N$ için geçerli olmasını sağlayacak bir N değeri bulmak için hesap makinesiyle deneyler yapın. Eşitsizliğin limitin formel tanımının bir ifadesi olduğunu varsayarsanız, her durumda hangi dizi ele alınmaktadır ve limiti nedir?

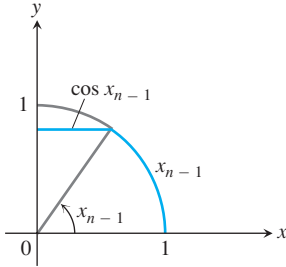
$$121. |\sqrt[n]{0.5} - 1| < 10^{-3} \quad 122. |\sqrt[n]{n} - 1| < 10^{-3}$$

$$123. (0.9)^n < 10^{-3} \quad 124. 2^n/n! < 10^{-7}$$

125. Newton yöntemiyle üretilen diziler Türetilen bir $f(x)$ fonksiyonuna uygulanan Newton yöntemi bir x_0 başlangıç değeriyle başlar ve bundan uygun koşullarda f' 'nin bir sıfırına yakınsayan bir $\{x_n\}$ dizisi üretir. Dizinin tekrarlama formülü şöyledir:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

- a. $f(x) = x^2 - a$, $a > 0$ için tekrarlama formülünün $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$ olarak yazılabileceğini gösterin.
- b. $x_0 = 1$ ve $a = 3$ ile başlayarak, sayılar tekrar etmeye başlayıncaya kadar dizinin birbirini izleyen terimlerini hesaplayın. Hangi sayıya yaklaşılmaktadır. Açıklayın.
- 126. (Alıştırma 125'in devamı.)** Alıştırma 125'in (b) şikkını $a = 3$ yerine $a = 2$ olarak tekrarlayın.
- 127. $\pi/2$ 'nin tekrarlama bir tanımı** $x_1 = 1$ ile başlar ve $\{x_n\}$ 'nin birbirini izleyen terimlerini $x_n = x_{n-1} + \cos x_{n-1}$ kuralı ile tanımlarsanız, hızla $\pi/2$ 'ye yakınsayan bir dizi üretirsiniz. a. Deneyin. b. Aşağıdaki şekli kullanarak yakınsamanın neden bu kadar hızlı olduğunu açıklayın.



128. The Wall Street Journal'ın 15 Aralık 1992 tarihli sayısının kapak makalesine göre, Ford Motor Şirketi, ortalama bir aracın kalıplarını hazırlamak için, 1980'deki tahmini 15 saatten düşük olarak $7\frac{1}{4}$ iş saati harcamaktadır. Japonlar ise $3\frac{1}{2}$ saatte bunu yapmaktadırlar.

Ford'un 1980'den beri gösterdiği ilerleme yılda ortalama %6'lık bir azalma gösterir. Bu oran sürekli olursa, n yıl sonra Ford ortalama bir aracın kalıpları için yaklaşık

$$S_n = 7.25(0.94)^n$$

saat harcayacaktır. Japonların araç başına $3\frac{1}{2}$ saat harcamaya devam ettiklerini varsayarsak, Ford'un onlara yetişmesi kaç yıl sürer? Bunu iki yolla bulun:

- a. $\{S_n\}$ dizisinin 3.5'tan küçük veya ona eşit ilk terimini bulun.
- T** b. $f(x) = 7.25(0.94)^x$ 'in grafiğini çizin ve Trace kullanarak grafiğin $y = 3.5$ doğrusunu nerede kestiğini bulun.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

129-140 alıştırmaındaki dizilere aşağıdaki adımları uygularken bir BCS kullanın.

- a. Dizinin ilk yirmibeş terimini hesaplayın ve işaretleyin. Dizin alttan veya üstten bir sınırı var gibi gözükmekte midir? Size yakınsar gibi mi, yoksa ıraksar gibi mi görünmektedir? Yakınsıyorsa, L limiti nedir?
- b. Dizi yakınsıyorsa, $n \geq N$ için $|a_n - L| \leq 0.01$ olacak şekilde bir N tamsayısı bulun. Hangi adımdan sonra terimlerle L arasındaki uzaklık 0.0001'den küçük kalır?

$$129. a_n = \sqrt[n]{n} \quad 130. a_n = \left(1 + \frac{0.5}{n}\right)^n$$

$$131. a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{5^n}$$

$$132. a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (-2)^n$$

$$133. a_n = \sin n \quad 134. a_n = n \sin \frac{1}{n}$$

$$135. a_n = \frac{\sin n}{n} \quad 136. a_n = \frac{\ln n}{n}$$

$$137. a_n = (0.9999)^n \quad 138. a_n = 123456^{1/n}$$

$$139. a_n = \frac{8^n}{n!} \quad 140. a_n = \frac{n^{41}}{19^n}$$

141. Bileşik faizler, yatırma ve çekmeler A_0 miktarında parayı yılda m kere birleştirilen belirli bir yıllık r faiziyle yatırırsanız ve her birleştirme periyodunun sonunda hesaba sabit bir b miktarı eklenirse (veya $b < 0$ ise çekilirse), $n + 1$ katma periyodundan sonra elinize geçecek para

$$A_{n+1} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)A_n + b \quad (1)$$

olacaktır.

- a. $A_0 = 1000$, $r = 0.02015$, $m = 12$ ve $b = 50$ ise, ilk 100 (n , A_n) noktasını hesaplayın ve çizin. 5 yıl sonra hesabınızda ne kadar para olur? $\{A_n\}$ yakınsar mı? $\{A_n\}$ sınırlı mıdır?
- b. (a) şikkını $A_0 = 5000$, $r = 0.0589$, $m = 12$ ve $b = -50$ ile tekrarlayın.
- c. Dört ayda bir birleştirilen ve yıllık %4.5 veren bir mevduat hesabına (MH) 5000 dolar yatırır ve MH'ye daha fazla katkıda bulunmazsanız, 20.000 dolarınız olana kadar yaklaşık kaç yıl geçer? Ya, MH yılda %6.25 veriyorsa?
- d. Herhangi bir $k \geq 0$ için, (1) denkleminle tekrarlanarak tanımlanan dizinin

$$A_k = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^k \left(A_0 + \frac{mb}{r}\right) - \frac{mb}{r} \quad (2)$$

bağıntısını sağladığı gösterilebilir. A_0 , r , m ve b sabitlerinin (a) şıkında verilen değerleri için, iki dizinin de ilk 50 teriminin değerlerini karşılaştırarak bunun doğruluğunu gösterin. Sonra, doğrudan yerine koyarak, (2) denklemindeki terimlerin, tekrarlama formülü (1)'i sağladığını gösterin.

142. Lojistik fark denklemi

$$a_{n+1} = ra_n(1 - a_n)$$

tekrarlama bağıntısına *lojistik fark denklemi* denir ve başlangıç değeri a_0 verildiğinde, denklem $\{a_n\}$ *lojistik dizisini* tanımlar. Bu alıştırmada a_0 'ı $0 < a_0 < 1$ aralığında, mesela $a_0 = 0.3$, seçeceğiz.

- $r = 3/4$ alın. Dizideki ilk 100 terim için (n, a_n) noktalarını hesaplayıp işaretleyin. Dizi yakınsıyor gibi midir? Sizce limit nedir? Limit a_0 seçiminize bağlı mıdır?
- $1 < r < 3$ aralığında birkaç r değeri seçerek, (a) şıkındaki işlemleri tekrarlayın. Aralığın uç noktalarına yakın bazı noktalar seçtiğinizden emin olun. Çizimlerinizde gözlediğiniz dizilerin davranışını tanımlayın.
- Şimdi r 'nin $3 < r < 3.45$ aralığının uç noktalarına yakın değerlerinde dizinin hareketini inceleyin. $r = 3$ değerine **çatallanma değeri** denir ve dizinin aralıktaki davranışına **çekici 2'li-döngü** adı verilir. Bunun davranışı neden mantıklı olarak tanımlandığını açıklayın.

- Sonra r 'nin $3.45 < r < 3.54$ ve $3.54 < r < 3.55$ aralıklarının her birinde uç noktalara yakın değerleri için davranışı araştırın. Dizinin ilk 200 terimini işaretleyin. Kendi kelimelerinizle, çizimlerinizde her aralık için gözlediğiniz davranışı tanımlayın. Dizi her aralıkta kaç değer arasında salınmaktadır? $r = 3.45$ ve $r = 3.54$ (2 ondalık basamağa yuvarlanmış) değerlerine de çatallanma değerleri denir, çünkü r bu değerleri aşarken dizinin davranışı değişir.
- Durum daha da ilginçleşir. Gerçekte, bir $3 < 3.45 < 3.54 < \dots < c_n < c_{n+1} \dots$ çatallanma değerleri dizisi bulunur, öyle ki $c_n < r < c_{n+1}$ için $\{a_n\}$ lojistik dizisi **çekici 2"-döngüsü** adı verilen 2^n değerleri arasında salınır. Dahası, $\{c_n\}$ çatallanma dizisi yukarıdan 3.57 ile sınırlıdır (yani yakınsar). Bir $r < 3.57$ değeri seçerseniz, bir çeşit 2^n -döngüsü gözlersiniz. $r = 3.5695$ seçin ve 300 nokta işaretleyin.
- $r > 3.57$ olduğunda neler olacağına bakalım. $r = 3.65$ seçin ve $\{a_n\}$ 'nin ilk 300 terimini hesaplayıp, işaretleyin. Terimlerin nasıl tahmin edilemez, kaotik bir şekilde dolaştığına dikkat edin. a_{n+1} 'in değerini a_n 'nin değerinden bulamazsınız.
- $r = 3.65$ için, birbirine yakın iki a_0 başlangıç değeri seçin, örneğin $a_0 = 0.3$ ve $a_0 = 0.301$. Her başlangıç değeriyle belirlenen dizilerin ilk 300 terimini hesaplayıp işaretleyin. Çizimlerinizde gözlediğiniz davranışları karşılaştırın. İki dizide de aynı indisli terimlerin birbirinden uzaklaşması için kaç terim ileri gitmeniz gerekir? Araştırmayı $r = 3.75$ için tekrarlayın. Çizimlerinizin a_0 seçiminize göre nasıl farklılık gösterdiklerini görebiliyor musunuz? Lojistik dizi *başlangıç koşulu* a_0 'a duyarlıdır deriz.

11.2

Sonsuz Seriler

Bir sonsuz seri

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

gibi bir sonsuz sayı dizisinin toplamıdır. Bu bölümün amacı böyle bir sonsuz toplamın anlamını kavramak ve bunu hesaplama yöntemleri geliştirmektir. Bir sonsuz seride toplanması gereken sonsuz tane terim bulunduğundan ne elde edildiğini görmek için sadece toplamayı sürdürmekle kalamayız. Bunun yerine, dizinin ilk n terimini toplamak ve orada durmakla ne elde ettiğimize bakarız. İlk n terimin toplamı

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

sıradan sonlu bir toplamdır ve normal toplama ile hesaplanabilir. Buna *n. kısmi toplam* denir. Bölüm 11.1 de açıklanan, bir dizinin terimlerinin bir limite yaklaşması gibi, *n* büyüdükçe kısmi toplamların giderek bir limit değere yaklaşmasını bekleriz.

Örneğin,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

gibi bir ifadeye bir anlam yüklemek için başlangıçtan itibaren her defasında bir terim toplar ve bu kısmi toplamların nasıl büyüdüklerine ilişkin bir kalıp ararız.

Kısmi toplam		Kısmi toplam için önerilen ifade	Değer
Birinci:	$s_1 = 1$	$2 - 1$	1
İkinci:	$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$	$2 - \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
Üçüncü:	$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$2 - \frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
<i>n.</i> :	$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$	$2 - \frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$

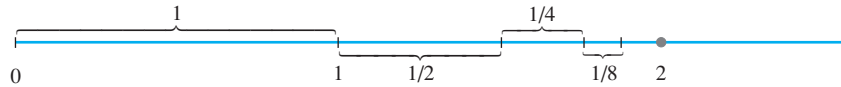
Gerçekten de bir kalıp vardır. Kısmi toplamlar *n.* terimi

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

olan bir dizi oluştururlar. Bu dizi 2'ye yakınsar, çünkü $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/2^n) = 0$ 'dır.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots \quad \text{sonsuz serisinin toplamı 2'dir}$$

deriz. Bu serinin içindeki herhangi bir sonlu toplam 2'ye eşit midir? Hayır. Sonsuz sayıda terimi gerçekten bir bir toplayabilir miyiz? Hayır. Ama yine de toplamlarını $n \rightarrow \infty$ iken kısmi toplamlar dizisinin limiti olarak tanımlayabiliriz, bu durumda 2 (Şekil 11.5). Diziler ve limitler hakkındaki bilgilerimiz sonlu toplamlar çerçevesinden dışarıya çıkmamızı sağlar.



ŞEKİL 11.5 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ uzunlukları bir bir toplanırken, toplam 2'ye yaklaşır.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Blaise Pascal
(1623–1662)

TANIMLAR

Sonsuz Seriler, n .inci Terim, Kısmi Toplam, Yakınsar, Toplam

Bir $\{a_n\}$ sayı dizisi verilmiş olsun.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

şeklindeki bir ifadeye bir **sonsuz seri** denir. a_n sayısı serinin **n . terimidir**.

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\vdots$$

ile tanımlanan $\{s_n\}$ dizisine serinin **kısmi toplamlar dizisi** denir. s_n sayısı **n . kısmi toplam** dır. Kısmi toplamlar dizisi bir L limitine yakınsıyorsa, seri **yakınsaktır** der ve **toplamının** L olduğunu söyleriz. Bu durumda, ayrıca

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

yazarız. Serinin kısmi toplamlar dizisi yakınsamıyorsa, seri **ıraksaktır** deriz.

Verilen bir $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ serisini incelerken, yakınsadığını veya ıraksadığını bilmeyebiliriz. Her iki durumda da serileri

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{veya} \quad \sum a_n$$

1'den ∞ 'a kadar
toplam
anlaşıldığında
yararlı bir kısaltma

şeklinde yazmak için sigma gösterimini kullanmak uygundur.

Geometrik Seriler

Geometrik seriler a ve r sabit reel sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

şeklindeki serilerdir. r **oranı**,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$$

serisindeki gibi pozitif, veya

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \cdots$$

serisindeki gibi negatif olabilir.

$r = 1$ ise, (1) denklemindeki serinin n . kısmi toplamı

$$s_n = a + a(1) + a(1)^2 + \cdots + a(1)^{n-1} = na,$$

olur ve seri ıraksar, çünkü, a 'nın işaretine bağlı olarak, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pm \infty$ olur. $r = -1$ ise, seri ıraksar, çünkü n . kısmi toplamlar a ile 0 arasında değişip dururlar. $|r| \neq 1$ ise, serinin yakınsaklığını veya ıraksaklığını aşağıdaki gibi inceleyebiliriz:

$$\begin{aligned} s_n &= a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \\ rs_n &= ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \\ s_n - rs_n &= a - ar^n \\ s_n(1 - r) &= a(1 - r^n) \\ s_n &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \quad (r \neq 1) \end{aligned}$$

*s_n 'yi r ile çarpın.
 s_n 'den rs_n 'yi çıkarın. Sağdaki terimlerin çoğu birbirini götürür. Çarpanlarına ayırın.
 $r \neq 1$ ise, s_n 'yi çözebiliriz.*

$|r| < 1$ ise, $n \rightarrow \infty$ iken $r^n \rightarrow 0$ (Bölüm 11.1'deki gibi) ve $s_n \rightarrow a/(1 - r)$ bulunur. $|r| > 1$ ise $|r^n| \rightarrow \infty$ olur ve seri ıraksar.

$|r| < 1$ ise, $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$ geometrik serisi $a/(1 - r)$ 'ye yakınsar.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r}, \quad |r| < 1$$

$|r| \geq 1$ ise, seri ıraksar.

Bir geometrik serinin ne zaman yakınsadığını veya ıraksadığını ve nereye yakınsadığını belirledik. Bundan sonraki birkaç bölümde göreceğimiz gibi çoğunlukla bir serinin nereye yakınsadığını bilmeksizin yakınsak olduğunu belirleyebiliriz. Bir geometrik serinin toplamını veren $a/(1 - r)$ formülü *sadece* $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ ifadesindeki toplama indisi $n = 1$ (veya seriyi $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ şeklinde yazarsak $n = 0$) ile başladığında uygulanabilir.

ÖRNEK 1 $n = 1$ ile Başlayan İndis

$a = 1/9$ ve $r = 1/3$ ile oluşturulan geometrik seri

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1/9}{1 - (1/3)} = \frac{1}{6}$$

şeklindedir. ■

ÖRNEK 2 $n = 0$ ile Başlayan İndis

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{4^n} = 5 - \frac{5}{4} + \frac{5}{16} - \frac{5}{64} + \dots$$

serisi, $a = 5$ ve $r = -1/4$ ile bir geometrik seridir. Bu seri

$$\frac{a}{1 - r} = \frac{5}{1 + (1/4)} = 4$$

değerine yakınsar. ■

ÖRNEK 3 Zıplayan Bir Top

Bir topu a metre yüksekten düz bir yüzeye bırakıyorsunuz. Top bir h yüksekliğinden düş-tükten sonra her yüzeye çarptığında, bir rh yüksekliğine zıplıyor. Burada r pozitif, fakat 1'den küçüktür. Topun yukarı ve aşağı aldığı toplam yolu bulun (Şekil 11.6).

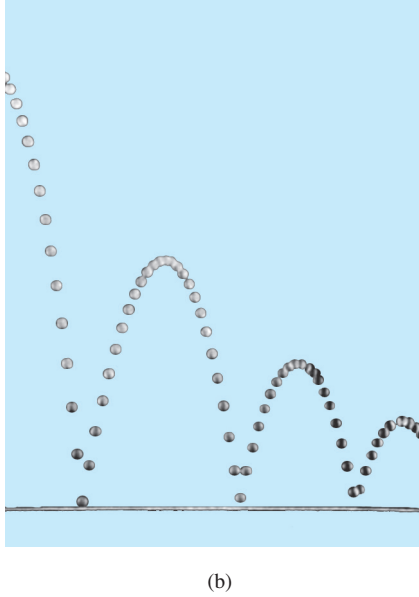
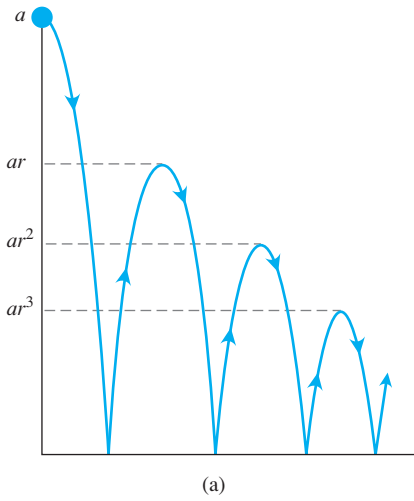


FIGURE 11.6 (a) Örnek 3, her zıplamanın yüksekliği bir r çarpanı ile azalıyor, zıplayan bir topun aldığı toplam yolu hesaplamak için bir geometrik serinin nasıl kullanılacağını göstermektedir. (b) Zıplayan bir topun stroboskopik bir fotoğrafı.

Çözüm Toplam mesafe

$$s = a + \underbrace{2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \cdots}_{\text{Bu toplam } 2ar/(1-r)} = a + \frac{2ar}{1-r} = a \frac{1+r}{1-r}$$

olarak bulunur. Örneğin, $a = 6$ m ve $r = 2/3$ ise, toplam mesafe

$$s = 6 \frac{1 + (2/3)}{1 - (2/3)} = 6 \left(\frac{5/3}{1/3} \right) = 30 \text{ m.}$$

olur.

ÖRNEK 4 Tekrarlanan Ondalık Basamaklar

Tekrarlanan 5.232323... ondalık basamakları iki tamsayının oranı olarak ifade edin.

Çözüm

$$\begin{aligned} 5.232323 \dots &= 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \cdots \\ &= 5 + \frac{23}{100} \left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100} \right)^2 + \cdots \right) \quad \begin{matrix} a = 1, \\ r = 1/100 \end{matrix} \\ &= 5 + \frac{23}{100} \left(\frac{1}{1 - 0.01} \right) = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99} \end{aligned}$$

Ne yazık ki, yakınsak bir geometrik serinin gibi formüller çok nadirdir ve çoğunlukla bir serinin toplamının bir tahminiyle yetinmek zorunda kalırız (bu konu daha sonra incelenecek). Ancak, aşağıdaki örnek toplamı kesin olarak bulabildiğimiz başka bir durumdur.

ÖRNEK 5 Geometrik Olmayan Fakat Teleskopik Olan Seriler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{serisinin toplamını bulun.}$$

Çözüm Kısmi toplamlar dizisinde, s_k için bir formül verecek bir kalıp ararız. Anahtar,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

kısmi kesirler ayrışımıdır. Buradan,

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

ve

$$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

elde edilir. Parantezleri kaldırıp, zıt işaretli terimleri sadeleştirirsek,

$$s_k = 1 - \frac{1}{k+1}$$

buluruz.

Artık, $k \rightarrow \infty$ iken, $s_k \rightarrow 1$ olduğunu görüyoruz. Seri yakınsar ve toplamı 1'dir. :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

İraksak Seriler

Bir serinin yakınsak olmamasının bir nedeni terimlerinin giderek küçülmeyişidir.

ÖRNEK 6 Her Sayıyı Aşan Kısmi Topamlar

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 + \cdots$$

serisi ıraksar, çünkü kısmi toplamlar her L sayısından daha büyüktür. $n = 1$ 'den sonra, $s_n = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2$ kısmi toplamı n^2 'den büyük olur.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n} + \cdots$$

serisi ıraksar, çünkü kısmi toplamlar önceden belirlenen her sayıyı aşar. Her terim 1'den büyüktür, dolayısıyla, n terimin toplamı n 'den büyük olur.

İraksaklık İçin n . Terim Testi

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaksa, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 'nin sifıra eşit olması gerektiğine dikkat edin. Nedenini anlamak için, S serinin toplamını temsil etsin ve $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ de n . kısmi toplam olsun. n büyükken, hem s_n hem de s_{n-1} S 'ye yakındır, dolayısıyla farkları, a_n sifıra yakındır. Daha düzgün olarak,

$$a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow S - S = 0$$

Diziler için
Fark Kuralı

yazılabilir.

Bunlar aşağıdaki teoremi getirir.

Dikkat

Teorem 7, $a_n \rightarrow 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 'nin yakınsayacağını söylemez. $a_n \rightarrow 0$ iken bir serinin ıraksaması mümkündür.

TEOREM 7

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsıyorsa, $a_n \rightarrow 0$ olur.

Teorem 7, Örnek 6 da ortaya çıkan ıraksaklık çeşidini belirlemek için bir teste yol açar.

İraksaklık İçin n . Terim Testi

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ yoksa veya sıfırdan farklıysa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksar.

ÖRNEK 7 n . terim testini uygulayarak aşağıdakileri bulabiliriz:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ ıraksar, çünkü $n^2 \rightarrow \infty$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ ıraksar, çünkü $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ ıraksar, çünkü $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1}$ yoktur
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+5}$ ıraksar, çünkü $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2n+5} = -\frac{1}{2} \neq 0$ dır. ■

ÖRNEK 8 $a_n \rightarrow 0$, Fakat Seri ıraksar.

Terimlerin toplamları 1 olan kümelerle gruplandığından, dolayısıyla kısmi toplamlar sınırsız olarak büyüdüğünden

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{2 \text{ terim}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{4 \text{ terim}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{2^n \text{ terim}} + \cdots$$

serisi ıraksar. Halbuki serinin terimleri sıfıra yakınsayan bir dizi oluştururlar. Bölüm 11.3'teki Örnek 1, harmonik serinin de aynı biçimde davrandığını gösterir. ■

Serileri Birleştirmek

Elimizde iki yakınsak seri bulunuyorsa, bu serileri terim terim toplayabilir, terim terim çıkarabilir veya bunları sabitlerle çarparak yakınsak yeni seriler elde edebiliriz.

TEOREM 8

$\sum a_n = A$ ve $\sum b_n = B$ yakınsak serilerse, aşağıdaki kurallar geçerlidir.

1. *Toplam Kuralı:* $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A + B$
2. *Fark Kuralı:* $\sum(a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n = A - B$
3. *Sabitler Çarpım Kuralı:* $\sum ka_n = k \sum a_n = kA$ (Herhangi bir k)

İspat Seriler için bu üç kural, diziler için verilen Bölüm 11.1, Teorem 1'deki benzer kuralardan çıkar. Serilerin Toplam Kuralı'nı ispatlamak için,

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

olsun. Bu durumda, $\sum(a_n + b_n)$ 'nin kısmi toplamları

$$\begin{aligned} s_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n) \\ &= A_n + B_n \end{aligned}$$

olur.

$A_n \rightarrow A$ ve $B_n \rightarrow B$ olduğundan, dizilerin Toplam Kuralından $s_n \rightarrow A + B$ elde ederiz. Fark Kuralı'nın ispatı da benzerdir.

Serilerin Sabitle Çarpım Kuralını ispatlamak için, $\sum ka_n$ 'nin kısmi toplamlarının, dizilerin Sabitle Çarpım Kuralından kA 'ya yakınsayan

$$s_n = ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n = k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = kA_n,$$

serisini oluşturduklarına dikkat edin. ■

Teorem 8'in sonuçları olarak şunları buluruz:

1. İraksak bir serinin sıfırdan farklı sabit bir katı ıraksar.
2. $\sum a_n$ yakınsıyor ve $\sum b_n$ ıraksıyorsa, hem $\sum(a_n + b_n)$ hem de $\sum(a_n - b_n)$ ıraksar.

İspatları atlıyoruz.

DİKKAT $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serilerinin ikisinde ıraksak iken $\sum(a_n + b_n)$ serisinin yakınsayabildiğini hatırlayın. Örneğin, $\sum a_n = 1 + 1 + 1 + \cdots$ ve $\sum b_n = (-1) + (-1) + (-1) + \cdots$ ıraksarlar oysa $\sum(a_n + b_n) = 0 + 0 + 0 + \cdots$ sıfıra yakınsar.

ÖRNEK 9 Aşağıdaki serilerin toplamlarını bulun.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 1}{6^{n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}} && \text{Fark Kuralı} \\
 &= \frac{1}{1 - (1/2)} - \frac{1}{1 - (1/6)} && a = 1 \text{ ve } r = 1/2, 1/6 \text{ ile geometrik seriler} \\
 &= 2 - \frac{6}{5} \\
 &= \frac{4}{5} \\
 \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} &= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} && \text{Sabitle Çarpım Kuralı} \\
 &= 4 \left(\frac{1}{1 - (1/2)} \right) && a = 1 \text{ ve } r = 1/2 \text{ ile bir geometrik seri} \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

Terim eklemek veya çıkarmak

Bir seriye her zaman, serinin yakınsaklığını veya ıraksaklığını değiştirmeden, sonlu sayıda terim ekleyebilir veya sonlu sayıda terim çıkartabiliriz, ancak yakınsaklık durumunda bu genellikle toplamı değiştirir. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsıyorsa, herhangi bir $k > 1$ için, $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ de yakınsar ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

yazılabilir. Tersten söylersek, $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ herhangi bir $k > 1$ için yakınsıyorsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de yakınsar. Yani,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n}$$

ve

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \right) - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125}$$

olur.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Richard Dedekind
(1831–1916)

Yeniden İndisleme

Terimlerinin sırasını korudukça, herhangi bir seriyi, yakınsaklığını değiştirmeden yeniden indisleyebiliriz. İndisin başlangıç değerini h birim yükseltmek için, a_n 'nin formülünde n yerine $n - h$ yazın:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

İndisin başlangıç değerinin h birim azaltmak içinse, a_n 'nin formülünde n yerine $n + h$ yazın:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Bu yatay bir kayma gibi çalışır. Bunu, bir geometrik seride $n = 1$ indisi yerine $n = 0$ indisi ile başlamakta gördük, fakat herhangi başka bir başlangıç indisi de kullanabiliriz. Genellikle basit ifadeler veren indislemeleri tercih ederiz.

ÖRNEK 10 Bir Geometrik Seriyi Yeniden İndislemek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

geometrik serisini

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}}, \quad \text{veya hatta} \quad \sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}}.$$

şeklinde yazabiliriz. Hangi indislemeyi seçersek seçelim kısmi toplamlar aynı kalır. ■

ALİŞTIRMALAR 11.2

n. Kısmi Toplamları Bulmak

1–6 alıştırmalarında, her serinin n .inci kısmi toplamı için bir formül bulun ve bunu, seri yakınsaksa, serinin toplamını bulmak için kullanın.

1. $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots$

2. $\frac{9}{100} + \frac{9}{100^2} + \frac{9}{100^3} + \cdots + \frac{9}{100^n} + \cdots$

3. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$

4. $1 - 2 + 4 - 8 + \cdots + (-1)^{n-1} 2^{n-1} + \cdots$

5. $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots$

6. $\frac{5}{1 \cdot 2} + \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{5}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{5}{n(n+1)} + \cdots$

Geometrik Terimli Seriler

7–14 alıştırmalarında, her serinin ilk birkaç terimini yazarak serilerin nasıl başladığını gösterin. Serinin toplamını bulun.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$

8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

$$\begin{aligned}
 9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4^n} & \quad 10. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{4^n} \\
 11. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) & \quad 12. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) \\
 13. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n} \right) & \quad 14. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{5^n} \right)
 \end{aligned}$$

Teleskopik Seriler

15–22 alıştırmalarındaki her serinin toplamını kısmi kesirler kullanarak bulun..

$$\begin{aligned}
 15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)} & \quad 16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)} \\
 17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} & \quad 18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \\
 19. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) & \quad 20. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{1/n}} - \frac{1}{2^{1/(n+1)}} \right) \\
 21. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln(n+1)} \right) & \\
 22. \sum_{n=1}^{\infty} (\tan^{-1}(n) - \tan^{-1}(n+1)) &
 \end{aligned}$$

Yakınsaklık veya İraksaklık

23–40 alıştırmalarındaki serilerin hangileri yakınsak hangileri ıraksaktır? Yanıtınızı açıklayın. Yakınsak serilerin toplamını bulun.

$$\begin{aligned}
 23. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n & \quad 24. \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^n \\
 25. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{2^n} & \quad 26. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \\
 27. \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\pi & \quad 28. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{5^n} \\
 29. \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n} & \quad 30. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1}{n} \\
 31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^n} & \quad 32. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}, \quad |x| > 1 \\
 33. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n} & \quad 34. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \\
 35. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1000^n} & \quad 36. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \\
 37. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) & \quad 38. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{2n+1} \right) \\
 39. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi} \right)^n & \quad 40. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n\pi}}{\pi^{ne}}
 \end{aligned}$$

Geometrik Seriler

41–44 alıştırmalarındaki serilerin her birinde, a ve r 'yi bulmak için serinin ilk birkaç terimini yazın ve serinin toplamını bulun. Sonra

$|r| < 1$ eşitsizliğini x cinsinden ifade ederek eşitsizliğin sağlandığı ve serinin yakınsak olduğu x değerlerini bulun.

$$\begin{aligned}
 41. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n & \quad 42. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \\
 43. \sum_{n=0}^{\infty} 3 \left(\frac{x-1}{2} \right)^n & \quad 44. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{1}{3 + \sin x} \right)^n
 \end{aligned}$$

45–50 alıştırmalarında, verilen geometrik serinin yakınsak olduğu x değerlerini bulun. Ayrıca, x 'in bu değerlerinde serilerin toplamını (x 'in bir fonksiyonu olarak) bulun.

$$\begin{aligned}
 45. \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n & \quad 46. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{-2n} \\
 47. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n & \quad 48. \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n (x-3)^n \\
 49. \sum_{n=0}^{\infty} \sin^n x & \quad 50. \sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n
 \end{aligned}$$

Tekrarlanan Ondak Basamaklar

51–58 alıştırmalarındaki sayıların herbirini iki tamsayının oranı olarak ifade edin.

$$\begin{aligned}
 51. 0.\overline{23} &= 0.23\,23\,23\ldots \\
 52. 0.\overline{234} &= 0.234\,234\,234\ldots \\
 53. 0.\overline{7} &= 0.7777\ldots \\
 54. 0.\overline{d} &= 0.ddd\ldots \quad d \text{ bir basamaklıdır.} \\
 55. 0.\overline{06} &= 0.0666\ldots \\
 56. 1.\overline{414} &= 1.414\,414\,414\ldots \\
 57. 1.24\overline{123} &= 1.24\,123\,123\,123\ldots \\
 58. 3.\overline{142857} &= 3.142857\,142857\ldots
 \end{aligned}$$

Teori ve Örnekler

59. Örnek 5'teki seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{ve} \quad \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

olarak da yazılabilir. Bu seriyi (a) $n = -2$, (b) $n = 0$, (c) $n = 5$ ile başlayan birer seri olarak yazın.

60. Örnek 6'daki seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} \quad \text{ve} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(n+1)(n+2)}.$$

olarak da yazılabilir. Bu seriyi (a) $n = -1$, (b) $n = 3$, (c) $n = 20$ ile başlayan birer seri olarak yazın.

61. Sıfırdan farklı terimlerden oluşan ve toplamı

$$\text{a. } 1 \quad \text{b. } -3 \quad \text{c. } 0$$

olan sonsuz seriler kurun.

62. (Alıştırma 61'in devamı) İstedığınız sayıya yakınsayan sıfırdan farklı terimli sonsuz bir seri kurabilir misiniz? Açıklayın.

63. Örnekle, $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ yakınsak olsa ve hiçbir b_n sıfır olmasa bile, $\sum (a_n/b_n)$ 'nin ıraksayabileceğini gösterin.

64. $\sum a_n b_n$ 'nin AB 'ye eşit olmadan yakınsayabileceğini gösterecek yakınsak $A = \sum a_n$ ve $B = \sum b_n$ geometrik serisi bulun.
65. Örnekle, $A = \sum a_n$, $B = \sum b_n \neq 0$ olsa ve hiçbir b_n sıfır olmasa bile, $\sum(a_n/b_n)$ 'nin A/B 'den farklı bir sayıya yakınsayabileceğini gösterin.
66. $\sum a_n$ yakınsıyorsa ve her n için $a_n > 0$ ise, $\sum(1/a_n)$ hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.
67. İraksak bir seriye sonlu sayıda terim eklerseniz veya ıraksak bir seriden sonlu sayıda terim çıkarırsanız ne olur? Yanıtınızı açıklayın.
68. $\sum a_n$ yakınsak ve $\sum b_n$ ıraksaksa, terim-terim toplamaları $\sum(a_n + b_n)$ hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.
69. Aşağıdaki koşullarda, 5 sayısına yakınsayan bir $\sum ar^{n-1}$ geometrik serisi kurun.

a. $a = 2$

b. $a = 13/2$.

70.

$$1 + e^b + e^{2b} + e^{3b} + \dots = 9$$

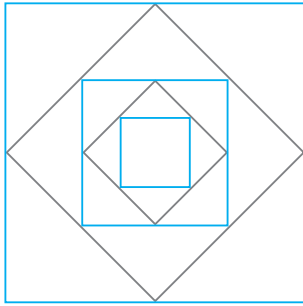
olmasını sağlayacak b değerini bulun.

71. Hangi r değerlerinde

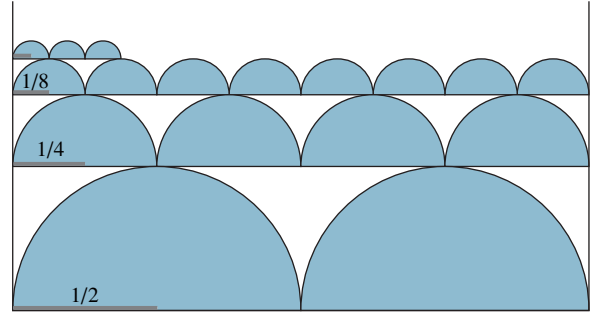
$$1 + 2r + r^2 + 2r^3 + r^4 + 2r^5 + r^6 + \dots$$

sonsuz serisi yakınsar? Yakınsak serinin toplamını bulun.

72. Yakınsak bir seri yerine s_n kısmi toplamlarından birini yazmanın vereceği $(L - s_n)$ hatasının $ar^n/(1-r)$ olduğunu gösterin.
73. Bir top 4 m yükseklikten bırakılmaktadır. h metrelik yükseklikten kaldırırma her çarptığında $0.75h$ yüksekliğine sıçramaktadır. Topun aşağı ve yukarı aldığı toplam mesafeyi bulun.
74. (Alıştırma 73'ün devamı) Alıştırma 73'teki topun hareket ettiği toplam süreyi saniye olarak bulun. (İpucu: $s = 4.9t^2$ formülü $t = \sqrt{s/4.9}$ verir.)
75. Aşağıdaki şekil bir kareler dizisinin ilk beşini göstermektedir. En dıştaki karenin alanı 4 m^2 'dir. Diğer her kare kendinden önceki karelerin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek oluşturulmuştur. Tüm karelerin alanlarının toplamını bulun.

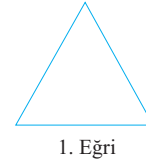


76. Aşağıdaki şekil yarım çember sıralarından oluşan bir dizinin ilk üç sırasını ve dördüncü sırasının bir bölümünü göstermektedir. n . sırada yarıçapları $1/2^n$ olan 2^n yarım çember vardır. Tüm yarım çemberlerin alanlarının toplamını bulun.

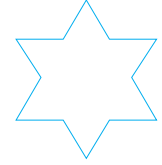


77. **Helga von Koch'un kar tanesi eğrisi** Helga von Koch'un kar tanesi eğrisi sonlu bir alanı sınırlayan sonsuz uzunluklu bir eğridir. Bunun neden böyle olduğunu anlamak için, eğrinin kenarları 1 uzunluğunda olan bir eşkenar üçgenle başlatıldığını varsayın.

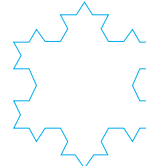
- a. n . eğri C_n 'nin uzunluğu L_n 'yi bulun ve $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \infty$ olduğunu gösterin.
- b. C_n 'nin çevrelediği A_n alanını bulun ve $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 'yi hesaplayın.



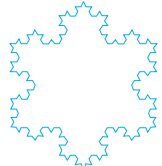
1. Eğri



2. Eğri

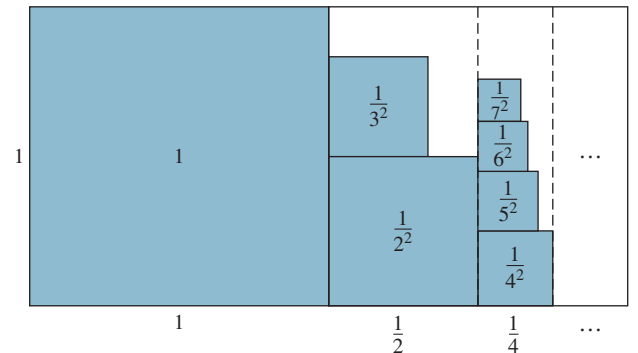


3. Eğri



4. Eğri

78. Aşağıdaki şekil $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ 'nin 2'den küçük olduğunu formel olmayan bir ispatını verir. Ne olduğunu açıklayın. (Kaynak: "Convergence with Pictures", P.J: Rippon, *American Mathematical Monthly*, Vol. 93, No. 6, 1986, s. 476-478.)



11.3

Integral Testi

Elimizde bir $\sum a_n$ serisi varsa, iki soru sorarız:

1. Seri yakınsar mı?
2. Yakınsarsa, toplamı nedir?

Bu bölümün geri kalanının çoğu ilk soruya ayrılmıştır ve bu bölümde, $\int_1^\infty f(x) dx$ genelleştirilmiş integralinin yakınsaklığına bir bağlantı kurarak, bu soruyu cevaplıyoruz. Fakat pratik bakımdan, ikinci soru da aynı derecede önemlidir ve buna daha sonra döneceğiz.

Bu ve bundan sonraki iki alt bölümde, negatif terimler içermeyen serileri inceleyeceğiz. Bu kısıtlamanın nedeni, bu serilerin kısmi toplamlarının azalmayan diziler oluşturması ve üstten sınırlı azalmayan dizilerin daima yakınsamasıdır. (Bölüm 11.1, Teorem 6). Terimleri negatif olmayan bir serinin yakınsadığını göstermek için, sadece kısmi toplamlarının üstten sınırlı olduklarını göstermemiz gerekir.

Bu yaklaşımın söz konusu serinin toplamını bulmadan yakınsaklığını belirlemesi, ilk bakışta bir çekingenlik yaratabilir. Elbette, serilerin toplamlarını doğrudan kısmi toplamların formüllerinden hesaplamak daha iyidir. Fakat birçok durumda, bu tip formüller bulunamaz ve bunların yokluğunda, önce yakınsaklığı doğrulamak, sonra da toplama yaklaşım yapmaktan oluşan iki adımlı işleme dönmek zorunda kalırız.

Azalmayan Kısmi Toplamlar

$\sum_{n=1}^\infty a_n$ 'nin, her n için $a_n \geq 0$ olacak şekilde bir sonsuz seri olduğunu varsayın. Bu durumda, her kısmi toplam kendinden öncekine eşit veya ondan büyüktür, çünkü $s_{n+1} = s_n + a_n$ 'dir:

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \dots$$

Kısmi toplamlar azalmayan bir dizi oluşturduklarından dolayı, Azalmayan Dizi Teoremi (Bölüm 11.1, Teorem 6) serinin ancak ve yalnız kısmi toplamları üstten sınırlıysa yakınsayacağını söyler.

Teorem 6'nın Sonucu

Negatif terimler içermeyen bir $\sum_{n=1}^\infty a_n$ serisi ancak ve yalnız kısmi toplamları üstten sınırlıysa yakınsar.

ÖRNEK 1 Harmonik Seri

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

serisine **harmonik seri** denir. Harmonik seri ıraksar, fakat n . Terim Testinden dolayı değildir. n .inci terim, $1/n$, sıfıra gider fakat seri yine de ıraksaktır. ıraksamanın nedeni kısmi toplamlarının bir üst sınırının olmamasıdır. Nedenini anlamak için, serideki terimleri aşağıdaki şekilde gruplandırın:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> \frac{2}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> \frac{4}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{> \frac{8}{16} = \frac{1}{2}} + \dots$$

TARİHSEL BİYOGRAFI

Nicole Oresme
(1320–1382)

İlk iki terimin toplamı 1.5'tir. Sonraki iki terimin toplamı ise, $1/4 + 1/4 = 1/2$ 'den büyük olan $1/3 + 1/4$ 'tür. Bundan sonraki dört terimin toplamı ise, $1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8$ 'dir ki, bu da $1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 = 1/2$ 'den büyüktür. Sonraki sekiz terimin toplamı $1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16$ 'dır ki, bu da $8/16 = 1/2$ 'den büyüktür. Daha sonraki 16 terimin toplamı $16/32 = 1/2$ 'den büyüktür ve toplam böyle devam eder. Genel olarak, $1/2^{n+1}$ ile biten 2^n terimin toplamı, $2^n/2^{n+1} = 1/2$ 'den büyüktür. Kısmi toplamlar dizisi üstten sınırlı değildir: $n = 2^k$ ise, s_n kısmi toplamı $k/2$ 'den büyüktür. Harmonik seri ıraksar.

İntegral Testi

İntegral Testini harmonik seriyle ilişkili, fakat n . terimi $1/n$ yerine $1/n^2$ olan bir seriyle tanıttacağız.

ÖRNEK 2 Aşağıdaki seri yakınsar mı?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

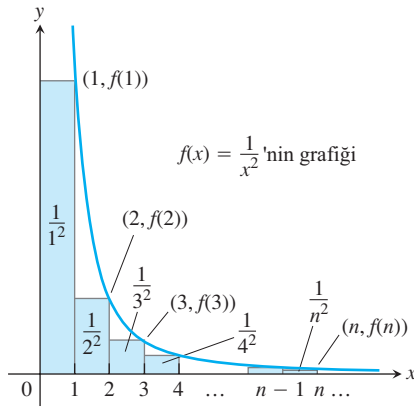
Çözüm $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ 'nin yakınsaklığını, $\int_1^{\infty} (1/x^2) dx$ ile karşılaştırarak belirleriz. Karşılaştırmayı yürütmek için, serinin terimlerini $f(x) = 1/x^2$ fonksiyonunun değerleri olarak düşünür ve bu değerleri $y = 1/x^2$ eğrisinin altındaki dikdörtgenlerin alanları olarak yorumlarız.

Şekil 11.7'den görüldüğü gibi,

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\ &= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \\ &< f(1) + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx \\ &< 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \\ &< 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Bölüm 8.8, Örnek 3'te olduğu gibi, $\int_1^{\infty} (1/x^2) dx = 1$ 'dir.

bulunur. Yani, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ 'nin kısmi toplamları üstten sınırlıdır (2 ile) ve seri yakınsar. Serinin toplamı $\pi^2/6 \approx 1.64493$ 'tür (Bölüm 11.11 de Alıştırma 16'ya bakın).



ŞEKİL 11.7 $f(x) = 1/x^2$ 'nin grafiği altındaki dikdörtgenlerin alanlarının toplamı grafiğin altındaki alandan küçüktür (Örnek 2).

Dikkat

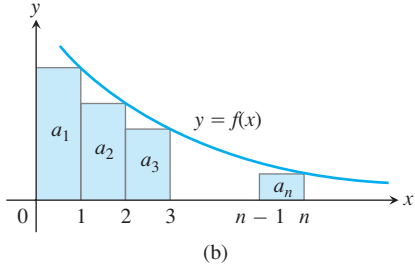
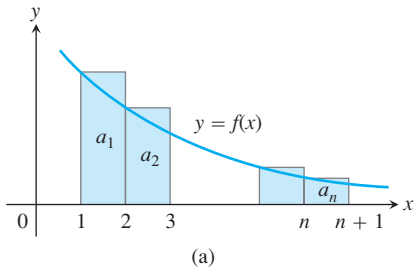
Yakınsaklık durumunda serinin ve integralin değerlerinin aynı olması gerekmez. Örnek 2'de gördüğümüz gibi, $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) = \pi^2/6$ iken $\int_1^{\infty} (1/x^2) dx = 1$ 'dir.

TEOREM 9 İntegral Testi

$\{a_n\}$ pozitif terimli bir dizi olsun f , her $x \geq N$ (N pozitif bir tamsayı) için x 'in sürekli, pozitif ve azalan bir fonksiyonu olmak üzere, $a_n = f(n)$ olduğunu varsayın. Bu durumda, $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ serisi ve $\int_N^{\infty} f(x) dx$ integralinin ikisi de ya yakınsar, ya da ıraksar.

İspat Testi $N = 1$ için kullanacağız. Genel N değerleri için ispat benzerdir.

f 'nin, her n için $f(n) = a_n$ olmak üzere, azalan bir fonksiyon olduğu varsayımıyla işe başlarız. Bu bizi, Şekil 11.8(a)'da, alanları $a_1, a_2, \dots, a_n$ olan dikdörtgenlerin, birlikte,



ŞEKİL 11.8 İntegral Testinin koşullarına uygun olarak, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ve $\int_1^{\infty} f(x) dx$ integralinin ikisi de ya yakınsar, ya da ıraksar.

$x = 1$ 'den $x = n + 1$ 'e kadar $y = f(x)$ eğrisinin altında kalan alandan daha fazla alan kapladıklarını gözlemeye götürür. Yani,

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Şekil 11.8(b)'de, dikdörtgenler sağa doğru değil, sola doğru yerleştirilmişlerdir. Bir a_1 için ilk dikdörtgeni göz ardı edersek,

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq \int_1^n f(x) dx$$

olduğunu görürüz. a_1 'i de eklersek,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x) dx$$

buluruz. Bu iki sonucu birleştirmek

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x) dx$$

verir. Bu eşitsizlikler her n için geçerlidir ve $n \rightarrow \infty$ iken de geçerli kalırlar.

$\int_1^{\infty} f(x) dx$ sonlu ise sağ taraftaki eşitsizlik $\sum a_n$ 'nin sonlu olduğunu gösterir. $\int_1^{\infty} f(x) dx$ sonsuz ise sol taraftaki eşitsizlik $\sum a_n$ 'nin sonsuz olduğunu gösterir.

Dolayısıyla, seri ve integralin ikisi de ya sonludur, ya da sonsuzdur. ■

ÖRNEK 3 p -Serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

p -serisinin (p reel bir sabit) $p > 1$ ise yakınsayacağını, $p \leq 1$ ise ıraksayacağını gösterin.

Çözüm $p > 1$ ise, $f(x) = 1/x^p$, x 'in pozitif azalan bir fonksiyonu olur.

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^b \\ &= \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{1-p} (0 - 1) = \frac{1}{p-1}, \end{aligned}$$

$p-1 > 0$ olduğundan $b \rightarrow \infty$ iken $b^{p-1} \rightarrow \infty$

olduğundan, İntegral Testine göre seri yakınsaktır. p -Serisinin toplamının $1/(p-1)$ olmadığını vurguluyoruz. Seri yakınsaktır fakat hangi değere yakınsadığını bilmiyoruz.

$p < 1$ ise, $1-p > 0$ ve

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow \infty} (b^{1-p} - 1) = \infty.$$

olur. İntegral Testi'ne göre seri ıraksaktır.

$p = 1$ ise, (ıraksak) harmonik seriyi buluruz:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

$p > 1$ için yakınsaklık vardır, fakat başka her p değeri için ıraksaklık bulunur. ■

$p = 1$ ile p -serisi **harmonik seridir** (Örnek 1). p -Serisi Testi harmonik serinin ancak zorbela ıraksadığını gösterir; p 'yi örneğin 1.000000001'e yükseltirsek seri yakınsak olur!

Harmonik serinin kısmi toplamalarının sonsuza gitmesinin yavaşlığı etkileyicidir. Örneğin, harmonik serinin kısmi toplamalarının 20'yi aşması için yaklaşık 178,482,301 terim gerekir. Hesap makinenizle bu kadar çok terimi toplamak birkaç hafta sürerdi. (Ayrıca, Alıştırma 33b'ye bakın)

ÖRNEK 4 Yakınsak Bir Seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

serisi, İntegral Testine göre yakınsar. $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ fonksiyonu $x \geq 1$ için pozitif, sürekli ve azalandır, ve

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan x]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan b - \arctan 1] \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

tür. Yine serinin toplamının $\pi/4$ olmadığını vurguluyoruz. Seri yakınsaktır, fakat toplamının değerini bilmiyoruz. ■

Örnek 4'teki serinin yakınsaklığı, $\sum 1/n^2$ serisiyle karşılaştırma ile de gerçelenebilirdi. Karşılaştırma testleri bundan sonraki bölümde incelenmektedir.

ALİŞTIRMALAR 11.3

Yakınsaklık veya İraksaklığı Belirlemek

1–30 alıştırmalarındaki serilerin hangileri yakınsar, hangileri ıraksar? Yanıtlarınızı açıklayın. (Bir yanıtı kontrol ederken, bir serinin yakınsaklığını veya ıraksaklığını belirlemenin birden fazla yolu olduğunu hatırlayın)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+1}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\sqrt{n}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{8^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{n}$

9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

10. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n + 3}$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{n+1}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$

17. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 3)^n}$

21. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(1/n)}{(\ln n)\sqrt{\ln^2 n - 1}}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + \ln^2 n)}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$ 24. $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{1}{n}$
 25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1 + e^{2n}}$ 26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1 + e^n}$
 27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \tan^{-1} n}{1 + n^2}$ 28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$
 29. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech} n$ 30. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech}^2 n$

Teori ve Örnekler

31 ve 32 alıştırma serilerindeki seriler, yakınsıyorlarsa, hangi a değerleri için yakınsarlar?

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n+2} - \frac{1}{n+4} \right)$ 32. $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2a}{n+1} \right)$

33. a. Şekil 11.7 ve 11.8'deki gibi şekiller çizerek, harmonik serinin kısmi toplamlarının aşağıdaki eşitsizlikleri sağladığını gösterin.

$$\begin{aligned} \ln(n+1) &= \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &\leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \ln n. \end{aligned}$$

1 b. İraksadığını bildiğimiz halde, harmonik serinin ıraksaklığının gözlemsel bir delili yoktur. Sadece kısmi toplamlar çok yavaş büyürler. Ne demek istediğimizi anlamak için, 13 milyar yıl önce, evrenin yaratıldığı gün $s_1 = 1$ ile başladığınızı ve her s_n 'ye yeni bir terim eklediğinizi varsayın. Bir yılın 365-gün olduğunu kabul edersek, bugün s_n kısmi toplamı ne kadar olur?

34. $\sum_{n=1}^{\infty} (1/(nx))^n$ 'in yakınsak olduğu bir x değeri var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

35. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif sayılardan oluşan ıraksak bir seriye, her n için, $b_n < a_n$ olacak şekilde bir $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitif sayı serisinin bulunacağı doğru mudur? Pozitif sayıların bir "en küçük" ıraksak serisi var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

36. (Alıştırma 35'in devamı) Pozitif sayıların bir "en büyük" yakınsak serisi var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

37. **Cauchy sıkılaştırma testi.** Cauchy sıkılaştırma testi şunu söyler: $\{a_n\}$ 0'a yakınsayan, pozitif terimli ve artmayan (her n için $a_n \geq a_{n+1}$) bir dizi olsun. Bu durumda, ancak ve yalnız $\sum 2^n a_{2^n}$ yakınsıyorsa, $\sum a_n$ yakınsar. Mesela, $\sum (1/n)$ ıraksar, çünkü $\sum 2^n \cdot (1/2^n) = \sum 1$ ıraksar. Testin neden işe yaradığını açıklayın.

38. Alıştırma 37'deki Cauchy sıkılaştırma testini kullanarak aşağıdakileri gösterin.

- a. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ıraksar;
 b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$ ise yakınsar ve $p \leq 1$ ise ıraksar.

39. Logaritmik p -serisi

a. Ancak ve yalnız $p > 1$ ise

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} \quad (p \text{ pozitif bir sabit})$$

integralinin yakınsak olduğunu gösterin.

b. (a) şıkkındaki sonuç

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

serisinin yakınsaklığı hakkında ne söyler? Yanıtınızı açıklayın.

40. (Alıştırma 39'un devamı.) Alıştırma 39'un sonucunu kullanarak aşağıdaki serilerden hangilerinin yakınsak olduğunu ve hangilerinin ıraksak olduğunu belirleyin. Her durumda yanıtınızı destekleyin.

- a. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)}$ b. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1.01}}$
 c. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n^3)}$ d. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

41. **Euler sabiti** Şekil 11.8'deki gibi grafikler n artarken

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

toplamı ile

$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

integrali arasındaki farkta fazla bir değişiklik olmayacağını belirtir. Bunu araştırmak için, aşağıdaki adımları izleyin.

a. Teorem 9'un ispatında $f(x) = 1/x$ olarak

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln n$$

veya

$$0 < \ln(n+1) - \ln n \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \leq 1$$

olduğunu gösterin. Yani,

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

dizisi alttan ve üstten sınırlıdır.

b.

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1) - \ln n$$

olduğunu gösterin ve bu sonucu kullanarak (a) şıkkındaki $\{a_n\}$ dizisinin azaldığını gösterin.

Alttan sınırlı azalan bir seri yakınsak olduğundan (Bölüm 11.1, Alıştırma 107), (a)'da tanımlanan a_n sayıları yakınsar:

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \rightarrow \gamma.$$

Değeri 0.5772..., olan γ sayısına *Euler sabiti* denir. π ve e gibi

diğer özel sayıların aksine, γ için daha basit formülasyon kurallı bir ifade bulunamamıştır.

42. İntegral testini kullanarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$$

serisinin yakınsadığını gösterin.

11.4

Karşılaştırma Testleri

Geometrik serinin, p -serisinin ve birkaç başka serinin yakınsaklıklarının nasıl belirleneceğini gördük. Daha birçok serinin yakınsaklığını, terimlerini yakınsaklığı bilinen bir serinin terimleri ile karşılaştırarak test edebiliriz.

TEOREM 10 Karşılaştırma Testi

$\sum a_n$ negatif terim içermeyen bir seri olsun.

- (a) N herhangi bir tamsayı olmak üzere her $n > N$ için, $a_n \leq c_n$ olacak şekilde yakınsak bir $\sum c_n$ serisi varsa $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.
- (b) N herhangi bir tamsayı olmak üzere her $n > N$ için $a_n \geq d_n$ olacak şekilde negatif terim içermeyen ıraksak bir $\sum d_n$ serisi varsa, $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Albert of Saxony
(ca. 1316–1390)

İspat (a) şıkında, $\sum a_n$ 'nin kısmi toplamaları üstten

$$M = a_1 + a_2 + \cdots + a_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n$$

ile sınırlıdır. Dolayısıyla, bir $L \leq M$ limitiyle azalmayan bir dizi oluştururlar.

(b) şıkında, $\sum a_n$ 'nin kısmi toplamaları üstten sınırlı değildir. Sınırlı olsalardı, $\sum d_n$ 'nin kısmi toplamaları

$$M^* = d_1 + d_2 + \cdots + d_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

ile sınırlı olurlardı ve $\sum d_n$ ıraksamak yerine yakınsardı. ■

ÖRNEK 1 Karşılaştırma Testini Uygulamak

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$$

serisi ıraksaktır. Çünkü; n . terimi

$$\frac{5}{5n-1} = \frac{1}{n-\frac{1}{5}} > \frac{1}{n}$$

ıraksak olan harmonik serinin n .inci teriminden büyüktür.

(b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

serisi yakınsaktır. Çünkü; bütün terimleri pozitifdir ve

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots$$

serisinin karşı gelen terimlerinden küçük veya eşittir. Sol taraftaki geometrik seri yakınsaktır ve

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1 - (1/2)} = 3$$

tür. 3'ün, $\sum_{n=0}^{\infty} (1/n!)$ serisinin kısmi toplamaları için bir üst sınır olması serinin 3'e yakınsaması anlamına gelmez. Bölüm 11.9'da göreceğimiz gibi seri e 'ye yakınsar.

(c)

$$5 + \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + 1 + \frac{1}{2 + \sqrt{1}} + \frac{1}{4 + \sqrt{2}} + \frac{1}{8 + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2^n + \sqrt{n}} + \dots$$

serisi yakınsaktır. Bunu görmek için ilk üç terimi ihmal ederiz ve kalan terimleri, yakınsak olan $\sum_{n=0}^{\infty} (1/2^n)$ geometrik serisinin terimleri ile karşılaştırırız. Budanmış serinin $1/(2^n + \sqrt{n})$ terimi, geometrik serinin karşı gelen $1/2^n$ teriminden küçüktür. Terim terime

$$1 + \frac{1}{2 + \sqrt{1}} + \frac{1}{4 + \sqrt{2}} + \frac{1}{8 + \sqrt{3}} + \dots \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

karşılaştırmasını görürüz. Dolayısıyla, Karşılaştırma Testinin bir uygulamasına göre budanmış seri ve orijinal seri yakınsaktır. ■

Limit Karşılaştırma Testi

Şimdi, özellikle a_n genel terimi n 'nin rasyonel fonksiyonu şeklinde olan seriler için kullanışlı bir karşılaştırma testi tanıtacağız.

TEOREM 11 Limit Karşılaştırma Testi

Her $n \geq N$ (N bir tamsayı) için $a_n > 0$ ve $b_n > 0$ olduğunu varsayın.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ ise, $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ 'nin ikisi birden yakınsak veya ıraksaktır.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ise ve $\sum b_n$ yakınsak ise, $\sum a_n$ 'de yakınsaktır.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ise ve $\sum b_n$ ıraksak ise, $\sum a_n$ 'de ıraksaktır.

İspat (1) şikkını ispatlayacağız. (2) ve (3) şıkları Alıştırma 37(a) ve (b)'ye bırakılmıştır. $c/2 > 0$ olduğundan, her n için

$$n > N \Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \frac{c}{2} \quad \begin{array}{l} \epsilon = c/2, L = c \text{ ve } a_n \text{ yerine} \\ a_n/b_n \text{ alınmış olarak limit} \\ \text{tanımı} \end{array}$$

sağlanacak şekilde bir N tamsayısı vardır. Dolayısıyla $n > N$ için,

$$-\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} - c < \frac{c}{2},$$

$$\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2},$$

$$\left(\frac{c}{2}\right)b_n < a_n < \left(\frac{3c}{2}\right)b_n$$

bulunur. $\sum b_n$ yakınsak ise, $\sum (3c/2)b_n$ de yakınsaktır ve Doğrudan Karşılaştırma Testine göre $\sum a_n$ de yakınsaktır. $\sum b_n$ ıraksak ise, $\sum (c/2)b_n$ de ıraksaktır ve Doğrudan Karşılaştırma Testine göre $\sum a_n$ de ıraksak olur. ■

ÖRNEK 2 Limit Karşılaştırma Testini Kullanmak

Aşağıdaki serilerin hangisi yakınsar, hangisi ıraksar?

$$(a) \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$$

$$(b) \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

$$(c) \frac{1+2\ln 2}{9} + \frac{1+3\ln 3}{14} + \frac{1+4\ln 4}{21} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$$

Çözüm

(a) $a_n = (2n+1)/(n^2+2n+1)$ olsun. Büyük n değerleri için, a_n 'nin $2n/n^2 = 2/n$ gibi davranmasını bekleriz, dolayısıyla $b_n = 1/n$ alırsız.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ıraksak olduğundan ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n}{n^2 + 2n + 1} = 2$$

olduğundan, Limit Karşılaştırma Testinin 1. kısmına göre $\sum a_n$ ıraksaktır. $b_n = 2/n$ 'yi de olabilirdik, fakat $1/n$ daha basittir.

- (b) $a_n = 1/(2^n - 1)$ olsun. Büyük n değerleri için, a_n 'nin $1/2^n$ gibi davranmasını bekleriz, dolayısıyla $b_n = 1/2^n$ alırlz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

yakınsak olduğundan ve

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - (1/2^n)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan, Limit Karşılaştırma Testinin 1. kısmına göre $\sum a_n$ yakınsaktır.

- (c) $a_n = (1 + n \ln n)/(n^2 + 5)$ olsun. Büyük n değerleri için, a_n 'nin $(n \ln n)/n^2 = (\ln n)/n$ gibi davranmasını bekleriz, ki bu $n \geq 3$ için $1/n$ 'den büyüktür, dolayısıyla $b_n = 1/n$ alırlz.

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ıraksak olduğundan ve

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + n^2 \ln n}{n^2 + 5} \\ &= \infty \end{aligned}$$

olduğundan, Limit Karşılaştırma Testinin 3. kısmına göre $\sum a_n$ ıraksaktır. ■

ÖRNEK 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ yakınsar mı?

Çözüm $\ln n$ herhangi bir pozitif c sabiti için n^c 'den daha yavaş büyüdüğü için (Bölüm 11.1, Alıştırma 91), yeterince büyük n değerleri için

$$\frac{\ln n}{n^{3/2}} < \frac{n^{1/4}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{5/4}}$$

olmasını bekleriz. Gerçekten de, $a_n = (\ln n)/n^{3/2}$ ve $b_n = 1/n^{5/4}$ olarak

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{1/4}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{(1/4)n^{-3/4}} \quad \text{f'Hôpital Teorisi} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^{1/4}} = 0 \end{aligned}$$

buluruz. $\sum b_n = \sum (1/n^{5/4})$ ($p > 1$ ile bir p -serisi) yakınsak olduğundan, Limit Karşılaştırma Testinin 2. kısmına göre, $\sum a_n$ yakınsak olur.

ALİŞTIRMALAR 11.4

Yakınsaklık veya İraksaklığı Belirlemek

1–36 alıştırmalarındaki serilerden hangileri yakınsar, hangileri ıraksar? Yanıtlarınızı açıklayın.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n + \sqrt{n}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{n^2}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n - 1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n^2 \sqrt{n}}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n + 1} \right)^n$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}}$
9. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$
10. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n^3}$
13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \ln n}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \ln n)^2}$
17. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n + 1)}{n + 1}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \ln^2 n)}$
19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2 - 1}}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - n}{n2^n}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2^n}{n^2 2^n}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1} + 1}$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} + 1}{3^n}$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n}$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n + 1}{n(n + 1)(n + 2)}$
28. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n^3 - 3n}{n^2(n - 2)(n^2 + 5)}$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^{1.1}}$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sec^{-1} n}{n^{1.3}}$
31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth n}{n^2}$
32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{n^2}$
33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$
34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$
35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$
36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}$

Teori ve Örnekler

37. Limit Karşılaştırma Testinin (a) 2. kısmını ve (b) 3. kısmını ispatlayın.

38. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ negatif olmayan sayılardan oluşan yakınsak bir seri ise, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n)$ için ne söylenebilir? Açıklayın.
39. $n \geq N$ (N bir tamsayı) için, $a_n > 0$ ve $b_n > 0$ olduğunu varsayın. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = \infty$ ve $\sum a_n$ yakınsak ise, $\sum b_n$ hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.
40. $\sum a_n$ negatif olmayan sayılardan oluşan yakınsak bir seri ise, $\sum a_n^2$ 'nin de yakınsak olduğunu ispatlayın.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

41.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$$

serisi ıraksak mı veya yakınsak mı hala bilinmemektedir. Bir BCS kullanarak, aşağıdaki adımları izleyip serinin davranışını araştırın.

a.

$$s_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$$

kısmi toplamlar dizisini tanımlayın. $k \rightarrow \infty$ iken s_k 'nin limitini bulmaya kalkarsanız ne olur? BCS'niz bu limit için kapalı bir ifade verir mi?

- b. Kısmi toplamlar dizisinin ilk 100 (k, s_k) noktasını işaretleyin. Noktalar yakınsıyor gibi mi? Limitin ne olmasını beklersiniz?
- c. Sonra ilk 200 (k, s_k) noktasını işaretleyin. Davranışı kendi kelimelerinizle tartışın.
- d. İlk 400 (k, s_k) noktasını işaretleyin. $k = 355$ iken ne olur? $355/113$ sayısını hesaplayın. Hesabınızdan $k = 355$ 'de ne olduğunu açıklayın. k 'nin hangi değerleri için bu davranışın tekrarlanmasını beklersiniz?

Mazes for the Mind by Clifford A. Pickover, St. Martin's Press, Inc., New York, 1992'de bu seri hakkında ilginç bir tartışma bulacaksınız.

11.5

Kök ve Oran Testleri

Oran Testi, a_{n+1}/a_n oranını inceleyerek, bir serinin büyüme (veya azalma) oranını ölçer. Bir $\sum ar^n$ geometrik serisi için, bu oran bir sabittir ($(a^{n+1})/(a^n) = r$), ve seri ancak ve yalnızca oranın mutlak değerce 1'den küçükse yakınsaktır. Oran Testi bu sonucu genişleten kuvvetli bir kuraldır. Bunu bir sonraki sayfada Karşılaştırma Testini kullanarak ispat edeceğiz.

TEOREM 12 **Oran Testi**

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri olsun ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho.$$

olduğunu varsayın. Bu durumda,

- (a) $\rho < 1$ ise, *seri yakınsar*.
- (b) $\rho > 1$ veya ρ sonsuz ise, *seri ıraksar*.
- (c) $\rho = 1$ ise, *test sonuçsuzdur*.

İspat

- (a) $\rho < 1$. r , ρ ile 1 arasında bir sayı olsun. Bu durumda $\epsilon = r - \rho$ sayısı pozitifdir.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \rho$$

olduğundan, n yeterince büyükken, mesela her $n \geq N$ için, a_{n+1}/a_n oranı ρ 'nun ϵ civarında bulunmalıdır. Özel olarak

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \epsilon = r, \quad n \geq N \text{ için}$$

olur. Yani,

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< ra_N, \\ a_{N+2} &< ra_{N+1} < r^2 a_N, \\ a_{N+3} &< ra_{N+2} < r^3 a_N, \\ &\vdots \\ a_{N+m} &< ra_{N+m-1} < r^m a_N. \end{aligned}$$

Bu eşitsizlikler serimizin terimlerinin, N . terimden sonra $r < 1$ oranı ile bir geometrik serinin terimlerinden daha hızlı sifıra yaklaştığını gösterir. Daha kesin olarak, $n = 1, 2, \dots, N$ için $c_n = a_n$ ve $c_{N+1} = ra_N$, $c_{N+2} = r^2 a_N, \dots, c_{N+m} = r^m a_N, \dots$ olacak şekilde bir $\sum c_n$ serisini düşünün. Her n için, $a_n \leq c_n$ 'dir ve

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} + a_N + ra_N + r^2 a_N + \dots \\ &= a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} + a_N(1 + r + r^2 + \dots) \end{aligned}$$

olur. $1 + r + r^2 + \dots$ geometrik serisi yakınsaktır, çünkü $|r| < 1$ 'dir, dolayısıyla $\sum c_n$ yakınsak olur. $a_n \leq c_n$ olduğundan, $\sum a_n$ de yakınsak olur.

- (b) $1 < \rho \leq \infty$. Bir M indisinden sonra,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{ve} \quad a_M < a_{M+1} < a_{M+2} < \dots$$

olur. Serinin terimleri n sonsuz olurken sifıra yaklaşmazlar ve seri n . Terim Testinden dolayı ıraksar.

(c) $\rho = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

serileri, $\rho = 1$ iken, başka yakınsaklık testlerinin kullanılması gerektiğini gösterir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ için: } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ için: } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \rightarrow 1^2 = 1$$

İki durumda da, $\rho = 1$ 'dir, ama yine de birinci seri ıraksarken ikincisi yakınsar. ■

Oran Testi genellikle bir serinin terimleri n 'yi içeren ifadelerin faktoriyellerini veya n . kuvveti alınmış ifadeleri içerdiği zaman etkilidir.

ÖRNEK 1 Oran Testini Uygulamak

Aşağıdaki serilerin yakınsaklığını araştırın.

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!n!}{(2n)!}$$

Çözüm

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 5)/3^n$ serisi için,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2^{n+1} + 5)/3^{n+1}}{(2^n + 5)/3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{n+1} + 5}{2^n + 5} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2 + 5 \cdot 2^{-n}}{1 + 5 \cdot 2^{-n}}\right) \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}.$$

Seri yakınsar, çünkü $\rho = 2/3$, 1'den küçüktür. Bu serinin toplamının $2/3$ olduğu anlamına gelmez. Gerçekten de,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \frac{1}{1 - (2/3)} + \frac{5}{1 - (1/3)} = \frac{21}{2}$$

bulunur.

(b) $a_n = \frac{(2n)!}{n!n!}$ ise, o zaman $a_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$ olur ve

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n!n!(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+1} \rightarrow 4 \end{aligned}$$

buluruz. Seri ıraksar, çünkü $\rho = 4$, 1'den büyüktür.

(c) $a_n = 4^n n!n!(2n)!$ ise,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!(2n+2)!}{4^n n!n!(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n n!n!} \\ &= \frac{4(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+1} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

olur.

Limit $\rho = 1$ olduğu için, Oran Testinden serinin yakınsak olup olmadığını anlayamayız. Ancak, $a_{n+1}/a_n = (2n+2)/(2n+1)$ olduğunu fark ettiğimizde, a_{n+1} 'in her zaman a_n 'den büyük olduğu sonucunu çıkarırız, çünkü $(2n+2)/(2n+1)$ her zaman 1'den büyüktür. Dolayısıyla bütün terimler $a_1 = 2$ 'ye eşit veya ondan büyüktür ve $n \rightarrow \infty$ iken, n . terim sıfıra gitmez. Seri ıraksar. ■

Kök Testi

$\sum a_n$ için şimdiye kadar gördüğümüz yakınsama testleri a_n 'nin formülü oldukça basitken işe yarar. Fakat aşağıdaki durumu düşünün.

ÖRNEK 2 $a_n = \begin{cases} n/2^n, & n \text{ tek} \\ 1/2^n, & n \text{ çift} \end{cases}$ olsun. $\sum a_n$ yakınsar mı?

Çözüm Serinin birkaç terimini yazalım.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{7}{2^7} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{5}{32} + \frac{1}{64} + \frac{7}{128} + \cdots \end{aligned}$$

Bu, kesin olarak bir geometrik seri değildir. $n \rightarrow \infty$ iken, n . terim sıfıra yaklaşır, dolayısıyla serinin ıraksayıp ıraksamadığını bilmiyoruz. İntegral Testi pek umut verici görünmemektedir. Oran Testi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2n}, & n \text{ tek} \\ \frac{n+1}{2}, & n \text{ çift} \end{cases}$$

verir. $n \rightarrow \infty$ iken, oran büyük ile küçük değerler arasında değişir ve bir limiti yoktur. Soruya yanıt verecek (seri yakınsar) bir test Kök Testidir. ■

TEOREM 13

Kök Testi

$\sum a_n$, $n \geq N$ için, $a_n \geq 0$ olacak şekilde bir seri olsun ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

olduğunu varsayın. Bu durumda,

- (a) $\rho < 1$ ise, seri *yakınsar*.
- (b) $\rho > 1$ veya ρ sonsuz ise, seri *ıraksar*.
- (c) $\rho = 1$ ise, test *sonuçsuzdur*.

İspat

- (a) $\rho < 1$. $\rho + \epsilon < 1$ olacak kadar küçük bir $\epsilon > 0$ seçin. $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \rho$, olduğundan, $\sqrt[n]{a_n}$ terimleri eninde sonunda ρ 'ya ϵ 'dan daha yakın olurlar. Diğer bir deyişle,

$$n \geq M \text{ iken} \quad \sqrt[n]{a_n} < \rho + \epsilon$$

olacak şekilde bir $M \geq N$ indisi bulunur.

$$n \geq M \text{ için } a_n < (\rho + \epsilon)^n$$

olduğu da doğrudur. Şimdi, $\sum_{n=M}^{\infty} (\rho + \epsilon)^n$ oranı $(\rho + \epsilon) < 1$ olan bir geometrik seri, yakınsar. Karşılaştırmayla, $\sum_{n=M}^{\infty} a_n$ de yakınsar ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_{M-1} + \sum_{n=M}^{\infty} a_n$$

yakınsar.

- (b) $1 < \rho \leq \infty$. Bir M indisinden büyük olan bütün terimler için, $\sqrt[n]{a_n} > 1$ buluruz, dolayısıyla $n > M$ için $a_n > 1$ olur. Serinin terimleri sıfıra yakınsamaz. n . Terim Testine göre seri ıraksar.
- (c) $\rho = 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ serileri, $\rho = 1$ iken, testin sonuçsuz olduğunu gösterir. İlk seri ıraksar ve ikinci seri yakınsar, fakat iki durumda da $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$ 'dir. ■

ÖRNEK 3 Kök Testini Uygulamak

Aşağıdaki serilerin hangisi yakınsar, hangisi ıraksar?

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n} \right)^n$$

Çözüm

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \text{ yakınsar, çünkü } \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1.$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \text{ ıraksar çünkü } \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} \rightarrow \frac{2}{1} > 1.$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n} \right)^n \text{ yakınsar, çünkü } \sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+n} \right)^n} = \frac{1}{1+n} \rightarrow 0 < 1. \quad \blacksquare$$

ÖRNEK 2 Devamı

$$a_n = \begin{cases} n/2^n, & n \text{ tek} \\ 1/2^n, & n \text{ çift} \end{cases} \quad \text{olsun. } \sum a_n \text{ yakınsar mı?}$$

Çözüm Kök Testini uygulayarak

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{n/2}, & n \text{ tek} \\ 1/2, & n \text{ çift} \end{cases}$$

buluruz. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

olur. $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ olduğundan (Bölüm 11.1, Teorem 5), Sandviç Teoreminden $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/2$ buluruz. Limit 1'den küçüktür, dolayısıyla Kök Testine göre, seri yakınsar. ■

ALİŞTIRMALAR 11.5

Yakınsaklık veya İraksaklığı Belirlemek

1–26 alıştırmalarındaki serilerin hangileri yakınsar, hangileri ıraksar? Yanıtlarınızı açıklayın. (Yanıtlarınızı kontrol ederken, bir serinin yakınsaklık veya ıraksaklığını belirlemek için birden fazla yol olabileceğini hatırlayın.)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n} \right)^n$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{1.25^n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{n} \right)^n$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{3n} \right)^n$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^n}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)^n$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{2^n}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}(n^3)$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n(n+1)!}{3^n n!}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$
23. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$
24. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^{(n/2)}}$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \ln n}{n(n+2)!}$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n}$

27–38 alıştırmalarındaki formüllerle verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serilerinin hangileri yakınsar, hangileri ıraksar? Yanıtlarınızı açıklayın.

27. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1 + \sin n}{n} a_n$
28. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1 + \tan^{-1} n}{n} a_n$
29. $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{3n-1}{2n+5} a_n$
30. $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$
31. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2}{n} a_n$

32. $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$
33. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1 + \ln n}{n} a_n$
34. $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{n + \ln n}{n + 10} a_n$
35. $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n}$
36. $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = (a_n)^{n+1}$
37. $a_n = \frac{2^n n! n!}{(2n)!}$
38. $a_n = \frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$

39–44 alıştırmalarındaki serilerin hangileri yakınsar, hangileri ıraksar? Yanıtlarınızı açıklayın.

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$
40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}}$
41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{(n^2)}}$
42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2^n)^2}$
43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{4^n 2^n n!}$
44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{[2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)](3^n + 1)}$

Teori ve Örnekler

45. p -serilerinde ne Oran ne de Kök Testleri yararlı olur. Bu testleri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

serisinde deneyin ve iki testin de yakınsaklık hakkında bilgi vermediğini gösterin.

46. Ne Oran Testinin ne de Kök Testinin aşağıdaki serinin yakınsaklığı hakkında bilgi vermediğini gösterin.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} \quad (p \text{ sabit})$$

47. $a_n = \begin{cases} n/2^n, & n \text{ asal bir sayı ise} \\ 1/2^n, & \text{diğer} \end{cases}$ olsun.

$\sum a_n$ yakınsar mı? Yanıtınızı açıklayın.

11.6

Alterne Seriler, Mutlak ve Koşullu Yakınsaklık

Terimleri sırayla pozitif ve negatif olan serilere **alterne seriler** denir.

Aşağıda bunlara üç örnek vardır:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \quad (1)$$

$$-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^n 4}{2^n} + \cdots \quad (2)$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots + (-1)^{n+1} n + \cdots \quad (3)$$

Alterne harmonik seri denilen (1) serisi, birazdan göreceğimiz gibi, yakınsaktır. $r = -1/2$ oranıyla bir geometrik seri olan (2) serisi $-2/[1 + (1/2)] = -4/3$ 'e yakınsar. (3) serisi ıraksaktır çünkü; n . terim sıfıra yaklaşmaz.

Alterne harmonik serilerin yakınsaklığını Alterne Seri Testini uygulayarak göstereceğiz.

TEOREM 14 Alterne Seriler Testi (Leibniz Teoremi)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

serisi aşağıdaki üç koşulu da sağlarsa yakınsar:

1. u_n 'lerin hepsi pozitifdir.
2. Her $n \geq N$ için $u_n \geq u_{n+1}$ 'dir. (N bir tamsayı).
3. $u_n \rightarrow 0$.

İspat n bir çift tamsayı ise, mesela $n = 2m$, ilk n terimin toplamı

$$\begin{aligned} s_{2m} &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m}) \\ &= u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}. \end{aligned}$$

olur. İlk eşitlik s_{2m} 'nin negatif olmayan terimlerin toplamı olduğunu gösterir, çünkü parantez içindeki her terim pozitif veya sıfırdır. Dolayısıyla, $s_{2m+2} \geq s_{2m}$ 'dir ve $\{s_{2m}\}$ dizisi azalmayandır. İkinci eşitlik $s_{2m} \leq u_1$ olduğunu gösterir. $\{s_{2m}\}$ azalmayan ve üstten sınırlı olduğundan, bir limiti vardır, mesela

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} = L \quad (4)$$

n bir tek tamsayı ise, örneğin $n = 2m + 1$, ilk n terimin toplamı $s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}$ olur. $u_n \rightarrow 0$ olduğundan,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = 0$$

olur ve $m \rightarrow \infty$ iken,

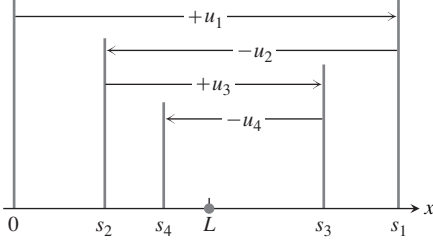
$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1} \rightarrow L + 0 = L \quad (5)$$

bulunur. (4) ve (5)'in sonuçlarını birleştirmek $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L$ verir (Bölüm 11.1, Alistırma 119). ■

ÖRNEK 1 Alterne harmonik seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$N = 1$ ile Teorem 14'ün üç koşulunu sağlar; dolayısıyla yakınsar. ■



ŞEKİL 11.9 $N = 1$ için Teorem 14'ün hipotezlerini sağlayan bir alterne serinin kısmi toplamları baştan itibaren limite iki taraftan yaklaşır.

Kısmi toplamların geometrik bir yorumu (Şekil 11.9), $N = 1$ ile Teorem 14'ün üç koşulu sağlandığında bir alterne serinin L limitine nasıl yakınsadığını göstermektedir. (Aıştırma 63 sizden $N > 1$ durumunu resmetmenizi isteyecektir.) x -ekseninin orijininden başlayarak, $s_1 = u_1$ pozitif mesafesini belirtiriz. $s_2 = u_1 - u_2$ 'e karşılık gelen noktayı bulmak için, u_2 'ye eşit bir mesafe geri gideriz. $u_2 \leq u_1$ olduğundan, orijinden daha geriye gidemeyiz. Serideki işaretlere göre ileri veya geri giderek bu testere şekline devam ederiz. Fakat $n \geq N$ için, her ileri veya geriye adım bir önceki adımdan daha kısadır (veya en fazla aynı boydadır), çünkü $u_{n+1} \leq u_n$ 'dir. Ve n . terim n arttıkça sifıra yaklaştığı için, ileri veya geri doğru attığımız adımlar giderek küçülür. L limitinin çevresinde salınırsınız ve salınının genliği sifıra yaklaşır. L limiti herhangi iki ardışık s_n ile s_{n+1} toplamı arasında bulunur ve dolayısıyla s_n 'den farkı u_{n+1} 'den daha küçük olur.

$$n \geq N \text{ için } |L - s_n| < u_{n+1}$$

olduğundan, yakınsak alterne serilerin toplamaları hakkında yararlı tahminler yapabiliriz.

TEOREM 15 Alterne Seriler Tahmin Teoremi

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ alterne serisi Teorem 14'ün üç koşulunu sağlıyorsa, $n \geq N$ için

$$s_n = u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{n+1} u_n$$

kısmi toplamı L 'ye, mutlak değeri u_{n+1} 'den, ilk kullanılmayan terimin değerinden daha küçük bir hatayla yaklaşımda bulunur. Dahası, $L - s_n$ kalanının işareti, kullanılmayan ilk teriminkiyle aynıdır.

Kalanın işaretinin doğrulanmasını Aıştırma 53'e bırakıyoruz.

ÖRNEK 2 Teorem 15'i toplamını bildiğimiz bir seride deneyelim:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \dots$$

Teoreme göre, seriyi sekizinci terimde kesersek, pozitif ve $1/256$ 'dan küçük olan bir miktarı atmış oluruz. İlk sekiz terimin toplamı 0.6640625 'tir. Serinin toplamı

$$\frac{1}{1 - (-1/2)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$

olarak bulunur. Fark, $(2/3) - 0.6640625 = 0.0026041666\dots$ pozitif ve $(1/256) = 0.00390625$ 'ten daha küçüktür. ■

Mutlak ve Koşullu Yakınsaklık

TANIM Mutlak Yakınsaklık

$\sum |a_n|$ mutlak değerler serisi yakınsak ise $\sum a_n$ serisi **mutlak olarak yakınsar** (veya **mutlak yakınsaktır**).

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$$

geometrik serisi mutlak olarak yakınsar, çünkü kendisine karşılık gelen

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

mutlak değerler serisi yakınsaktır. Alterne harmonik seri mutlak yakınsak değildir. Kendisine karşı gelen mutlak değerler serisi (ıraksak) harmonik seridir.

TANIM Koşullu Yakınsaklık

Yakınsak olan, fakat mutlak yakınsak olmayan bir seri **koşullu yakınsaktır**.

Alterne harmonik seri koşullu yakınsaktır.

Mutlak yakınsaklık iki nedenden dolayı önemlidir. İlk olarak, pozitif terimli serilerin yakınsaklığı için iyi testlerimiz vardır. İkincisi, bir seri mutlak olarak yakınsak ise, yakınsaktır. Bu aşağıdaki teoremin temelidir.

TEOREM 16 Mutlak Yakınsaklık Testi

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yakınsak ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de yakınsaktır.

İspat Her n için,

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \text{ 'dir. Dolayısıyla } 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yakınsak ise, $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ de yakınsaktır ve Doğrudan Karşılaştırma Testine göre, negatif olmayan $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ serisi de yakınsak olur. Artık $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$ eşitliği $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisini iki yakınsak serinin farkı olarak ifade etmemize izin verir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Dolayısıyla, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaktır. ■

DİKKAT Teorem 16'yı her *mutlak yakınsak serinin* yakınsadığını söyleyecek şekilde yeniden ifade edebiliriz. Ancak, bu ifadenin tersi doğru değildir: Çoğu yakınsak seri mutlak olarak yakınsamaz (Örnek 1'deki alterne harmonik seride olduğu gibi).

ÖRNEK 3 Mutlak Yakınsaklık Testini Uygulamak

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$ 'e karşılık gelen mutlak değerler serisi şöyledir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

Asıl seri yakınsaktır, çünkü mutlak değerler serisi yakınsaktır.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} = \frac{\sin 1}{1} + \frac{\sin 2}{4} + \frac{\sin 3}{9} + \dots$ serisine karşılık gelen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| = \frac{|\sin 1|}{1} + \frac{|\sin 2|}{4} + \dots,$$

mutlak değerler serisi, $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ ile karşılaştırıldığında, yakınsar, çünkü her n için $|\sin n| \leq 1$ 'dir. Asıl seri mutlak yakınsaktır; dolayısıyla yakınsaktır. ■

ÖRNEK 4 Alterne p -serileri

Pozitif bir p -sabitini için $\{1/n^p\}$ dizisi, limiti sıfır olan azalan bir dizidir. Dolayısıyla

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots, \quad p > 0$$

alterne p -serisi yakınsaktır.

$p > 1$ ise, seri mutlak yakınsaktır. $0 < p \leq 1$ ise, seri koşullu yakınsak olur.

Koşullu yakınsaklık: $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$

Mutlak yakınsaklık: $1 - \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} - \frac{1}{4^{3/2}} + \dots$ ■

Serileri Yeniden Düzenlemek

TEOREM 17 Mutlak Yakınsak Seriler İçin Yeniden Düzenleme Teoremi

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mutlak yakınsak ise ve $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots \{a_n\}$ dizisinin herhangi bir düzenlenişi ise, $\sum b_n$ de mutlak yakınsaktır ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

dir.

(İspatın bir taslağı için Alıştırma 60'a bakın.)

ÖRNEK 5 Yeniden Düzenleme Teoremini Uygulamak

Örnek 3'te gördüğümüz gibi

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} + \dots$$

serisi mutlak yakınsaktır. Serinin terimlerinin olası bir yeniden düzenlenişi pozitif bir terimle başlayabilir, sonra ilk negatif terim gelebilir, daha sonra üç pozitif terim, sonra dört negatif terim, vs: Aynı işaretli k terimden sonra, zıt işaretli $k + 1$ terim alın. Böyle bir serinin ilk on terimi şöyledir:

$$1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} - \frac{1}{36} - \frac{1}{64} - \frac{1}{100} - \frac{1}{144} + \dots$$

Yeniden Düzenleme Teoremi iki serinin de aynı değere yakınsadığını söyler. Bu örnekte, başlangıçta elimizde ikinci seri olsaydı, ve yapabileceğimizi bilseydik, muhtemelen onu birinciyle değiştirmekten mutluluk duyardık. Daha iyisini de yapabiliriz: İki serinin her birinin toplamı aynı zamanda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

farkına eşittir. (Alistırma 61'e bakın.)

Koşullu yakınsak bir serinin sonsuz sayıda terimini yeniden düzenlersek, orijinal serininkinden çok farklı sonuçlar elde edebiliriz. Bir örnek aşağıdadır.

ÖRNEK 6 Alterne Harmonik Seriyi Yeniden Düzenlemek

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \dots$$

Alterne harmonik serisi ıraksayacak veya daha önceden belirlenmiş bir toplam verecek şekilde yeniden düzenlenebilir.

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ 'yi ıraksayacak şekilde yeniden düzenlemek. $\sum[1/(2n-1)]$ serisi $+\infty$ 'a, $\sum(-1/2n)$ serisi ise $-\infty$ 'a ıraksar. Tek sayılı terimler dizisinin neresinden başlarsak başlayalım, her zaman keyfi derecede büyük bir toplam elde edecek kadar çok pozitif terim toplayabiliriz. Benzer şekilde, negatif terimlerle de, nereden başlarsak başlayalım, her zaman mutlak değeri keyfi derecede büyük bir negatif toplam elde edecek kadar birbirini izleyen çift sayılı terim toplayabiliriz. Eğer istersek, örneğin $+3$ 'ten daha büyük bir toplam elde edene kadar tek sayılı terimler toplayabilir ve yeni toplamı -4 'ten küçük yapacak şekilde yeterli sayıda birbirini izleyen negatif terimlerle devam edebiliriz. Sonra yeni toplamı $+5$ 'ten daha büyük yapacak sayıda pozitif terim toplar ve birbirini izleyen kullanılmamış negatif terimler ekleyerek toplamı -6 'dan küçük yapabiliriz, vs. Bu şekilde, uzamaları iki tarafta da keyfi derecede büyük yapabiliriz.
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ 'yi 1'e yakınsayacak şekilde yeniden düzenlemek. Başka bir olasılık da belirli bir limitte odaklanmaktır. 1'e yakınsayan toplamlar elde etmeye çalıştığımızı varsayın. Birinci terim, $1/1$ 'le başlar ve bundan $1/2$ çıkarırız. Sonra $1/3$ ve $1/5$ ekleriz, ki bunların toplamı 1 veya 1'den büyük yapar. Sonra toplam 1'den az olana kadar birbirini izleyen negatif terimler ekleriz. Bu şekilde işleme devam ederiz: Toplam 1'den küçük ise, toplam 1 veya daha büyük olana kadar pozitif terimler ekleyin; sonra

toplam yeniden 1'den küçük olana kadar terim çıkarın (negatif terimler ekleyin). Bu işlem sonsuz olarak sürdürülebilir. $n \rightarrow \infty$ iken, asıl serinin hem tek sayılı hem de çift sayılı terimleri sıfıra yaklaştığı için, kısmi toplamlarımızın 1'i aştığı veya 1'in altına düştüğü miktar sıfıra yakınsar. Yeniden düzenlenmiş seri şu şekilde başlar:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{10} \\ & + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{12} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} - \frac{1}{14} + \frac{1}{27} - \frac{1}{16} + \dots \end{aligned}$$

Örnek 6'da gösterilen davranış şekli herhangi bir koşullu yakınsak seride olabileceklerin bir örneğidir. Bu nedenle, koşullu yakınsak bir serinin terimlerini daima verilen sıradaki toplamalıyız.

Şu ana kadar serilerin yakınsaklığı ve ıraksaklığı için birkaç test geliştirdik. Özet olarak:

1. **n . Terim Testi:** $a_n \rightarrow 0$ olmadıkça seri ıraksar.
2. **Geometrik seri:** $\sum ar^n$ serisi, $|r| < 1$ için yakınsak; aksi halde ıraksaktır.
3. **p -serisi:** $\sum 1/n^p$ serisi $p > 1$ için yakınsak; aksi halde ıraksaktır.
4. **Terimleri negatif olmayan seriler:** İntegral Testini, Oran Testini veya Kök Testini deneyin. Karşılaştırma Testine göre, bilinen bir seri ile karşılaştırmayı deneyin.
5. **Bazı terimleri negatif olan seriler:** $\sum |a_n|$ yakınsak mıdır? Evet ise mutlak yakınsaklık yakınsaklığı gerektirdiğinden $\sum a_n$ de yakınsaktır.
6. **Alterne seriler:** Alterne Seriler Testinin koşullarını sağlarsa $\sum a_n$ yakınsaktır.

ALİŞTIRMALAR 11.6

Yakınsaklık veya ıraksaklığı Belirlemek

1–10 alıştırmalarındaki serilerin hangileri yakınsak, hangileri ıraksaktır? Yanıtlarınızı açıklayın.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{3/2}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{10}\right)^n$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{10^n}{n^{10}}$
5. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$
7. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{\ln n^2}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n} + 1}{n + 1}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} + 1}$

Mutlak Yakınsaklık

11–44 alıştırmalarındaki serilerden hangileri mutlak yakınsak, hangileri ıraksaktır? Yanıtlarınızı açıklayın.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (0.1)^n$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(0.1)^n}{n}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \sqrt{n}}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^3 + 1}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{2^n}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n + 3}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n^2}$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3 + n}{5 + n}$
20. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n^3)}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 + n}{n^2}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n + 5^n}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 (2/3)^n$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt[n]{10})$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\tan^{-1} n}{n^2 + 1}$
26. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \ln n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ 28. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n - \ln n}$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-100)^n}{n!}$ 30. $\sum_{n=1}^{\infty} (-5)^{-n}$
31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + 2n + 1}$ 32. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\ln n}{\ln n^2} \right)^n$
33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$ 34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$
35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)^n}{(2n)^n}$ 36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n!)^2}{(2n)!}$
37. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n! n}$ 38. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$
39. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 40. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2 + n} - n)$
41. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n})$
42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ 43. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sech} n$
44. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{csch} n$

Hata Tahmini

45–48 alıştırma sorularında, bütün serinin toplamına yaklaşımda bulunmak için serinin ilk dört terimini kullanmanın vereceği hatanın büyüklüğünü bulun.

45. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ **Toplamın $\ln 2$ olduğu gösterilebilir.**
46. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{10^n}$
47. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(0.01)^n}{n}$ **Bölüm 11.7’de göreceğiniz gibi, toplam $\ln(1.01)$ ’dir.**
48. $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad 0 < t < 1$

T 49 ve 50 Alıştırma sorularındaki toplamlara büyüklüğü 5×10^{-6} ’dan daha küçük bir hatayla yaklaşım yapın.

49. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}$ **Bölüm 11.9’da göreceğiniz gibi, toplam $\cos 1$, yani 1 radyanın kosinüsüdür.**
50. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$ **Bölüm 11.9’da göreceğiniz gibi toplam e^{-1} ’dir.**

Teori ve Örnekler

51. a.

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n} + \cdots$$

serisi Teorem 14’ün koşullarından birini sağlamaz. Hangisini?

b. (a) şikkındaki serinin toplamını bulun.

T 52. Teorem 14’ün koşullarını sağlayan bir alterne serinin limiti, L , ardışık iki kısmi toplam arasında bulunur. Bu, L ’yi tahmin etmek için,

$$\frac{s_n + s_{n+1}}{2} = s_n + \frac{1}{2} (-1)^{n+2} a_{n+1}$$

ortalamasını kullanmayı önerir. Alterne harmonik serilerin toplamına bir yaklaşım olarak

$$s_{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{21}$$

değerini hesaplayın. Kesin toplam $\ln 2 = 0.6931 \dots$ ’dir.

53. **Teorem 14’ün koşullarını sağlayan bir alterne serinin kalanının işareti** Teorem 15’te, Teorem 14’ün koşullarını sağlayan bir alterne seriye kısmi toplamlarının biriyle yaklaşım yapıldığında, kalanın (kullanılmamış terimlerin toplamı) işaretinin ilk kullanılmayan teriminkiyle aynı olduğunu söyleyen ifadeyi ispatlayın. (*İpucu:* Kalanın terimlerini birbirini izleyen çiftler halinde gruplayın.)

54.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

serisinin ilk $2n$ teriminin toplamının

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots$$

serisinin ilk n teriminin toplamıyla aynı olduğunu gösterin. Bu seriler yakınsar mı? İlk serinin ilk $2n+1$ teriminin toplamı nedir? Seriler yakınsıyorlarsa, toplamları nedir?

55. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksak ise, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ’nin de ıraksak olduğunu gösterin.
56. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mutlak yakınsak ise,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

olduğunu gösterin.

57. Hem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hem de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mutlak yakınsak ise, aşağıdaki lerin de mutlak yakınsak olduklarını gösterin.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n$ (k herhangi bir sayı)

58. Hem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hem de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yakınsak olsalar bile, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ’nin ıraksak olabileceğini örnekle gösterin.

T 59. Örnek 6’da, terimleri yeniden düzenleyerek $-1/2$ ’ye yakınsayan yeni bir seri elde etmek istediğimizi varsayın. Yeni düzenlemeye ilk negatif terim, $-1/2$, ile başlayın. Elinizde ne zaman $-1/2$ ’ye eşit veya bundan daha küçük bir toplam varsa, yeni toplam $-1/2$ ’den büyük oluncaya kadar birbirini izleyen pozitif terimler

eklemeye başlayın. Sonra yeni toplam $-1/2$ 'den küçük veya ona eşit oluncaya kadar negatif terimler ekleyin. İşleme kısmı toplamlarınız hedefin en az üç kez üzerine çıkana kadar devam edin ve işlemi hedefte veya hedefin altında bitirin. s_n yeni serinizin ilk n teriminin toplamıysa, (n, s_n) noktalarını işaretleyerek toplamların nasıl davrandıklarını gösterin.

60. Yeniden Düzenleme Teoreminin (Teorem 17) ispatının taslağı

- a. ϵ pozitif bir sayı, $L = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $s_k = \sum_{n=1}^k a_n$ olsun. Bir N_1 indisi ve bir başka $N_2 \geq N_1$ indisi için,

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |a_n| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{ve} \quad |s_{N_2} - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

olduğunu gösterin. Bütün $a_1, a_2, \dots, a_{N_2}$ terimleri $\{b_n\}$, dizisinin bir yerlerinde ortaya çıktıkları için, $n \geq N_3$ ise $(\sum_{k=1}^n b_k) - s_{N_2}$ 'nin en fazla $m \geq N_1$ koşuluna uygun a_m terimlerinin toplamı olacak şekilde bir $N_3 \geq N_2$ indisi vardır. Dolayısıyla, $n \geq N_3$ ise,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n b_k - L \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^n b_k - s_{N_2} \right| + |s_{N_2} - L| \\ &\leq \sum_{k=N_1}^{\infty} |a_k| + |s_{N_2} - L| < \epsilon. \end{aligned}$$

olur.

- b. (a) şıkında söylenenler, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mutlak yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 'nin de yakınsak ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ olduğunu söyler. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yakınsak olduğundan, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 'nin $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 'ye yakınsayacağını gösterin.

61. Mutlak yakınsak serileri ayırmak

- a. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yakınsak ise ve

$$b_n = \begin{cases} a_n, & a_n \geq 0 \text{ ise} \\ 0, & a_n < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 'nin yakınsak olduğunu gösterin.

- b. (a) şıkındaki sonucu kullanarak, benzer şekilde, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yakınsak ise ve

$$c_n = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0 \text{ ise} \\ a_n, & a_n < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 'nin yakınsak olduğunu gösterin.

Başka bir deyişle, bir seri mutlak yakınsak ise pozitif terimleri, ve benzer şekilde negatif terimleri, yakınsak bir seri oluşturur. Dahası,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

olur, çünkü $b_n = (a_n + |a_n|)/2$ ve $c_n = (a_n - |a_n|)/2$ 'dir.

62. Burada yanlış olan nedir?

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots$$

alterne harmonik serisinin iki tarafını da 2 ile çarparak

$$2S = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \frac{2}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

elde edin. Okların gösterdiği gibi, paydaları aynı olan terimleri bir araya toplayarak

$$2S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

serisini elde edin.

Bu denklemin sağ tarafındaki seri başladığımız seridir. Yani, $2S = S$ olur ve 2 ile bölersek, $2 = 1$ buluruz. (Kaynak: "Riemann's Rearrangement Theorem," Stewart Galanor, *Mathematics Teacher*, Vol.80, No.8, 1987, s. 675-681.)

63. $N > 1$ iken, Teorem 14'teki serinin yakınsaklığını göstermek için Şekil 11.9'dakine benzer bir şekil çizin.

11.7

Kuvvet Serileri

Sonsuz serilerin yakınsaklığını test edebildiğimize göre, bu bölümün başında söz edilen sonsuz polinomları inceleyebiliriz. Bu polinomlara kuvvet serileri deriz, çünkü bir değişkenin, bizim durumumuzda x , kuvvetlerinin sonsuz serileri olarak tanımlanabilirler. Polinomlar gibi, kuvvet serileri de toplanıp, çıkarılıp, çarpılıp, türevleri alınıp, integre edilip yeni kuvvet serileri elde edilebilir.

Kuşvet Serileri ve Yakınsaklık

Formel tanımla işe başlıyoruz.

TANIMLAR

Kuşvet Serileri, Merkez, Katsayılar

$x = 0$ civarında bir kuşvet serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \quad (1)$$

şeklinde bir seridir.

$x = a$ civarında bir kuşvet serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + \cdots + c_n (x - a)^n + \cdots \quad (2)$$

şeklinde bir seridir. Burada **merkez** a ve **katsayılar** $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitlerdir.

(1) denklemini (2) denkleminde $a = 0$ alınarak elde edilen özel bir durumdur.

ÖRNEK 1 Bir Geometrik Seri

(1) denklemindeki bütün katsayıları 1 almak

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

geometrik kuşvet serisini verir. Bu, ilk terimi 1 ve oranı x olan geometrik seridir. $|x| < 1$ için $1/(1 - x)$ 'e yakınsar. Bunu

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad -1 < x < 1. \quad (3)$$

yazarak ifade ederiz.

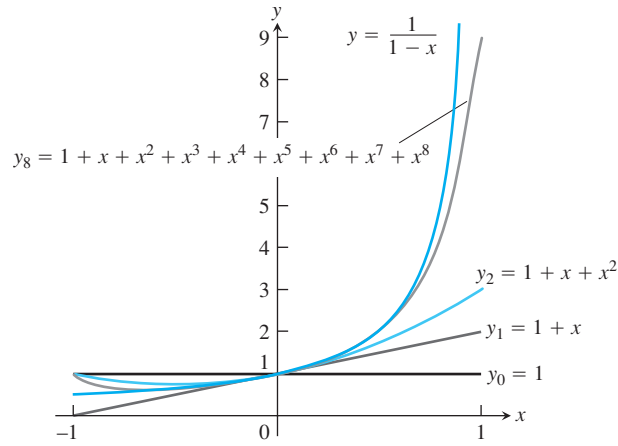
Şimdiye kadar (3) denklemini sağ taraftaki serinin toplamının bir formülü olarak yazdık. Şimdi odağımızı değıştiriyoruz: Sağ taraftaki serinin kısmi toplamlarını soldaki fonksiyona yaklaşımda bulunan $P_n(x)$ polinomları olarak düşünüyörüz. Sıfır civarındaki x değerlerinde, iyi yaklaşım için serinin sadece birkaç terimini almamız yeterlidir. $x = 1$ veya -1 'e doğru ilerlerken, daha fazla terim almamız gerekir. Şekil 11.10 $f(x) = 1/(1 - x)$ fonksiyonunun ve $n = 0, 1, 2$ ve 8 için $y_n = P_n(x)$ yaklaşım polinomlarının grafiklerini göstermektedir. $f(x) = 1/(1 - x)$ fonksiyonu, dikey asimptotunun bulunduğu $x = 1$ 'i içeren aralıklarda sürekli değildir. Bu nedenle yaklaşımlar $x \geq 1$ için uygulanamaz.

ÖRNEK 2 Bir Geometrik Seri

$$1 - \frac{1}{2}(x - 2) + \frac{1}{4}(x - 2)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x - 2)^n + \cdots \quad (4)$$

kuşvet serisi, $a = 2, c_0 = 1, c_1 = -1/2, c_2 = 1/4, \dots, c_n = (-1/2)^n$ ile (2) denklemine uyar.

Bu, ilk terimi 1 ve oranı $r = -\frac{x - 2}{2}$ olan bir geometrik seridir. Bu seri



ŞEKİL 11.10 $f(x) = 1/(1-x)$ ve polinom yaklaşımlarından dördünün grafikleri (Örnek 1).

$$\left| \frac{x-2}{2} \right| < 1 \text{ veya } 0 < x < 4 \text{ için yakınsar. Toplamı}$$

$$\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1 + \frac{x-2}{2}} = \frac{2}{x}$$

olarak bulunur, dolayısıyla

$$\frac{2}{x} = 1 - \frac{(x-2)}{2} + \frac{(x-2)^2}{4} - \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots, \quad 0 < x < 4$$

olur. (4) serisi 2 civarındaki x değerleri için $f(x) = 2/x$ 'e kullanışlı polinom yaklaşımları üretir:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2) = 2 - \frac{x}{2}$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 = 3 - \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{4}$$

gibi (Şekil 11.11).

ÖRNEK 3 Oran Testini Kullanarak Yakınsaklığı Test Etmek

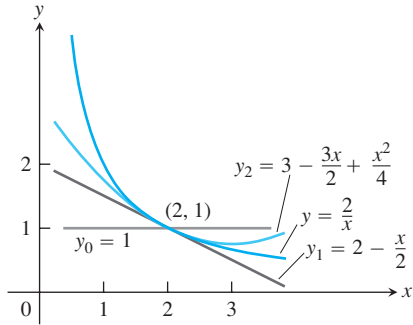
Aşağıdaki kuvvet serileri hangi x değerleri için yakınsar?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots$

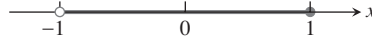


ŞEKİL 11.11 $f(x) = 2/x$ ve ilk üç polinom yaklaşımının grafikleri (Örnek 2).

Çözüm u_n , söz konusu serinin n . terimi olmak üzere $\sum |u_n|$ serisine Oran Testini uygulayın.

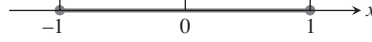
$$(a) \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n}{n+1} |x| \rightarrow |x|.$$

Seri, $|x| < 1$ için mutlak yakınsaktır. $|x| > 1$ ise ıraksaktır, çünkü n . terim sıfıra yakınsamaz. $x = 1$ 'de, yakınsak olan alterne harmonik seriyi, $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots$, elde ederiz. $x = -1$ 'de, harmonik serinin negatifini, $-1 - 1/2 - 1/3 - 1/4 - \dots$, buluruz, ki bu seri ıraksar. (a) serisi $-1 < x \leq 1$ için yakınsaktır, başka yerlerde ise ıraksak olur.



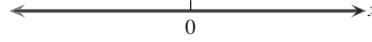
$$(b) \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{2n-1}{2n+1} x^2 \rightarrow x^2.$$

Seri, $x^2 < 1$ için mutlak yakınsaktır. $x^2 > 1$ için ıraksaktır çünkü n . terim sıfıra yakınsamaz. $x = 1$ 'de, Alterne Seri Teoremine göre yakınsak olan $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$ serisini elde ederiz. Seri $x = -1$ 'de de yakınsar, çünkü yakınsaklık koşullarını sağlayan bir alterne seri verir. $x = -1$ 'deki değer, $x = 1$ 'deki değerın negatfidir. (b) serisi $-1 \leq x \leq 1$ için yakınsak, başka yerlerde ıraksaktır.



$$(c) \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 \text{ her } x \text{ için.}$$

Seri, her x için mutlak yakınsaktır.



$$(d) \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = (n+1)|x| \rightarrow \infty \quad x \neq 0 \text{ değilse.}$$

Seri, $x = 0$ hariç her x değeri için ıraksaktır.



Örnek 3 genelde kuvvet serilerinin yakınsaklığını nasıl test ettiğimizi ve olası sonuçları göstermektedir.

TEOREM 18

Kuvvet Serileri İçin Yakınsaklık Teoremi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$x = c \neq 0$ için yakınsak ise, her $|x| < |c|$ için mutlak yakınsaktır. Seri, $x = d$ için ıraksak ise her $|x| > |d|$ için ıraksaktır.

İspat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ serisinin yakınsadığını varsayın. Bu durumda, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c^n = 0$ olur. Dolayısıyla, her $n \geq N$ için, $|a_n c^n| < 1$ olmasını sağlayacak bir N tamsayısı vardır. Yani,

$$n \geq N \text{ için } |a_n| < \frac{1}{|c|^n} \quad (5)$$

olur. Şimdi $|x| < |c|$ olacak şekilde bir x alın ve

$$|a_0| + |a_1 x| + \cdots + |a_{N-1} x^{N-1}| + |a_N x^N| + |a_{N+1} x^{N+1}| + \cdots$$

toplamını düşünün. $|a_N x^N|$ 'den önce sonlu sayıda terim vardır ve toplamı da sonludur. $|a_N x^N|$ ve bundan sonraki terimlerin toplamı, (5)'ten dolayı,

$$\left| \frac{x}{c} \right|^N + \left| \frac{x}{c} \right|^{N+1} + \left| \frac{x}{c} \right|^{N+2} + \cdots \quad (6)$$

toplamından küçüktür. Fakat (6) serisi, $|x| < |c|$ olduğundan, $r = |x/c|$ oranı 1'den küçük olan bir geometrik seridir. Bu yüzden, (6) serisi yakınsaktır ve dolayısıyla asıl seri mutlak yakınsaktır. Bu teoremin ilk yarısını ispatlar.

Teoremin ikinci yarısının ispatı birinci yarının ispatından çıkar. Seri, $x = d$ 'de ıraksak ise ve $|x_0| > |d|$ olacak şekilde bir x_0 değerinde yakınsak ise teoremin ilk kısmında $c = x_0$ alabilir ve serinin $x = d$ 'de mutlak yakınsak olduğu sonucunu çıkarabiliriz. Fakat seri aynı anda hem mutlak yakınsak, hem de ıraksak olamaz. Dolayısıyla, d 'de ıraksak ise, her $|x| > |d|$ için ıraksaktır. ■

Notasyonu basitleştirmek için, Teorem 18'de $\sum a_n x^n$ formundaki serilerin yakınsaklıklarını göz önüne aldık. $\sum a_n (x - a)^n$ formundaki seriler için $x - a$ 'yı x' ile değiştirip sonuçları $\sum a_n (x')^n$ serisine uygulayabiliriz.

Bir Kuvvet Serisinin Yakınsaklık Yarıçapı

İspatladığımız teorem ve incelediğimiz örnekler, bir $\sum c_n (x - a)^n$ kuvvet serisinin aşağıdaki üç şekilden birine uygun davrandığı sonucunu verir. Seri sadece $x = a$ için yakınsak veya her yerde yakınsak olabilir ya da $x = a$ merkezli R yarıçaplı bir aralık üzerinde yakınsak olabilir. Bunu, Teorem 18'in bir sonucu olarak ispat ediyoruz.

TEOREM 18'İN SONUCU

$\sum c_n (x - a)^n$ serisinin yakınsaklığı aşağıdaki üç durumdan biri ile açıklanır.

1. Serinin $|x - a| > R$ koşulunu sağlayan x 'ler için ıraksak, fakat $|x - a| < R$ koşulunu sağlayan x 'ler için mutlak yakınsak olduğu pozitif bir R sayısı vardır. Seri, $x = a - R$ ve $x = a + R$ uç noktalarının her birinde yakınsak olabilir veya olmayabilir.
2. Seri her x için mutlak yakınsaktır ($R = \infty$).
3. Seri $x = a$ 'da yakınsak ve başka her yerde ıraksaktır ($R = 0$).

İspat Önce, $a = 0$ ve dolayısıyla kuvvet serisinin merkezinin 0 olduğunu kabul edelim. Seri her yerde yakınsak ise Durum 2 söz konusudur. Seri sadece $x = 0$ da yakınsak ise Durum 3 söz konusudur. Bunlar dışında, $\sum c_n d^n$ serisinin ıraksak olduğu, sıfırdan farklı bir d sayısı vardır. $\sum c_n x^n$ serisinin yakınsak olduğu x değerlerinin kümesi, S , boş küme değildir. Çünkü 0'ı ve bir p pozitif sayısını içerir. Teorem 18'e göre seri $|x| > |d|$, koşulunu sağlayan her x için ıraksaktır ve bu nedenle her $x \in S$ için $|x| \leq |d|$ 'dir ve dolayısıyla S sınırlı bir kümedir. Reel sayıların Tamlik Özelliğine göre (Ek 4'e bakın) boş olmayan sınırlı bir kümenin bir en küçük üst sınırı, R , vardır. (En küçük üst sınır, $x \in S$ elemanları için $x \leq R$ eşitsizliğinin sağlandığı en küçük sayıdır.) $|x| > R \geq p$, ise $x \notin S$ dir ve dolayısıyla $\sum c_n x^n$ serisi ıraksaktır. $|x| < R$ ise $|x| \in S$ kümesi için bir üst sınır değildir (çünkü en küçük üst sınırdan küçüktür) bu nedenle $b > |x|$ olacak şekilde bir $b \in S$ sayısı vardır. $b \in S$ olduğundan $\sum c_n b^n$ serisi yakınsaktır ve bundan dolayı Teorem 18'e göre, $\sum c_n |x|^n$ serisi yakınsaktır. Bununla, $a = 0$ merkezli kuvvet serileri için Sonuç ispatlanmış olur.

$a \neq 0$ merkezli bir kuvvet serisi için $x' = (x - a)$ yazarız ve yukarıdakileri x' ile tekrar ederiz. $x = a$ için $x' = 0$ olduğundan, $x' = 0$ merkezli $\sum c_n (x')^n$ serisinin R yarıçaplı bir yakınsaklık aralığı ile $x = a$ merkezli $\sum c_n (x - a)^n$ serisinin R yarıçaplı yakınsaklık aralığı aynıdır. Bu, genel durum için Sonucu ispatlar. ■

R 'ye kuvvet serisinin **yakınsaklık yarıçapı**, $x = a$ merkezli ve R yarıçaplı aralığa **yakınsaklık aralığı** denir. Yakınsaklık aralığı seriye bağlı olarak açık, kapalı veya yarı açık olabilir. $|x - a| < R$ koşulunu sağlayan x 'ler için seri mutlak yakınsaktır. Seri her x değeri için yakınsak ise yakınsaklık yarıçapı sonsuzdur deriz. Seri sadece $x = a$ 'da yakınsak ise yakınsaklık yarıçapı sıfırdır deriz.

Bir Kuvvet Serisinin Yakınsaklığını Test Etmek

1. Serinin mutlak yakınsak olduğu aralığı bulmak için Oran testini (veya n. Kök Testini) kullanın. Doğal olarak bu bir açık aralıktır,

$$|x - a| < R \quad \text{veya} \quad a - R < x < a + R.$$

2. Mutlak yakınsaklık aralığı sonlu ise her bir uç noktada yakınsaklığı veya ıraksaklığı test edin , (Örnek 3a ve b'deki gibi). Bir Karşılaştırma Testi, İntegral Testi veya Alterne Seri Testi kullanın.
3. Mutlak yakınsaklık aralığı $a - R < x < a + R$ ise $|x - a| > R$ için seri ıraksaktır (koşullu yakınsak bile değildir), çünkü x 'in bu değerleri için n.terim sifra yakınsamaz.

Terim-Terime Türetme

İleri analizin bir teoremi bir kuvvet serisinin yakınsaklık aralığının her iç noktasında terim-terime türetilebileceğini söyler.

TEOREM 19 Terim-Terime Türetme Teoremi

$\sum c_n(x - a)^n$ serisi bir $R > 0$ için, $a - R < x < a + R$ aralığında yakınsak ise bir f fonksiyonu tanımlar:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n, \quad a - R < x < a + R.$$

Böyle bir f fonksiyonunun yakınsaklık aralığı içinde her mertebeden türevi vardır. Türevleri, esas seriyi terim-terime türeterek elde edebiliriz:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(x - a)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n(x - a)^{n-2}$$

vs. Türev olarak elde edilmiş her seri, esas serinin yakınsaklık aralığının her iç noktasında yakınsaktır.

ÖRNEK 4 Terim-Terime Türetmeyi Uygulamak

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

ise $f'(x)$ ve $f''(x)$ serilerini bulun.

Çözüm

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad -1 < x < 1 \\ f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \cdots \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

DİKKAT Terim-terime türev alma başka tür seriler için işe yaramayabilir. Örneğin, trigonometrik

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n^2}$$

serisi her x için yakınsar. Fakat terim-terime türev alırsak, her x için ıraksak olan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cos(n!x)}{n^2},$$

serisini buluruz. Bu, x 'in pozitif kuvvetlerinin bir toplamı olmadığından, bir kuvvet serisi değildir.

Terim-Terime İntegrasyon

İleri analizin başka bir teoremi bir kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı içinde terim-terime integre edilebileceğini söyler.

TEOREM 20

Terim-Terime İntegrasyon Teoremi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$$

fonksiyonunun $a - R < x < a + R$ ($R > 0$) aralığında yakınsak olduğunu varsayın. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1}$$

de $a - R < x < a + R$ aralığında yakınsak olur ve $a - R < x < a + R$ için

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1} + C$$

olur.

ÖRNEK 5 $\tan^{-1} x$, $-1 \leq x \leq 1$ için bir seri

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \quad -1 \leq x \leq 1$$

fonksiyonunu tanımlayın.

Çözüm Orijinal seriyi terim-terime türeterek

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

buluruz. Bu, birinci terimi 1 ve oranı $-x^2$ olan bir geometrik seridir, o yüzden

$$f'(x) = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

olur. Artık $f'(x) = 1/(1 + x^2)$ 'yi integre ederek

$$\int f'(x) dx = \int \frac{dx}{1 + x^2} = \tan^{-1} x + C$$

bulabiliriz. $x = 0$ iken, $f(x)$ serisi sıfırdır, bu yüzden $C = 0$ olur. Böylece

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \tan^{-1} x, \quad -1 < x < 1 \quad (7)$$

elde ederiz. Bölüm 11.10'da, serinin $x = \pm 1$ 'de de $\tan^{-1} x$ 'e yakınsadığını göstereceğiz. ■

Şuna dikkat edin Örnek 5'teki orijinal seri yakınsaklık aralığının her iki uç noktasında da yakınsaktır, fakat Teorem 20 türevi alınmış serinin sadece aralığın iç noktalarındaki yakınsaklığını garanti eder.

ÖRNEK 6 $\ln(1+x)$, $-1 < x \leq 1$ için bir seri

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$

serisi $-1 < t < 1$ açık aralığında yakınsaktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots \Big|_0^x \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x < 1 \end{aligned} \quad \text{Teorem 20}$$

bulunur. Ayrıca serinin $x = 1$ 'de $\ln 2$ sayısına yakınsadığı da gösterilebilir, fakat teorem bunu garantilemez. ■

TEKNOLOJİ KULLANMAK Serilerin İncelenmesi

Seriler bir çok yönden integrallere benzer. Elemanter fonksiyonlar cinsinden açık ters türevleri var olan fonksiyonların sayısının, integre edilebilir fonksiyonların sayısına oranla küçük olması gibi, x -aralıklarında açık elemanter fonksiyonlarla uyuşan x 'in kuvvet serilerinin sayısı da bir x -aralığında yakınsak olan kuvvet serilerinin sayısının yanında küçüktür. Grafik çizme araçları böyle serilerin incelenmesinde, sayısal integrasyonun belirli integrallerin incelenmesinde yardımcı olduğu gibi, yardımcı olabilir. x 'in belirli değerlerinde kuvvet serilerini inceleme becerisi çoğu Bilgisayarlı Cebir Sistemi'nin içine yerleştirilmiştir.

Bir seri yeterince hızlı yakınsıyorsa, BCS araştırması bize toplam hakkında bir fikir verebilir. Örneğin, $\sum_{k=1}^{\infty} [1/(2^{k-1})]$ serisinin ilk kısmi toplamlarını hesaplarken (Bölüm 11.4, Örnek 2b), Maple, $31 \leq n \leq 200$ için $S_n = 1.606695152$ verir. Bu, serinin toplamının 10 ondalık basamak hassaslıkla 1.606695152 olduğunu belirtir. Gerçekten de,

$$\sum_{k=201}^{\infty} \frac{1}{2^k - 1} = \sum_{k=201}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}(2 - (1/2^{k-1}))} < \sum_{k=201}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{199}} < 1.25 \times 10^{-60}.$$

bulunur. 200 terimden sonraki kalan ihmal edilebilir.

Ancak, BCS ve hesap makinesi araştırmaları, seriler çok yavaş yakınsıyor veya ıraksıyor ise, bizim için fazla bir şey yapamazlar ve gerçekte fazlasıyla yanıltıcı olabilirler. Örneğin, $\sum_{k=1}^{\infty} [1/(10^{10}k)]$ serisinin kısmi toplamlarını hesaplamayı deneyin. Terimler bizim genellikle çalıştığımız sayılara nazaran çok küçüktür ve kısmi toplamlar, yüzlerce terimden oluşsalar bile, çok küçüktürler. Serinin yakınsadığını düşünmek hatasına bile düşebiliriz. Aslında, seriyi $(1/10^{10}) \sum_{k=1}^{\infty} (1/k)$ şeklinde yazarak görebileceğimiz gibi, seri ıraksaktır.

Bölüm 11.9'da hata tahminlerini öğrendikten sonra, sayısal sonuçları nasıl yorumlayacağımızı daha iyi anlayacağız.

Kuvvet Serilerinin Çarpımı

Yine ileri analizin başka bir teoremi mutlak yakınsak kuvvet serilerinin polinomları çarptığımız gibi çarpılabileceğini söyler.

TEOREM 21 Kuvvet Serileri İçin Seri Çarpım Teoremi

$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ serileri $|x| < R$ için mutlak yakınsak ise ve

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k},$$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ serisi $|x| < R$ için mutlak yakınsaktır ve $A(x)B(x)$ 'e yakınsar:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

ÖRNEK 7

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1 \text{ için}$$

geometrik serisini kendisiyle çarparak, $|x| < 1$ için, $1/(1-x)^2$ 'nin kuvvet serisini bulun.

Çözüm

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = 1/(1-x)$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = 1/(1-x)$$

ve

$$\begin{aligned} c_n &= \underbrace{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_k b_{n-k} + \cdots + a_n b_0}_{n+1 \text{ terim}} \\ &= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1 \text{ tane bir}} = n+1 \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda, Serilerin Çarpımı Teoremine göre,

$$\begin{aligned} A(x) \cdot B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots \end{aligned}$$

$1/(1-x)^2$ 'nin serisidir. Seri $|x| < 1$ için mutlak yakınsaktır.

Örnek 4'ün,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

olduğu için, aynı sonucu verdiğine dikkat edin. ■

ALİŞTIRMALAR 11.7

Yakınsaklık Aralıkları

1–32 alıştırmalarında (a) serilerin yakınsaklık yarıçaplarını ve aralıklarını bulun. Seriler hangi x değerlerinde (b) mutlak ve (c) koşullu yakınsaktırlar?

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x + 1)^n$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - 2)^n}{10^n}$
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n + 2}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n} 3^n}$
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$
13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$
15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2 + 3}}$
17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x + 3)^n}{5^n}$
19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n} x^n}{3^n}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x + 2)^n}{n2^n}$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} (x + 5)^n$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x - 2)^n}{n}$
6. $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x + 2)^n}{n}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 1)^n}{\sqrt{n}}$
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$
14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x + 3)^{2n+1}}{n!}$
16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n^2 + 3}}$
18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n (n^2 + 1)}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} (2x + 5)^n$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n) x^n$
24. $\sum_{n=0}^{\infty} n! (x - 4)^n$
26. $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n (n + 1) (x - 1)^n$
27. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}$
28. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x - 5)^{2n+1}}{n^{3/2}}$
31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x + \pi)^n}{\sqrt{n}}$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x + 1)^{n+1}}{2n + 2}$
32. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - \sqrt{2})^{2n+1}}{2^n}$

$\sum 1/(n(\ln n)^2)$ hakkında gerek duyduğunuz bütün bilgiyi Bölüm 11.3, Alıştırma 39'dan elde edebilirsiniz.

$\sum 1/(n \ln n)$ hakkında gerek duyduğunuz bütün bilgiyi Bölüm 11.3, Alıştırma 38'den elde edebilirsiniz.

33–38 alıştırmalarında serilerin yakınsaklık aralıklarını ve bu aralıkta, serinin toplamını x 'in bir fonksiyonu olarak bulun.

33. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - 1)^{2n}}{4n}$
34. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + 1)^{2n}}{9^n}$
35. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^n$
36. $\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$
37. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{3}\right)^n$
38. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{2}\right)^n$

Teori ve Örnekler

39. Hangi x değerlerinde

$$1 - \frac{1}{2}(x - 3) + \frac{1}{4}(x - 3)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x - 3)^n + \cdots$$

serisi yakınsaktır? Toplamı nedir? Verilen serinin terim-terime türevini alırsanız hangi seriyi bulursunuz? Yeni seri hangi x değerlerinde yakınsaktır? Toplamı nedir?

40. Alıştırma 39'daki seriyi terim-terime integre ederseniz hangi seriyi elde edersiniz? Yeni seri x 'in hangi değerleri için yakınsaktır ve toplamının bir başka adı nedir?

41.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

serisi her x için $\sin x$ 'e yakınsar.

- a. $\cos x$ için, bir serinin ilk altı terimini bulun. Bu seri x 'in hangi değerleri için yakınsak olmalıdır?
- b. $\sin x$ serisinde x yerine $2x$ alarak, her x için $\sin 2x$ 'e yakınsayan bir seri bulun.
- c. (a) şıkkındaki sonucu ve seri çarpımını kullanarak, $2 \sin x \cos x$ için, bir serinin ilk altı terimini bulun. Yanıtınızı (b) şıkkındaki yanıtla karşılaştırın.

42.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

serisi her x için e^x 'e yakınsar.

- a. $(d/dx)e^x$ için bir seri bulun. e^x serisini buluyor musunuz? Yanıtınızı açıklayın.
- b. $\int e^x dx$ için bir seri bulun. e^x serisini buluyor musunuz? Yanıtınızı açıklayın.
- c. e^x serisinde x yerine $-x$ alarak her x için e^{-x} 'e yakınsayan bir seri bulun. Sonra e^x ile e^{-x} serilerini çarparak $e^{-x} \cdot e^x$.

43.

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots$$

serisi $-\pi/2 < x < \pi/2$ için $\tan x$ 'e yakınsar.

- $\ln |\sec x|$ serisinin ilk beş terimini bulun. Bu seri x 'in hangi değerleri için yakınsak olmalıdır?
- $\sec^2 x$ serisinin ilk beş terimini bulun. Bu seri x 'in hangi değerleri için yakınsak olmalıdır?
- (b)'deki yanıtınızı $\sec x$ 'in Alıştırma 44'te verilen serisinin karesini alarak kontrol edin.

44.

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \dots$$

serisi $-\pi/2 < x < \pi/2$ için $\sec x$ 'e yakınsar.

- $\ln |\sec x + \tan x|$ fonksiyonunun kuvvet serisinin ilk beş terimini bulun. Bu seri x 'in hangi değerleri için yakınsak olmalıdır?
- $\sec x \tan x$ için, bir serinin ilk dört terimini bulun. Bu seri hangi x değerleri için yakınsak olmalıdır?

- (b) şıkkındaki sonucunuzu $\sec x$ serisini Alıştırma 43'te $\tan x$ için verilen seriyle çarparak kontrol edin.

45. Yakınsak kuvvet serilerinin tekliği

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ kuvvet serileri yakınsak iseler ve bir $(-c, c)$ açık aralığındaki her x değeri için eşit iseler, her n için $a_n = b_n$ olduğunu gösterin. (İpucu: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ olsun. Terim-terime türetin, a_n ve b_n 'nin ikisinin de $f^{(n)}(0)/(n!)$ 'e eşit olduğunu gösterin.)
- Bir $(-c, c)$ açık aralığındaki her x için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ ise, her n için $a_n = 0$ olduğunu gösterin.

- $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2/2^n)$ serisinin toplamı** Serinin toplamını bulmak için, $1/(1-x)$ 'i geometrik seri olarak ifade edin, ortaya çıkan denklemin iki tarafının da x 'e göre türevini alın, sonucun iki tarafını da x ile çarpın, yeniden türev alın ve tekrar x ile çarpın, x yerine $1/2$ yazın. Ne buluyorsunuz? (Kaynak: David E. Dobbs'un editöre mektubu, *Illinois Mathematics Teacher*, Vol. 33, Sayı 4, 1982, sayfa 27.)

- Uç noktalarda yakınsaklık** Bir kuvvet serisinin yakınsaklık aralığının uç noktalarındaki yakınsaklığının koşullu veya mutlak olabileceğini örneklerle gösterin.

- Yakınsaklık aralığı aşağıda gibi olan bir kuvvet serisi kurun.

- $(-3, 3)$
- $(-2, 0)$
- $(1, 5)$.

11.8

Taylor ve Maclaurin Serileri

Bu bölüm, sonsuz defa türetilen fonksiyonların, Taylor serisi denilen kuvvet serilerinin nasıl oluşturduklarını göstermektedir. Çoğu durumda, bu seriler üretici fonksiyonların kullanışlı polinom yaklaşımlarını sağlayabilir.

Seri Temsili

Teorem 19'dan, yakınsaklık aralığı içinde bir kuvvet serisinin toplamının her mertebeden türevi var olan sürekli bir fonksiyon olduğunu biliyoruz. Fakat ya tersi? Bir $f(x)$ fonksiyonunun bir I aralığında her mertebeden türevi varsa, I 'da bir kuvvet serisi olarak ifade edilebilir mi? Ve edilebilirse, katsayıları ne olacaktır?

$f(x)$ 'in, yakınsaklık yarıçapı pozitif olan bir

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \\ &= a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n + \dots \end{aligned}$$

kuvvet serisinin toplamı olduğunu varsayarsak, son soruya hemen cevap verebiliriz. I yakınsaklık aralığında art arda terim-terime türev alarak,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - a) + 3a_3(x - a)^2 + \dots + na_n(x - a)^{n-1} + \dots$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - a) + 3 \cdot 4a_4(x - a)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x - a) + 3 \cdot 4 \cdot 5a_5(x - a)^2 + \dots,$$

elde ederiz.

Burada, n . türev, her n için

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (x - a) \text{ çarpanını içeren terimlerin bir toplamı}$$

ile verilir.

Bu denklemlerin hepsi $x = a$ 'da sağlandığından,

$$\begin{aligned} f'(a) &= a_1, \\ f''(a) &= 1 \cdot 2a_2, \\ f'''(a) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 \end{aligned}$$

ve genel olarak

$$f^{(n)}(a) = n!a_n$$

elde ederiz. Bu formüller, f 'nin I aralığındaki değerlerine yakınsayan (" f 'yi I 'da temsil eden" deriz) herhangi bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ kuvvet serisinin katsayılarında harika bir kalıp ortaya çıkarır. Böyle bir seri varsa (bu hala açık bir sorudur), sadece bir tane vardır ve n . katsayısı

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

dir. f 'nin bir seri temsili varsa, bu

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 \\ &+ \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \cdots \end{aligned} \quad (1)$$

olmalıdır. Fakat, merkezi $x = a$ 'da bulunan bir I aralığında sonsuz defa türetilen keyfi bir f fonksiyonuyla işe başlarsak ve bunu (1) denklemindeki seriyi üretmekte kullanırsak, seri I 'nın içindeki her x için $f(x)$ 'e yakınsar mı? Yanıt belkidir—bazı fonksiyonlar için yakınsayacak, fakat göreceğimiz gibi, bazıları için yakınsamayacaktır.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Brook Taylor
(1685–1731)

Colin Maclaurin
(1698–1746)

Taylor ve Maclaurin Serileri

TANIMLAR

Taylor Serileri, Maclaurin Serileri

f , a 'yı bir iç nokta olarak içeren bir aralıkta her mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. **f tarafından $x = a$ 'da üretilen Taylor serisi**

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k &= f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 \\ &+ \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \cdots \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. **f tarafından üretilen Maclaurin serisi** ise

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

ile verilir, yani f 'nin $x = 0$ 'da ürettiği Taylor serisidir.

f tarafından üretilen Maclaurin serisine genelde sadece f 'nin Taylor serisi denir.

ÖRNEK 1 Bir Taylor Serisi Bulmak

$f(x) = 1/x$ fonksiyonunun $a = 2$ 'de ürettiği Taylor serisini bulun. Eğer yakınsak ise seri nerede $1/x$ 'e yakınsar?

Çözüm $f(2), f'(2), f''(2), \dots$ katsayılarını bulmamız gerekir. Türev alarak,

$$f(x) = x^{-1}, \quad f(2) = 2^{-1} = \frac{1}{2},$$

$$f'(x) = -x^{-2}, \quad f'(2) = -\frac{1}{2^2},$$

$$f''(x) = 2!x^{-3}, \quad \frac{f''(2)}{2!} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3},$$

$$f'''(x) = -3!x^{-4}, \quad \frac{f'''(2)}{3!} = -\frac{1}{2^4},$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}, \quad \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

elde ederiz. Taylor serisi

$$\begin{aligned} f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + \dots \\ = \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \dots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \dots \end{aligned}$$

şeklinde. Bu sabit terimi $1/2$ ve oranı $r = -(x-2)/2$ olan bir geometrik seridir. $|x-2| < 2$ için mutlak yakınsaktır ve toplamı

$$\frac{1/2}{1 + (x-2)/2} = \frac{1}{2 + (x-2)} = \frac{1}{x}$$

olarak bulunur. Bu örnekte, $f(x) = 1/x$ 'in $a = 2$ 'de ürettiği Taylor serisi, $|x-2| < 2$ veya $0 < x < 4$ için $1/x$ 'e yakınsar. ■

Taylor Polinomları

Türevlenebilir bir f fonksiyonunun a noktasındaki lineerizasyonu

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

ile verilen polinomdur. Bölüm 3.8'de, a 'ya yakın x değerlerinde $f(x)$ 'e yaklaşmak için bu lineerizasyonu kullandık. f 'nin a 'da daha yüksek mertebeden türevleri varsa, elde edilebilen her türev için, f 'nin daha yüksek mertebeden polinom yaklaşımları da bulunur. Bu polinomlara f 'nin Taylor polinomları denir.

TANIM***n*. Mertebe Taylor Polinomu**

f , a 'yı iç nokta olarak içeren bir aralıkta k . mertebeden, $k = 1, 2, \dots, N$, türevleri var olan bir fonksiyon olsun. 0'dan N 'ye kadar olan herhangi bir n tam sayısı için f 'nin $x = a$ 'da ürettiği ***n*. mertebe Taylor polinomu**

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

ile verilir.

Bir Taylor polinomundan bahsederken, n . dereceden yerine, n . mertebeden diyoruz, çünkü $f^{(n)}(a)$ sıfır olabilir. Örneğin, $f(x) = \cos x$ 'in $x = 0$ 'daki ilk iki Taylor polinomu $P_0(x) = 1$ ve $P_1(x) = 1$ 'dir. Birinci mertebe polinomun derecesi 1 değil, sıfırdır.

f 'nin $x = a$ 'daki lineerizasyonunun, a 'nın bir komşuluğunda f 'nin en iyi lineerizasyonunu vermesi gibi, yüksek mertebe Taylor polinomları da kendi derecelerine göre en iyi polinom yaklaşımlarını verirler. (Alıştırma 32'ye bakın.)

ÖRNEK 2 e^x için Taylor polinomları Bulmak

$f(x) = e^x$ 'in $x = 0$ 'da ürettiği Taylor serisini ve Taylor polinomlarını bulun.

Çözüm

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = e^x, \quad \dots$$

olduğundan

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = 1, \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = 1, \quad \dots$$

buluruz. f 'nin $x = 0$ 'da ürettiği Taylor serisi

$$\begin{aligned} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \\ = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu aynı zamanda e^x 'in Maclaurin serisidir. Bölüm 11.9' da, serinin her x için e^x 'e yakınsadığını göreceğiz.

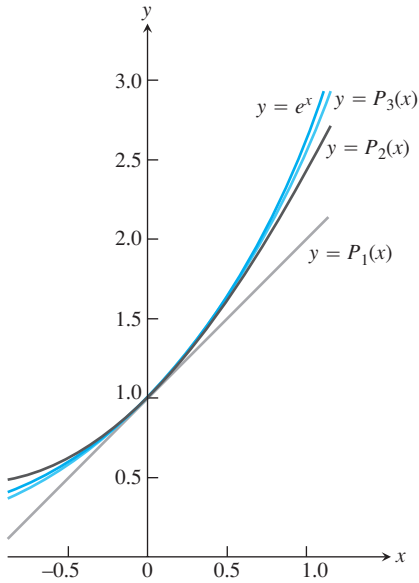
$x = 0$ 'daki n . mertebe Taylor polinomu

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

ile verilir. Şekil 11.12'ye bakın. ■

ÖRNEK 3 $\cos x$ için Taylor polinomları Bulmak

$f(x) = \cos x$ 'in $x = 0$ 'da ürettiği Taylor serisi ve polinomlarını bulun.



ŞEKİL 11.12 $f(x) = e^x$ fonksiyonunun ve Taylor polinomlarının grafikleri.

$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + (x^2/2!)$$

$$P_3(x) = 1 + x + (x^2/2!) + (x^3/3!)$$

Merkez, $x = 0$ civarındaki yakın uyuma dikkat edin (Örnek 2).

Çözüm Kosinüs ve türevleri şöyledir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, & f'(x) &= -\sin x, \\ f''(x) &= -\cos x, & f^{(3)}(x) &= \sin x, \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \cos x, & f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^{n+1} \sin x. \end{aligned}$$

$x = 0$ 'da, kosinüsler 1 ve sinüsler 0, dolayısıyla

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n, \quad f^{(2n+1)}(0) = 0$$

olar. f 'nin $x = 0$ 'da ürettiği Taylor serisi

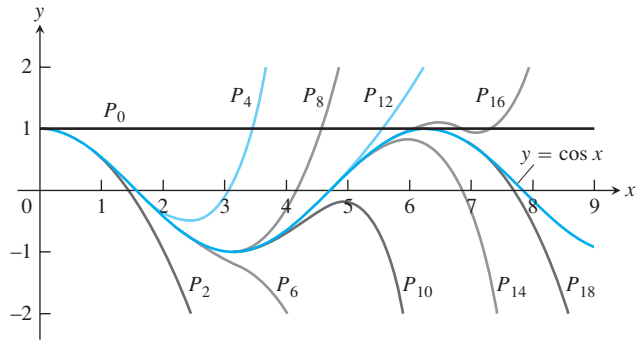
$$\begin{aligned} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \\ = 1 + 0 \cdot x - \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot x^3 + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu aynı zamanda $\cos x$ 'in Maclaurin serisidir. Bölüm 11.9' da, serinin her x için $\cos x$ 'e yakınsayacağını göreceğiz.

$f^{(2n+1)}(0) = 0$ olduğundan mertebeleri $2n$ ve $2n + 1$ olan Taylor polinomları aynıdır:

$$P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$x = 0$ civarında polinomların $f(x) = \cos x$ 'e ne kadar yaklaştıkları Şekil 11.13'te görülmektedir. Grafiklerin sadece sağ tarafları verilmiştir, çünkü grafikler y -eksenine göre simetriktir. ■



ŞEKİL 11.13 $n \rightarrow \infty$ iken

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

polinomları $\cos x$ 'e yakınsar. $\cos x$ 'in keyfi derecede uzaktaki davranışlarını kosinüsün ve türevlerinin $x = 0$ 'daki değerlerini bilerek çıkarabiliriz (Örnek 3).

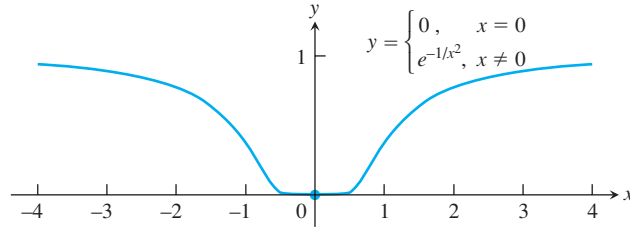
ÖRNEK 4 Taylor serisi her x için yakınsayan, fakat sadece $x = 0$ 'da $f(x)$ 'e yakınsayan bir f fonksiyonu.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun (Şekil 11.14) $x = 0$ 'da her mertebeden türevinin var olduğu ve (kolay olmasa da) her n için $f^{(n)}(0) = 0$ olduğu gösterilebilir. Bu, f 'nin $x = 0$ 'da ürettiği Taylor serisinin

$$\begin{aligned} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n + \cdots \\ = 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots. \end{aligned}$$

olduğunu gösterir. Seri her x için yakınsaktır (toplamı 0'dır), fakat sadece $x = 0$ 'da $f(x)$ 'e yakınsar. ■



ŞEKİL 11.14 $y = e^{-1/x^2}$ 'nin sürekli genişlemesinin grafiği orijinde o kadar düzdür ki oradaki bütün türevleri sıfırdır (Örnek 4).

Hala iki soru vardır:

1. Bir Taylor serisinin hangi x değerleri için üretici fonksiyonuna yakınsamasını bekleyebiliriz?
2. Bir fonksiyonun Taylor polinomları verilen bir aralıkta fonksiyona ne gibi bir kesinlikle yaklaşımda bulunurlar?

Yanıtlar bir sonraki bölümde Taylor'un bir teoremiyle verilmektedir.

ALİŞTIRMALAR 11.8

Taylor Polinomları Bulmak

1–8 alıştırmalarında, f 'nin a 'da ürettiği 0, 1, 2 ve 3.üncü mertebeden Taylor polinomlarını bulun.

1. $f(x) = \ln x$, $a = 1$
2. $f(x) = \ln(1 + x)$, $a = 0$
3. $f(x) = 1/x$, $a = 2$
4. $f(x) = 1/(x + 2)$, $a = 0$
5. $f(x) = \sin x$, $a = \pi/4$
6. $f(x) = \cos x$, $a = \pi/4$
7. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$
8. $f(x) = \sqrt{x + 4}$, $a = 0$

$x = 0$ da Taylor Polinomları Bulmak (Maclaurin Serileri)

9–20 alıştırmalarındaki fonksiyonların Maclaurin serilerini bulun.

9. e^{-x}
10. $e^{x/2}$
11. $\frac{1}{1 + x}$
12. $\frac{1}{1 - x}$
13. $\sin 3x$
14. $\sin \frac{x}{2}$

15. $7 \cos(-x)$ 16. $5 \cos \pi x$
 17. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 18. $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
 19. $x^4 - 2x^3 - 5x + 4$ 20. $(x + 1)^2$

Taylor Serilerini Bulmak

21–28 alıştırmalarında f 'nin $x = a$ 'da ürettiği Taylor serisini bulun.

21. $f(x) = x^3 - 2x + 4$, $a = 2$
 22. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 8$, $a = 1$
 23. $f(x) = x^4 + x^2 + 1$, $a = -2$
 24. $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 2$, $a = -1$
 25. $f(x) = 1/x^2$, $a = 1$
 26. $f(x) = x/(1 - x)$, $a = 0$
 27. $f(x) = e^x$, $a = 2$
 28. $f(x) = 2^x$, $a = 1$

Teori ve Alıştırmalar

29.
$$e^x = e^a \left[1 + (x - a) + \frac{(x - a)^2}{2!} + \dots \right].$$

olduğunu göstermek için. e^x 'in $x = a$ 'da ürettiği Taylor serisini kullanın.

30. (Alıştırma 29'un devamı.) e^x 'in $x = 1$ 'de ürettiği Taylor serisini bulun. Yanıtınızı Alıştırma 29'daki formülle karşılaştırın.
 31. $f(x)$ 'in $x = a$ 'da n mertebesine kadar türevleri var olsun. n . mertebe Taylor polinomunun ve ilk n türevinin $x = a$ 'daki değerlerinin, f 'nin ve ilk n türevinin $x = a$ 'daki değerlerine eşit olduğunu gösterin.

32. **Mertebesi $\leq n$ olan bütün polinomlar arasında, n . mertebe Taylor polinomu en iyi yaklaşımı verir.** $f(x)$ 'in $x = a$ 'da merkezlenmiş bir aralıkta türetilbildiğini ve $g(x) = b_0 + b_1(x - a) + \dots + b_n(x - a)^n$ 'in, $b_0, \dots, b_n$ sabit katsayılar olmak üzere n . mertebeden bir polinom olduğunu varsayın. $E(x) = f(x) - g(x)$ olsun. g üzerine

a. $E(a) = 0$

$x = a$ 'daki yaklaşım hatası sıfır.

b. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{E(x)}{(x - a)^n} = 0$,

Hata $(x - a)^n$ ile karşılaştırıldığında ihmal edilebilir.

koşullarını koyarsak,

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

olduğunu gösterin. Yani, $P_n(x)$ Taylor polinomu, $x = a$ 'da hem hatası sıfır olan, hem de $(x - a)^n$ ile karşılaştırıldığında ihmal edilebilen ve derecesi n 'ye eşit veya n 'den küçük olan tek polinomdur.

Kuadratik Yaklaşımlar

$x = a$ 'da iki kere türetilabilen bir $f(x)$ fonksiyonu tarafından üretilen ve mertebesi 2 olan Taylor polinomuna f 'nin $x = a$ 'daki **kuadratik yaklaşımı** denir. 33–38 alıştırmalarında, f 'nin $x = 0$ 'daki (a) lineerizasyonunu (mertebesi 1 olan Taylor polinomu) ve (b) kuadratik yaklaşımını bulun.

33. $f(x) = \ln(\cos x)$ 34. $f(x) = e^{\sin x}$
 35. $f(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ 36. $f(x) = \cosh x$
 37. $f(x) = \sin x$ 38. $f(x) = \tan x$

11.9

Taylor Serisinin Yakınsaklığı; Hata Tahmini

Bu bölüm Bölüm 11.8'de cevapsız bırakılan iki soruyu cevaplamaktadır:

1. Bir Taylor serisi ne zaman üretici fonksiyonuna yakınsar?
2. Bir fonksiyonun Taylor polinomları verilen bir aralıkta, fonksiyona ne kadar iyi bir yaklaşımda bulunurlar?

Taylor Teoremi

Bu soruları aşağıdaki teoremle yanıtlayacağız.

TEOREM 22 **Taylor Teoremi**

f fonksiyonu ve $f', f'', \dots, f^{(n)}$ türevleri $[a, b]$ veya $[b, a]$ aralıklarında sürekli iseler ve $f^{(n)}$ (a, b) veya (b, a) aralığında türetilabiliyorsa, a ile b arasında

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir c sayısı vardır.

Taylor Teoremi Ortalama Değer Teoreminin bir genelleştirilmesidir (Alıştırma 39). Bu bölümün sonunda Taylor teoreminin bir ispatı vardır.

Taylor teoremini uygularken, genellikle a 'yı sabit tutup, b 'ye bağımsız bir değişken gibi bakmak isteriz. Bu gibi durumlarda, b yerine x yazarsak, Taylor teoremini uygulamak kolaylaşır. Bu değişiklikte teorem şu şekli alır:

Taylor Formülü

a 'yı içeren bir I aralığında f 'nin her mertebeden türevi varsa, her pozitif n tamsayısı ve I 'daki her x için,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x), \quad (1)$$

dir. Burada

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1} \quad (c, a \text{ ile } b \text{ arasında bir sayı}) \quad (2)$$

dir.

Taylor teoremini bu şekilde ifade ettiğimizde, teorem, her $x \in I$ için

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

olduğunu söyler. $R_n(x)$ fonksiyonu $(n + 1)$. türev olan $f^{(n+1)}$ 'nin a ve x 'e bağlı olan ve bunların arasında bulunan bir c noktasındaki değeri ile tanımlanır. Denklem, istediğimiz herhangi bir n değeri için, hem f 'nin o mertebede bir polinom yaklaşımını, hem de I aralığı boyunca o yaklaşımı kullanmanın vereceği hata için bir formül verir.

(1) denkleminde **Taylor formülü** denir. $R_n(x)$ fonksiyonuna n . mertebeden kalan veya f 'nin I aralığındaki $P_n(x)$ yaklaşımının **hata terimi** denir. Her $x \in I$ için, $n \rightarrow \infty$ iken, $R_n(x) \rightarrow 0$ ise, f 'nin $x = a$ 'da ürettiği Taylor serisinin I aralığı üzerinde f 'ye **yakınsadığını** söyler ve

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$$

yazarız. Aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi çoğunlukla c 'deki değerini bilmeksizin R_n kalanını tahmin edebiliriz.

ÖRNEK 1 e^x için Taylor Serisi, Tekrar

$f(x) = e^x$ 'in $x = 0$ 'da ürettiği Taylor serisinin her reel x değerinde $f(x)$ 'e yakınsadığını gösterin.

Çözüm Fonksiyonun $I = (-\infty, \infty)$ aralığında her mertebeden türevi vardır. $f(x) = e^x$ ve $a = 0$ ile (1) ve (2) denklemleri

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

Bölüm 11.8, Örnek 2'deki polinom

ve

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \quad 0 \text{ ile } x \text{ arasında bir } c \text{ için}$$

verir. e^x, x 'in artan bir fonksiyonu olduğundan, e^c değeri $e^0 = 1$ ile e^x arasında bulunur. x negatifse, c de negatiftir, dolayısıyla $e^c < 1$ olur. x sıfırken, $e^x = 1$ ve $R_n(x) = 0$ olur. x pozitifse, c de pozitifdir ve $e^c < e^x$ olur. Yani,

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad x \leq 0 \text{ için}$$

ve

$$|R_n(x)| < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad x > 0 \text{ için}$$

olur. Son olarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \quad \text{her } x \text{ için} \quad \text{Bölüm 11.1}$$

olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ olur ve seri her x için e^x 'e yakınsar. Böylece,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots \quad (3)$$

bulunur. ■

Kalanı Tahmin Etmek

Çoğunlukla, Örnek 1'de yaptığımız gibi $R_n(x)$ 'i tahmin etmek mümkündür. Bu tahmin yöntemi o kadar uygundur ki, bunu, daha sonraki kullanımları için bir teorem olarak ifade edeceğiz.

TEOREM 23**Kalanı Tahmin Teoremi**

x ve a arasındaki her t için $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ olacak şekilde pozitif bir M sabiti varsa, Taylor teoremindeki kalan terim $R_n(x)$

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x - a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

eşitsizliğini sağlar. Bu koşullar her n için geçerliyse ve f Taylor teoreminin diğer koşullarını sağlıyorsa, seri $f(x)$ 'e yakınsar.

Artık, Kalan Tahmin Teoreminin ve Taylor Teoreminin, yakınsaklık sorularını yanıtlamak için nasıl kullanıldıklarını gösteren örneklere bakmaya hazırız. Göreceğiniz gibi, bunlar bir fonksiyona Taylor serilerinden biriyle yaklaşım yapılmasının hassaslığını belirlemekte de kullanılırlar.

ÖRNEK 2 $\sin x$ 'in $x = 0$ 'daki Taylor Serisi

$\sin x$ 'in $x = 0$ 'daki Taylor serisinin her x için x 'e yakınsadığını gösterin.

Çözüm Fonksiyon ve türevleri şöyledir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f'(x) &= \cos x, \\ f''(x) &= -\sin x, & f'''(x) &= -\cos x, \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \sin x, & f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^k \cos x \end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{ve} \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

olur. Serinin sadece tek kuvvetli terimleri vardır ve $n = 2k + 1$ için Taylor teoremi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+1}(x)$$

verir. $\sin x$ 'in bütün türevlerinin mutlak değerleri 1'den küçük veya 1'e eşittir, dolayısıyla $M = 1$ ile Kalan Tahmin Teoremini uygulayarak

$$|R_{2k+1}(x)| \leq 1 \cdot \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}.$$

buluruz. $k \rightarrow \infty$ iken, x 'in değeri ne olursa olsun, $(|x|^{2k+2}/(2k+2)!) \rightarrow 0$ olduğundan, $R_{2k+1}(x) \rightarrow 0$ olur ve $\sin x$ 'in Maclaurin serisi her x için $\sin x$ 'e yakınsar. Böylece,

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (4)$$

elde edilir. ■

ÖRNEK 3 $\cos x$ 'in $x = 0$ 'daki Taylor Serisi, Tekrar

$\cos x$ 'in $x = 0$ 'daki Taylor serisinin her x değerinde $\cos x$ 'e yakınsadığını gösterin.

Çözüm $\cos x$ 'in Taylor polinomuna (Bölüm 11.8, Örnek 3) kalan terimini ekleyerek $n = 2k$ ile $\cos x$ 'in Taylor formülünü elde ederiz:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k}(x).$$

Kosinüsün türevlerinin hepsinin mutlak değerleri 1'den küçük veya 1'e eşit olduğundan, $M = 1$ ile Kalan Tahmin Teoremi

$$|R_{2k}(x)| \leq 1 \cdot \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

verir. $k \rightarrow \infty$ iken, her x değeri için, $R_{2k} \rightarrow 0$ bulunur. Bu nedenle, seri her x için $\cos x$ 'e yakınsar.

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (5)$$

■

ÖRNEK 4 Değişken Dönüşümü ile bir Taylor Serisi Bulmak

$\cos 2x$ 'in $x = 0$ 'daki Taylor serisini bulun.

Çözüm $\cos 2x$ 'in Taylor serisini $\cos x$ 'in Taylor serisinde x yerine $2x$ yazarak bulabiliriz:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots \quad \begin{array}{l} x \text{ yerine } 2x \text{ alınmış} \\ (5) \text{ denklemi} \end{array} \\ &= 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

(5) denklemi $-\infty < x < \infty$ için geçerlidir, bu da $-\infty < 2x < \infty$ için de geçerli olduğunu gösterir, dolayısıyla yeni yaratılan seri her x için yakınsaktır. Alıştırma 45 serinin neden gerçekten de $2x$ 'in Taylor serisi olduğunu açıklamaktadır. ■

ÖRNEK 5 Bir Taylor Serisini Çarpımla Bulmak

$x \sin x$ 'in $x = 0$ 'daki Taylor serisini bulun.

Çözüm $x \sin x$ 'in Taylor serisini $\sin x$ 'in Taylor serisini (Denklem 4) x ile çarparak bulabiliriz.

$$\begin{aligned} x \sin x &= x \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \dots \end{aligned}$$

$\sin x$ serisi her x için yakınsak olduğundan yeni seri her x için yakınsaktır. Alıştırma 45, serinin neden $x \sin x$ 'in Taylor serisi olduğunu açıklamaktadır. ■

Kesme Hatası

e^x 'in $x = 0$ 'daki Taylor serisi her x için e^x 'e yakınsar. Fakat hala e^x 'e, verilen bir hassasiyette yaklaşımda bulunmak için kaç tane terim kullanacağımıza karar vermemiz gerekmektedir. Bu bilgiyi Kalan Tahmin Teoreminden elde ederiz.

ÖRNEK 6 e 'yi 10^{-6} 'dan daha küçük bir hatayla hesaplayın.

Çözüm $x = 1$ alarak Örnek 1'in çözümünü kullanıp

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n(1)$$

yazabiliriz. Burada

$$R_n(1) = e^c \frac{1}{(n+1)!} \quad \text{0 ile 1 arasındaki bir } c \text{ için}$$

ile verilir. Bu örneğin amaçları için, $e < 3$ olduğunu bildiğimizi varsayalım. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{(n+1)!} < R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

olduğundan eminiz, çünkü $0 < c < 1$ için, $1 < e^c < 3$ 'dür.

Denemeyle, $1/9! > 10^{-6}$ ve $3/10! < 10^{-6}$ olduğunu buluruz. Yani $(n+1)$ 'i en az 10 veya n 'yi en az 9 almamız gerekir. 10^{-6} 'dan küçük bir hatayla

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2.718282$$

buluruz. ■

ÖRNEK 7 Hangi x değerleri için $\sin x$ yerine, büyüklüğü 3×10^{-4} 'ten fazla olmayan bir hatayla $x - (x^3/3!)$ yazabiliriz?

Çözüm Burada, $\sin x$ 'in Taylor serisinin, sıfırdan farklı her x değeri için bir alterne seri olmasının avantajını kullanacağız. Alterne Seriler Tahmin Teoremine göre (Bölüm 11.6)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

serisini $(x^3/3!)$ 'den sonra kesmenin getireceği hata

$$\left| \frac{x^5}{5!} \right| = \frac{|x|^5}{120}$$

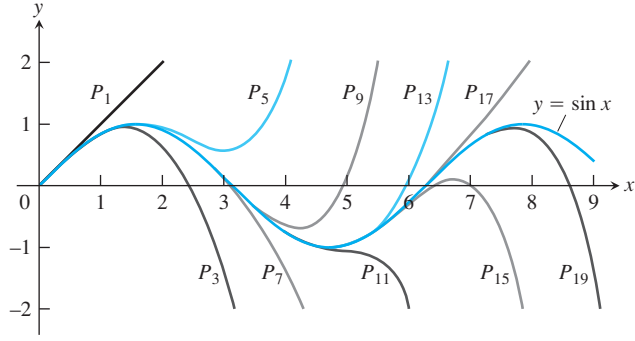
değerinden büyük olmayacaktır. Dolayısıyla,

$$\frac{|x|^5}{120} < 3 \times 10^{-4} \quad \text{veya} \quad |x| < \sqrt[5]{360 \times 10^{-4}} \approx 0.514. \quad \text{Güvenlik için, aşağı yuvarlanmış}$$

ise, hata 3×10^{-4} 'e eşit veya bundan daha küçük olacaktır.

Alterne Seriler Tahmin Teoremi Kalan Tahmin Teoreminin söylemediği bir şeyi daha söyler: yani, $\sin x$ için $x - (x^3/3!)$ tahmini, x pozitif olduğunda gerçek değerden küçük olan bir tahmindir, çünkü $x^5/120$ pozitifdir.

Şekil 11.15 $\sin x$ grafiğiyle birlikte birkaç Taylor polinomu yaklaşımını da göstermektedir. $P_3(x) = x - (x^3/3!)$ 'in grafiği $-1 \leq x \leq 1$ iken neredeyse sinüs eğrisinden ayırt edilememektedir.



ŞEKİL 11.15

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

polinomları $n \rightarrow \infty$ iken $\sin x$ 'e yakınsarlar. $P_3(x)$ 'in $x < 1$ için sinüs eğrisine ne kadar yakın olduğuna dikkat edin (Örnek 7)

Kalan Tahmin Teoreminin verdiği tahminin Alterne Serilen Tahmin Teoreminin verdiği tahminle ne zaman uyuşacağını merak edebilirsiniz.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_3$$

yazarsak, Kalan Tahmin Teoremi, daha kötü bir sonuç olan

$$|R_3| \leq 1 \cdot \frac{|x|^4}{4!} = \frac{|x|^4}{24}$$

değerini verir. Fakat $x - (x^3/3!) = 0 + x + 0x^2 - (x^3/3!) + 0x^4$ 'ün üçüncü mertebe olduğu kadar dördüncü mertebeden de bir Taylor polinomu olduğunu hatırlarsak,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + 0 + R_4$$

olur ve $M = 1$ ile Kalan Tahmin Teoremi

$$|R_4| \leq 1 \cdot \frac{|x|^5}{5!} = \frac{|x|^5}{120}$$

verir. Bu, Alterne Seriler Tahmin Teoremiyle bulduğumuz sonuçtur. ■

Taylor Serilerini Birleştirmek

Yakınsaklık aralıklarının kesişimlerinde, Taylor serileri toplanabilir, çıkarılabilir, sabitlerle çarpılabilir ve sonuçlar yine Taylor serileri olur. $f(x) + g(x)$ 'in Taylor serisi $f(x)$ ve $g(x)$ 'in Taylor serilerinin toplamıdır, çünkü $f + g$ 'nin n . türevi $f^{(n)} + g^{(n)}$ 'dir. Böylece $(1 + \cos 2x)/2$ 'nin Taylor serisini $\cos 2x$ 'in Taylor serisine 1 ekleyip, birleştirilmiş sonucu 2'ye bölerek bulabiliriz. $\sin x + \cos x$ 'in Taylor serisi $\sin x$ ve $\cos x$ 'in Taylor serilerinin terim-terim toplanmış halidir.

Euler Özdeşliği

Hatırlayacağınız gibi, bir kompleks (karmaşık) sayı, a ve b reel sayılar ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere, $a + bi$ şeklinde bir sayıdır. e^x 'in Taylor serisinde $x = i\theta$ (θ reel) alır ve sonucu basitleştirmek için,

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = i^2 i^2 = 1, \quad i^5 = i^4 i = i,$$

gibi bağıntıları kullanırsak

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) = \cos \theta + i \sin \theta. \end{aligned}$$

Bu, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ olduğunu *ispatlamaz*, çünkü henüz e 'nin kompleks bir kuvvetini almanın ne anlama geldiğini tanımlamadık. Fakat $e^{i\theta}$ 'nın bildiğimiz diğer şeylerle nasıl uyum sağladığını gösterir.

TANIM

Herhangi bir θ reel sayısı için, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 'dir. (6)

Euler özdeşliği denilen (6) denklemi herhangi bir $a + bi$ kompleks sayısı için e^{a+bi} 'yi $e^a \cdot e^{bi}$ olarak yazmamızı sağlar. Özdeşliğin bir sonucu

$$e^{i\pi} = -1$$

denklemdir. Bu denklem $e^{i\pi} + 1 = 0$ şeklinde yazıldığında matematikteki en önemli beş sabiti bir araya toplar.

Taylor Teoreminin Bir İspatı

Taylor teoremini $a < b$ olduğunu varsayarak ispatlayacağız. $a > b$ için ispat da aynıdır.

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Taylor polinomu ve bunun ilk n tane türevi, $x = a$ 'da f fonksiyonuna ve onun ilk n türevine uyarlar. K bir sabit olmak üzere, $K(x - a)^{n+1}$ gibi bir terim eklersek bu uyumu bozmayız, çünkü böyle bir terim ve bu terimin ilk n türevi $x = a$ 'da sıfırdır. Yeni fonksiyon

$$\phi_n(x) = P_n(x) + K(x - a)^{n+1}$$

ve bunun ilk n türevi $x = a$ 'da f 'ye ve ilk n türevine uyacaktır.

Şimdi $y = \phi_n(x)$ eğrisinin $x = b$ 'de esas eğri $y = f(x)$ 'e uymasını sağlayacak özel bir K değeri seçelim. Sembolik olarak,

$$f(b) = P_n(b) + K(b - a)^{n+1}, \quad \text{veya} \quad K = \frac{f(b) - P_n(b)}{(b - a)^{n+1}} \quad (7)$$

yazılır.

(7) denklemiyle belirlenmiş K ile

$$F(x) = f(x) - \phi_n(x)$$

fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında her x için, orijinal f fonksiyonu ile yaklaşım fonksiyonu ϕ_n arasındaki farkı ölçer.

Şimdi Rolle teoremini kullanacağız (Bölüm 4.2). İlk olarak, $F(a) = F(b) = 0$ olduğundan ve hem F hem de F' türevi $[a, b]$ 'da sürekli olduklarından

$$(a, b)\text{'deki bir } c_1 \text{ için } F'(c_1) = 0$$

olduğunu biliyoruz. Sonra, $F'(a) = F'(c_1) = 0$ olduğundan ve hem F' hem de F'' türevleri $[a, c_1]$ 'de sürekli olduklarından

$$(a, c_1)\text{'deki bir } c_2 \text{ için } F''(c_2) = 0$$

olduğunu biliyoruz. Rolle Teoremini F'' , F''' , ..., $F^{(n-1)}$ 'e art arda uygulamak

$$(a, c_2)\text{'de } F'''(c_3) = 0 \quad \text{olacak şekilde bir } c_3$$

$$(a, c_3)\text{'de } F^{(4)}(c_4) = 0 \quad \text{olacak şekilde bir } c_4$$

$\vdots$

$$(a, c_{n-1})\text{'de } F^{(n)}(c_n) = 0 \quad \text{olacak şekilde bir } c_n$$

bulunduğunu gösterir. Son olarak, $F^{(n)} [a, c_n]$ 'de sürekli ve (a, c_n) 'de türetilbilir olduğundan ve $F^{(n)}(a) = F^{(n)}(c_n) = 0$ olduğundan Rolle Teoremi, (a, c_n) aralığında

$$F^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0 \quad (8)$$

olacak şekilde bir c_{n+1} sayısı bulunduğunu söyler. $F(x) = f(x) - P_n(x) - K(x-a)^{n+1}$ 'in toplam $n+1$ kere türevini alırsak,

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 - (n+1)!K \quad (9)$$

buluruz. (8) ve (9) denklemleri birlikte

$$(a, b)\text{'de bir } c = c_{n+1} \text{ sayısı için } K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \quad (10)$$

olduğunu gösterir. (7) ve (10) denklemleri ise

$$f(b) = P_n(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

olduğunu gösterir. Bu da ispatı tamamlar. ■

ALİŞTIRMALAR 11.9

Değişken Dönüşümü ile Taylor Serileri

1–6 alıştırmalarındaki fonksiyonların $x = 0$ 'da Taylor serilerini bulmak için değişken dönüşümü kullanın (Örnek 4'teki gibi).

1. e^{-5x}

2. $e^{-x/2}$

3. $5 \sin(-x)$

4. $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

5. $\cos \sqrt{x+1}$

6. $\cos(x^{3/2}/\sqrt{2})$

Daha Fazla Taylor Serisi

7–18 alıştırmalarındaki fonksiyonların $x = 0$ 'daki Taylor serilerini bulun.

7. xe^x

8. $x^2 \sin x$

9. $\frac{x^2}{2} - 1 + \cos x$

10. $\sin x - x + \frac{x^3}{3!}$

11. $x \cos \pi x$

12. $x^2 \cos(x^2)$

13. $\cos^2 x$ (*İpucu:* $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$.)
14. $\sin^2 x$ 15. $\frac{x^2}{1 - 2x}$ 16. $x \ln(1 + 2x)$
17. $\frac{1}{(1 - x)^2}$ 18. $\frac{2}{(1 - x)^3}$

Hata Tahmini

19. Yaklaşık olarak hangi x değerlerinde $\sin x$ yerine büyüklüğü 5×10^{-4} 'ten fazla olmayan bir hatayla $x - (x^3/6)$ yazabilirsiniz? Yanıtınızı açıklayın.
20. $\cos x$ yerine $1 - (x^2/2)$ yazılırsa ve $|x| < 0.5$ ise, hata hakkında ne gibi bir tahmin yapılabilir? $1 - (x^2/2)$ çok mu fazla, yoksa çok mu azdır? Yanıtınızı açıklayın.
21. $|x| < 10^{-3}$ iken, $\sin x = x$ yaklaşımı ne kadar yakındır? Hangi x değerlerinde $x < \sin x$ olur?
22. x küçükken $\sqrt{1 + x} = 1 + (x/2)$ yaklaşımı kullanılır. $|x| < 0.01$ iken hatayı tahmin edin.
23. x küçükken $e^x = 1 + x + (x^2/2)$ yaklaşımı kullanılır. $|x| < 0.1$ iken hatayı tahmin etmek için Kalan Tahmin Teoremini kullanın.
24. (*Alıştırma 23'ün devamı.*) $x < 0$ iken, e^x serisi alterne bir seridir. Alterne Seri Teoremini kullanarak $-0.1 < x < 0$ iken e^x yerine $1 + x + (x^2/2)$ yazmanın vereceği hatayı tahmin edin. Tahmininizi Alıştırma 23'te bulduğunuzla karşılaştırın.
25. $|x| < 0.5$ iken, $\sinh x = x + (x^3/3!)$ yaklaşımının hatasını tahmin edin. (*İpucu:* R_3 değıl, R_4 kullanın.)
26. $0 \leq h \leq 0.01$ iken, e^h yerine büyüklüğü h 'nin %0.6'sından büyük olmayan bir hatayla $1 + h$ yazılabileceğini gösterin. $e^{0.01} = 1.01$ alın.
27. Hangi pozitif x değerlerinde $\ln(1 + x)$ yerine, x 'in büyüklüğünün en çok %1'i kadar bir hatayla, x yazabilirsiniz?
28. $x = 1$ 'de $\tan^{-1} x$ 'in Maclaurin serisini kullanarak $\pi/4$ 'ü tahmin etmeyi planlıyorsunuz. Alterne Seriler Tahmin Teoremini kullanarak, tahmininizin 2 ondalık basamak doğrulukta olduğundan emin olmak için serinin kaç terimini almanız gerektiğini belirleyin.
29. a. $\sin x$ 'in Taylor serisini ve Alterne Seriler Tahmin Teoremini kullanarak

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \neq 0$$

olduğunu gösterin.

- T** b. $-5 \leq x \leq 5$ için $f(x) = (\sin x)/x$ ile $y = 1 - (x^2/6)$ ve $y = 1$ fonksiyonlarının grafiklerini birlikte çizin. Grafikler arasındaki ilişkiyi yorumlayın.
30. a. $\cos x$ 'in Taylor serisini ve Alterne Seriler Tahmin Teoremini kullanarak

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2}, \quad x \neq 0.$$

olduğunu gösterin. (Bu, Bölüm 2.2, Alıştırma 52'deki eşitsizliktir.)

- T** b. $-9 \leq x \leq 9$ için $f(x) = (1 - \cos x)/x^2$ ile $y = (1/2) - (x^2/24)$ ve $y = (1/2)$ fonksiyonlarının grafiklerini birlikte çizin. Grafikler arasındaki ilişkiyi yorumlayın.

Maclaurin Serilerini Bulmak ve Tanımlamak

$x = 0$ 'daki Taylor serisinin bir başka adının Maclaurin serisi olduğunu hatırlayın. 31–34 alıştırmalarındaki serilerden her biri bir $f(x)$ fonksiyonunun bir noktadaki Maclaurin serisidir. Hangi fonksiyon ve hangi nokta? Serinin toplamı nedir?

$$31. (0.1) - \frac{(0.1)^3}{3!} + \frac{(0.1)^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^k(0.1)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots$$

$$32. 1 - \frac{\pi^2}{4^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{4^4 \cdot 4!} - \cdots + \frac{(-1)^k(\pi)^{2k}}{4^{2k} \cdot (2k)!} + \cdots$$

$$33. \frac{\pi}{3} - \frac{\pi^3}{3^3 \cdot 3} + \frac{\pi^5}{3^5 \cdot 5} - \cdots + \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{3^{2k+1}(2k+1)} + \cdots$$

$$34. \pi - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^3}{3} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{\pi^k}{k} + \cdots$$

35. e^x ve $\sin x$ 'in Maclaurin serilerini çarparak $e^x \sin x$ 'in Maclaurin serisinin sıfırdan farklı ilk beş terimini bulun.
36. e^x ve $\cos x$ 'in Maclaurin serilerini çarparak $e^x \cos x$ 'in Maclaurin serisinin sıfırdan farklı ilk beş terimini bulun.
37. $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ bağıntısını kullanarak $\sin^2 x$ 'in Maclaurin serisini bulun. Sonra bu serinin türevini alarak $2 \sin x \cos x$ 'in Maclaurin serisini bulun. Bunun $\sin 2x$ serisi olup olmadığını kontrol edin.
38. (*Alıştırma 37'nin devamı.*) $\cos^2 x = \cos 2x + \sin^2 x$ bağıntısını kullanarak $\cos^2 x$ için bir kuvvet serisi elde edin.

Teori ve Örnekler

39. **Taylor Teoremi ve Ortalama Değer Teoremi** Ortalama Değer Teoreminin (Bölüm 4.2, Teorem 4) nasıl Taylor Teoreminin özel bir durumu olduğunu açıklayın.
40. **Büküm noktalarında lineerizasyon** İki kere türetilen bir $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin $x = a$ 'da bir büküm noktası varsa, f 'nin $x = a$ 'daki lineerizasyonunun aynı zamanda f 'nin $x = a$ 'daki kuadratik yaklaşımı olduğunu gösterin. Bu, teğetlerin büküm noktalarına neden o kadar iyi uyum sağladıklarını açıklar.
41. **(İkinci) ikinci türev testi** Aşağıdaki testi doğrulamak için

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(c_2)}{2}(x - a)^2$$

denklemini kullanın.

f 'nin sürekli birinci ve ikinci türevlerinin var ve $f'(a) = 0$ olduğunu varsayın.

- a. İçi a 'yı kapsayan bir aralık boyunca $f'' \leq 0$ ise, f 'nin a 'da bir yerel maksimumu vardır;
- b. İçi a 'yı kapsayan bir aralık boyunca $f'' \geq 0$ ise, f 'nin a 'da bir yerel minimumu vardır.

42. Kübik bir yaklaşım $a = 0$ ve $n = 3$ ile Taylor formülünü kullanarak $f(x) = 1/(1-x)$ 'in $x = 0$ 'daki kübik yaklaşımını bulun. $|x| \leq 0.1$ iken yaklaşımdaki hatanın büyüklüğü için bir üst sınır bulun.

43. a. $n = 2$ ile Taylor formülünü kullanarak $f(x) = (1+x)^k$ 'ye (k bir sabit) $x = 0$ 'daki kuadratik yaklaşımı bulun.

b. $k = 3$ ise, $[0, 1]$ aralığındaki yaklaşık olarak hangi x değerlerinde, kuadratik yaklaşımdaki hata $1/100$ 'den küçük olur?

44. π 'ye yaklaşımları iyileştirmek

a. P , π 'ye n ondalık basamak kesinlikte bir yaklaşım olsun. $P + \sin P$ 'nin $3n$ ondalık basamak kesinlikte bir yaklaşım verdiğini gösterin. (İpucu: $P = \pi + x$ alın.)

T b. Bunu bir hesap makinesiyle deneyin.

45. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tarafından üretilen Taylor serisi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisidir. Yakınsaklık yarıçapı $c > 0$ olan bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisiyle tanımlanan bir fonksiyonun, $(-c, c)$ aralığının her noktasında fonksiyona yakınsayan bir Taylor serisi vardır. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tarafından üretilen Taylor serisinin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisinin kendisi olduğunu göstererek bunu gösterin.

Bunun hemen görülen bir sonucu, Yakınsak kuvvet serilerinin türevlerinin alınması veya integrasyonu ile elde edilen serilerin, temsil ettikleri fonksiyonların ürettiği Taylor serileri olmaları gibi, Taylor serilerini x 'in kuvvetleri ile çarpılmasından elde edilen

$$x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \dots$$

ve

$$x^2 e^x = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \dots,$$

gibi serilerdir.

46. Çift fonksiyonların ve tek fonksiyonların Taylor serileri (Bö-lüm 11.7, Alıştırma 45'in devamı.) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ fonksiyonu-nun açık bir $(-c, c)$ aralığındaki her x için yakınsadığını varsayın. Aşağıdakileri gösterin.

a. f çiftse, $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$ 'dır; yani f 'nin serisi sadece x 'in çift kuvvetlerini içerir.

b. $a_0 = a_2 = a_4 = \dots = 0$ 'dır; yani f 'nin serisi sadece x 'in tek kuvvetlerini içerir.

47. Periyodik fonksiyonların Taylor polinomları

a. Her x için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde pozitif bir M sabitinin var olduğunu göstererek, her sürekli periyodik $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, fonksiyonunun büyüklüğünün sınırlı olduğunu gösterin.

b. $f(x) = \cos x$ 'in ürettiği pozitif dereceli her Taylor polinomunun grafiğinin $|x|$ arttıkça $\cos x$ 'in grafiğinden uzaklaşması gerektiğini gösterin. Bunu Şekil 11.13'te görebilirsiniz. $\sin x$ 'in Taylor polinomları da benzer şekilde davranır (Şekil 11.15).

T 48. a. $y = (1/3) - (x^2)/5$ ve $y = (x - \tan^{-1}x)/x^3$ eğrilerinin grafiklerini $y = 1/3$ eğrisiyle birlikte çizin.

b. Gördüklerinizi bir Taylor serisiyle açıklayın.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan^{-1}x}{x^3}$$

nedir?

Euler Özdeşliği

49. e 'nin aşağıdaki kuvvetlerini $a + bi$ şeklinde yazmak için (6) denklemini kullanın.

a. $e^{-i\pi}$

b. $e^{i\pi/4}$

c. $e^{-i\pi/2}$

50. (6) Denklemini kullanarak

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{ve} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

olduğunu gösterin.

51. Alıştırma 50'deki bağıntıları $e^{i\theta}$ ve $e^{-i\theta}$ 'nin Taylor serilerini birleştirerek doğrulayın.

52. Aşağıdakileri gösterin.

a. $\cosh i\theta = \cos \theta$,

b. $\sinh i\theta = i \sin \theta$.

53. e^x ve $\sin x$ 'in Taylor serilerini çarparak, $e^x \sin x$ 'in Taylor serisinin x^5 'e kadar olan terimlerini bulun. Bu seri

$$e^x \cdot e^{ix} = e^{(1+i)x}$$

serisinin sanal (imajiner) kısmıdır. Bunu yanıtınızı kontrol etmek-te kullanın. Hangi x değerleri için bu seri $e^x \sin x$ 'e yakınsamalıdır?

54. a ve b reel olmak üzere, $e^{(a+ib)x}$

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

denklemleriyle tanımlarız. Bu denklemin sağ tarafının türevini alarak

$$\frac{d}{dx} e^{(a+ib)x} = (a + ib)e^{(a+ib)x}$$

olduğunu gösterin. Yani bildiğimiz $(d/dx)e^{kx} = ke^{kx}$ kuralı kompleks k 'ler için de geçerlidir.

55. $e^{i\theta}$ 'nin tanımını kullanarak reel θ , θ_1 ve θ_2 sayıları için aşağıdakileri gösterin.

a. $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$,

b. $e^{-i\theta} = 1/e^{i\theta}$.

56. Kompleks iki $a + ib$ ve $c + id$ sayısı ancak ve ancak $a = c$ ve $b = d$ ise eşittir. Bunu kullanarak, $C = C_1 + iC_2$ kompleks bir integrasyon sabiti olmak üzere

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx \quad \text{ve} \quad \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

eşiğinden

$$\int e^{(a+ib)x} \, dx = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} e^{(a+ib)x} + C$$

integrallerini hesaplayın.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Lineer, Kuadratik ve Kübik Yaklaşımlar

$n = 1$ ve $a = 0$ ile Taylor formülü bir fonksiyonun $x = 0$ 'daki lineerizasyonunu verir. $n = 2$ ve $n = 3$ ile, standart kuadratik ve kübik yaklaşımları elde ederiz. Bu alıştırmalarda, bu yaklaşımlarla ilgili hataları araştıracağız. İki sorunun yanıtını arıyoruz:

- Hangi x değerleri için fonksiyon yerine, 10^{-2} 'den küçük bir hata ile, söz konusu yaklaşımlar yazılabilir?
- Belirlenen aralıkta fonksiyon yerine söz konusu yaklaşımları almakla yapacağımız maksimum hata nedir?

Bir BCS kullanarak, 57–62 alıştırmalarında verilen fonksiyonlar ve aralıklar için (a) ve (b)'deki soruları yanıtlamak için aşağıdaki adımları gerçekleştirin.

Adım 1: Fonksiyonu belirtilen aralıkta çizin.

Adım 2: $x = 0$ 'daki $P_1(x)$, $P_2(x)$ ve $P_3(x)$ Taylor polinomlarını bulun.

Step 3: Her Taylor polinomunun kalanıyla ilişkili olan $(n + 1)$. türevi $f^{(n+1)}(c)$ 'yi hesaplayın. Türevi, verilen aralıkta c 'nin bir fonksiyonu olarak çizin ve maksimum mutlak değeri M 'yi tahmin edin.

Step 4: Her polinomun $R_n(x)$ kalanını hesaplayın. $f^{(n+1)}(c)$ yerine Adım 3'teki M tahminini kullanarak, $R_n(x)$ 'in grafiğini çizin. (a) sorusunu yanıtlayan x değerlerini bulun.

Step 5: Tahmin ettiğiniz hatayı gerçek hata

$E_n(x) = |f(x) - P_n(x)|$ ile, $E_n(x)$ 'in grafiğini belirlenen aralıkta çizerek karşılaştırın. Bu (b) sorusunu yanıtlamaya yardımcı olacaktır.

Step 6: Fonksiyonun ve üç Taylor yaklaşımının grafiklerini birlikte çizin. Grafiklerin 4 ve 5 adımlarında bulduklarınızla ilişkisini tartışın.

$$57. f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \quad |x| \leq \frac{3}{4}$$

$$58. f(x) = (1+x)^{3/2}, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 2$$

$$59. f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad |x| \leq 2$$

$$60. f(x) = (\cos x)(\sin 2x), \quad |x| \leq 2$$

$$61. f(x) = e^{-x} \cos 2x, \quad |x| \leq 1$$

$$62. f(x) = e^{x/3} \sin 2x, \quad |x| \leq 2$$

11.10

Kuvvet Serilerinin Uygulamaları

Bu bölüm kuvvet ve kök bulmada kullanılan binom serilerini tanıtmakta ve bazen serilerin, bir başlangıç değer problemine yaklaşımda bulunmakta, elemanter olmayan integrallerin hesaplanmasında ve belirsiz formlara yol açan limitlerin hesaplanmasında, nasıl kullanıldığını göstermektedir. $\tan^{-1} x$ 'in Taylor serisinin bir çıkarılışını verecek ve sık kullanılan seriler için bir referans tablosuyla bölümü bitireceğiz.

Kuvvetler ve Kökler İçin Binom Serileri

m bir sabitken, $f(x) = (1+x)^m$ 'nin ürettiği Taylor serisi

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}x^k + \dots \quad (1)$$

ile verilir. Binom serisi denilen bu seri $|x| < 1$ için mutlak yakınsaktır. Seriyi türetmek

için, önce fonksiyonu ve türevlerini yazalım:

$$f(x) = (1 + x)^m$$

$$f'(x) = m(1 + x)^{m-1}$$

$$f''(x) = m(m-1)(1 + x)^{m-2}$$

$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1 + x)^{m-3}$$

⋮

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)(m-2) \cdots (m-k+1)(1 + x)^{m-k}.$$

Sonra bunları $x=0$ 'da hesaplar ve bu değerleri Taylor serisi formülüne koyarak (1) denklemini elde ederiz.

m sifıra eşit veya sıfırdan büyük bir tamsayı ise, seri $(m+1)$ terimden sonra durur, çünkü $k = m+1$ 'den sonraki terimler sıfırdır.

m pozitif bir tamsayı veya sıfır değilse, seri sonsuzdur ve $|x| < 1$ için yakınsaktır. Nedenini anlamak için, u_k 'yi x^k 'yi içeren terim olarak alın. Sonra mutlak yakınsaklık için Oran Testini uygulayarak

$$k \rightarrow \infty \quad \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \left| \frac{m-k}{k+1} x \right| \rightarrow |x|$$

olduğunu görün.

Binom serilerini türettiğimiz sadece bunun $(1+x)^m$ tarafından üretildiğini ve $|x| < 1$ için yakınsadığını göstermektedir. Türetiş serinin $(1+x)^m$ 'ye yakınsadığını göstermez. Seri bu fonksiyona yakınsar, fakat bunu ispatsız kabul edeceğiz.

Binom Serisi

$-1 < x < 1$ için

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k,$$

ve

$$\binom{m}{1} = m, \quad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!},$$

olmak üzere

$$k \geq 3 \text{ için } \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2) \cdots (m-k+1)}{k!} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 1 Binom Serisini Kullanmak

$m = -1$ ise

$$\binom{-1}{1} = -1, \quad \binom{-1}{2} = \frac{-1(-2)}{2!} = 1,$$

ve

$$\binom{-1}{k} = \frac{-1(-2)(-3) \cdots (-1-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{k!}{k!} = (-1)^k \text{ olur.}$$

Bu katsayı değerleri ve x yerine $-x$ ile binom formülü, bildiğimiz

$$(1 + x)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^k x^k + \cdots \quad \blacksquare$$

geometrik serisini verir.

ÖRNEK 2 Binom Serisini Kullanmak

Bölüm 3.8, Örnek 1'den küçük $|x|$ 'ler için $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ olduğunu biliyoruz. $m = 1/2$ ile binom serisi, Alterne Seriler Tahmin Teoreminden gelen hata tahminleriyle birlikte, kuadratik ve daha yüksek mertebeden yaklaşımları da verir:

$$\begin{aligned} (1+x)^{1/2} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} x^3 \\ &\quad + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!} x^4 + \cdots \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots \end{aligned}$$

x 'e değişken dönüşümü uygulamak başka yaklaşımları da verir. Örneğin,

$$\text{Küçük } |x^2| \text{ için } \sqrt{1-x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}$$

$$\text{Küçük } \frac{1}{x} \text{ yani büyük } |x| \text{ için } \sqrt{1-\frac{1}{x}} \approx 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} \quad \blacksquare$$

bulunur.

Diferansiyel Denklemlerin ve Başlangıç Değer Problemlerinin Kuvvet Serisi Çözümleri

Bir başlangıç değer problemi veya diferansiyel denklemin çözümü için basit bir ifade bulamazsak, çözüm hakkında başka yollardan bilgi almaya çalışırız. Bunun bir yolu çözümün bir kuvvet serisi temsilini bulmaya çalışmaktır. Eğer bulabilirsek, hemen çözümün polinom yaklaşımları için bir kaynak elimize geçer, bu da aradığımız tek şey olabilir. İlk örnek (Örnek 3), Bölüm 9.2'nin yöntemleriyle çözülebilecek bir birinci derece lineer diferansiyel denklemle ilgilenmektedir. Örnek, bundan habirimiz yokmuş gibi, denklemi bir kuvvet serisiyle nasıl çözeceğimizi gösterir. İkinci örnek (Örnek 4) daha önce gördüğümüz yöntemlerle çözülemeyen bir denklemle uğraşır.

ÖRNEK 3 Bir Başlangıç Değer Probleminin Seri Çözümü

Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözün.

$$y' - y = x, \quad y(0) = 1.$$

Çözüm

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n + \cdots \quad [2]$$

şeklinde bir çözüm olduğunu varsayalım.

Amacımız, hangi a_k katsayıları için, serinin ve

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots \quad (3)$$

birinci türevinin, verilen diferansiyel denklemi ve başlangıç koşulunu sağladığını bulmaktır. $y' - y$ serisi (2) ve (3) denklemlerindeki serilerin farkıdır:

$$\begin{aligned} y' - y &= (a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + \cdots \\ &\quad + (na_n - a_{n-1})x^{n-1} + \cdots \end{aligned} \quad (4)$$

$y' - y = x$ denklemini sağlayacaksa, (4) Denklemindeki seri x 'e eşit olmalıdır. Bölüm 11.7, Alıştırma 45'te gördüğümüz gibi, kuvvet serisi temsilleri tek olduğu için, (4) Denklemindeki katsayılar aşağıdaki denklemleri sağlamalıdır:

$$\begin{array}{ll} a_1 - a_0 = 0 & \text{Sabit terimler} \\ 2a_2 - a_1 = 1 & x\text{'in katsayıları} \\ 3a_3 - a_2 = 0 & x^2\text{'nin katsayıları} \\ \vdots & \vdots \\ na_n - a_{n-1} = 0 & x^{n-1}\text{'in katsayıları} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Ayrıca, (2) Denklemden $x = 0$ iken, $y = a_0$ olduğunu görebiliriz, yani $a_0 = 1$ ' dir (bu başlangıç koşuludur). Hepsini bir araya koyarsak,

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & a_1 &= a_0 = 1, & a_2 &= \frac{1 + a_1}{2} = \frac{1 + 1}{2} = \frac{2}{2}, \\ a_3 &= \frac{a_2}{3} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{3!}, \dots, & a_n &= \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{2}{n!}, \dots \end{aligned}$$

buluruz. Bu katsayı değerlerini y denkleminde (2 Denklemi) yerine koymak

$$\begin{aligned} y &= 1 + x + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots + 2 \cdot \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + x + 2 \underbrace{\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \right)}_{e^x - 1 - x \text{ in Taylor serisi}} \\ &= 1 + x + 2(e^x - 1 - x) = 2e^x - 1 - x \end{aligned}$$

verir. Başlangıç değer probleminin çözümü $y = 2e^x - 1 - x$ 'tir.

Kontrol için,

$$y(0) = 2e^0 - 1 - 0 = 2 - 1 = 1$$

ve

$$y' - y = (2e^x - 1) - (2e^x - 1 - x) = x$$

olduğunu görürüz. ■

ÖRNEK 4 Bir Diferansiyel Denklemi Çözmek

Aşağıdaki denklemin bir kuvvet serisi çözümünü bulun:

$$y'' + x^2y = 0 \quad (5)$$

Çözüm

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \quad (6)$$

şeklinde bir çözüm olduğunu varsayar ve hangi a_k katsayıları için, serinin ve

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots \quad (7)$$

türevinin (5) denklemini sağladığını buluruz. x^2y serisi x^2 kere (6) denkleminin sağ tarafıdır:

$$x^2y = a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \cdots + a_nx^{n+2} + \cdots \quad (8)$$

$y'' + x^2y$ (7) ve (8) denklemlerindeki serilerin toplamıdır:

$$\begin{aligned} y'' + x^2y &= 2a_2 + 6a_3x + (12a_4 + a_0)x^2 + (20a_5 + a_1)x^3 \\ &+ \cdots + (n(n-1)a_n + a_{n-4})x^{n-2} + \cdots \end{aligned} \quad (9)$$

(8) Denkleminde x^{n-2} 'nin katsayısının a_{n-4} olduğuna dikkat edin. y ve ikinci türevi y'' (5) Denklemini sağlayacaklarsa, (9) Denkleminin sağ tarafındaki x 'in kuvvetlerinin katsayılarının her biri sıfır olmalıdır:

$$2a_2 = 0, \quad 6a_3 = 0, \quad 12a_4 + a_0 = 0, \quad 20a_5 + a_1 = 0. \quad (10)$$

$n \geq 4$ için,

$$n(n-1)a_n + a_{n-4} = 0 \quad (11)$$

dır. (6) Denkleminden

$$a_0 = y(0) \quad a_1 = y'(0)$$

olduğunu görebiliriz. Diğer bir deyişle, serinin ilk iki katsayısı y ve y' 'nin $x = 0$ 'daki değerleridir. (10)'daki denklemler ve (11)'deki tekrarlamalı formülü bütün katsayıları a_0 ve a_1 cinsinden hesaplamamızı sağlar.

(10)'daki denklemlerden ilk ikisi

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0$$

verir. (11) Denklemi $a_{n-4} = 0$ ise, $a_n = 0$ olacağını gösterir, dolayısıyla

$$a_6 = 0, \quad a_7 = 0, \quad a_{10} = 0, \quad a_{11} = 0$$

ve her $n = 4k + 2$ veya $4k + 3$ olduğunda, $a_n = 0$ olur. Diğer katsayılar için

$$a_n = \frac{-a_{n-4}}{n(n-1)}$$

buluruz, böylece

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{-a_0}{4 \cdot 3}, & a_8 &= \frac{-a_4}{8 \cdot 7} = \frac{a_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} \\ a_{12} &= \frac{-a_8}{11 \cdot 12} = \frac{-a_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} a_5 &= \frac{-a_1}{5 \cdot 4}, & a_9 &= \frac{-a_5}{9 \cdot 8} = \frac{a_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} \\ a_{13} &= \frac{-a_9}{12 \cdot 13} = \frac{-a_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13} \end{aligned}$$

olur.

Yani cevap en iyi olarak iki farklı serinin toplamı biçiminde ifade edilir—biri a_0 ile, diğeri a_1 ile çarpılmış olarak.

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{x^{12}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} + \cdots \right) \\ + a_1 \left(x - \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \frac{x^9}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} - \frac{x^{13}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13} + \cdots \right)$$

İki seri de, oran testiyle görüleceği gibi, her x için mutlak yakınsaktır. ■

Elemanter Olmayan İntegralleri Hesaplamak

Taylor serileri elemanter olmayan integralleri seriler cinsinden ifade etmekte kullanılabilir. $\int \sin x^2 dx$ gibi integraller ışığın kırılması incelemelerinde ortaya çıkarlar.

ÖRNEK 5 $\int \sin x^2 dx$ 'i bir kuvvet serisi olarak ifade edin.

Çözüm $\sin x$ serisinden

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} - \cdots$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$\int \sin x^2 dx = C + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \frac{x^{19}}{19 \cdot 9!} - \cdots$$

olur. ■

ÖRNEK 6 Bir Belirli İntegrali Bulmak

$\int_0^1 \sin x^2 dx$ 'i 0.001'den küçük bir hatayla bulun.

Çözüm Örnek 5'teki belirsiz integralden

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} - \frac{1}{15 \cdot 7!} + \frac{1}{19 \cdot 9!} - \cdots$$

bulunur. Seri alternedir. Deneyerek

$$\frac{1}{11 \cdot 5!} \approx 0.00076$$

teriminin sayısal olarak 0.001'den küçük olan ilk terim olduğunu buluruz. Bundan önce gelen iki terimin toplamı

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} \approx 0.310$$

verir. İki terim daha alırsak, 10^{-6} 'dan daha küçük bir hatayla

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx 0.310268$$

tahmininde bulunabilirdik. Bundan sadece bir terim daha fazla alarak, 1.08×10^{-9} civarında bir hatayla

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} + \frac{1}{6894720} \approx 0.310268303,$$

buluruz. Yamuk kuralındaki hata formülüyle bu hassaslığı garantilemek 8.000 alt aralık gerektirirdi. ■

Arktanjanlar

Bölüm 11.7, Örnek 5'te $\tan^{-1} x$ serisini, türev alıp,

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

bularak ve integre edip

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

elde ederek bulmuştuk. Ancak, bu sonucun dayandığı terim terime integrasyon teoremini ispatlamadık. Şimdi bu seriyi, yeniden,

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} \quad [12]$$

sonlu formülünün iki tarafını da integre ederek bulacağız. Burada son terim, kalan terimleri, ilk terimi $a = (-1)^{n+1} t^{2n+2}$ ve oranı $r = -t^2$ olan bir geometrik seri olarak toplamaktan gelir. (12) Denkleminin iki tarafını da $t = 0$ 'dan $t = x$ 'e kadar integre etmek

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x).$$

verir. Burada

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

ile verilmektedir. İntegrandın paydası 1'e eşit veya 1'den daha büyüktür; dolayısıyla

$$|R_n(x)| \leq \int_0^{|x|} t^{2n+2} dt = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

olur. $|x| \leq 1$ ise, $n \rightarrow \infty$ iken, bu eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra yaklaşır. Dolayısıyla, $|x| \leq 1$ ise, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ olur ve

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1. \quad [13]$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1$$

buluruz. $\tan^{-1} x$ 'in yüksek mertebeden türevlerinin formülleri uygun şekilde düzenlenebilir olmadıklarından, doğrudan Taylor serisini bulmak yerine bu yolu takip ettik. (13) denkleminde $x = 1$ alırsak, **Leibniz formülünü** elde ederiz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots$$

Seri çok yavaş yakınsadığından fazla sayıda ondalık basamak hassasiyeti ile π 'ye yaklaşımlarda kullanılmamaktadır. x 'in sıfıra yakın değerlerinde $\tan^{-1} x$ 'in serisi çok daha hızlı yakınsamaktadır. Bu nedenden dolayı, π 'yi hesaplamak için $\tan^{-1} x$ 'in serisini kullananlar çeşitli trigonometrik özdeşlikler kullanırlar.

Örneğin,

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \beta = \tan^{-1} \frac{1}{3},$$

ise

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$$

ve

$$\frac{\pi}{4} = \alpha + \beta = \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3}$$

olur. Şimdi, (13) Denklemi $x = 1/2$ ile $\tan^{-1}(1/2)$ 'yi ve $x = 1/3$ ile $\tan^{-1}(1/3)$ 'ü hesaplamakta kullanılabilir. Bu sonuçların toplamının 4 ile çarpımı π 'yi verir.

Belirsiz Formları Hesaplamak

Bazen belirsiz formları, içerilen fonksiyonları Taylor serisi olarak ifade ederek hesaplayabiliriz.

ÖRNEK 7 Kuvvet Serisi Kullanılan Limitler

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

limitini hesaplayın.

Çözüm $\ln x$ 'i $(x-1)$ 'in kuvvetleri cinsinden bir Taylor serisi ile temsil ederiz. Bu, $\ln x$ 'in $x = 1$ 'de ürettiği Taylor serisini doğrudan hesaplayarak veya Bölüm 11.7, Örnek 6'daki $\ln x$ serisinde x yerine $x - 1$ yazarak yapılabilir. Her iki yoldan da,

$$\ln x = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \cdots$$

elde ederiz ve buradan

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{2}(x - 1) + \cdots \right) = 1$$

buluruz. ■

ÖRNEK 8 Kuvvet Serisi Kullanılan Limitler

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$$

limitini hesaplayın.

Çözüm x^5 'li terime kadar $\sin x$ ve $\tan x$ 'in Taylor serileri

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

ile verilir. Buradan

$$\sin x - \tan x = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{8} - \dots = x^3 \left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \dots \right)$$

ve

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \dots \right) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

$\lim_{x \rightarrow 0} ((1/\sin x) - (1/x))$ 'i hesaplamak için seri kullanırsak, sadece limiti bulmakla kalmaz, aynı zamanda $\csc x$ için bir yaklaşım formülü keşfederiz.

ÖRNEK 9 $\csc x$ İçin Yaklaşım Formülü

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

limitini hesaplayın.

Çözüm

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} &= \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)}{x \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)} \\ &= \frac{x^3 \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots \right)}{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \dots \right)} = x \frac{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \dots} \end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \frac{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \dots} \right) = 0$$

olur. Sağdaki bölümden, $|x|$ küçük ise,

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \approx x \cdot \frac{1}{3!} = \frac{x}{6} \quad \text{veya} \quad \csc x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{6}$$

olacağını görürüz.

TABLO 11.1 Sık Kullanılan Taylor Serileri

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, & |x| < 1 \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, & |x| < 1 \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, & |x| < \infty \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, & |x| < \infty \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, & |x| < \infty \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, & -1 < x \leq 1 \\ \ln \frac{1+x}{1-x} &= 2 \tanh^{-1} x = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, & |x| < 1 \\ \tan^{-1} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, & |x| \leq 1\end{aligned}$$

Binom Serileri

$$\begin{aligned}(1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^k}{k!} + \cdots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, & |x| < 1\end{aligned}$$

Burada

$$k \geq 3 \text{ için } \binom{m}{1} = m, \quad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!}, \quad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$$

ile verilir.

Not: Binom serilerini kapalı olarak yazmak için, $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$ verecek şekilde, $\binom{m}{0}$ 'ı 1 olarak tanımlamak ve $x^0 = 1$ almak (genellikle dışlanan $x = 0$ durumunda bile) alışkanlık haline gelmiştir. m pozitif bir tamsayıysa, seri x^m 'de kesilir ve sonuç her x için yakınsak olur.

ALİŞTIRMALAR 11.10**Binom Serileri**

1–10 alıştırmalarındaki fonksiyonların Binom serilerinin ilk dört terimini bulun.

1. $(1+x)^{1/2}$
2. $(1+x)^{1/3}$
3. $(1-x)^{-1/2}$
4. $(1-2x)^{1/2}$
5. $\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-2}$
6. $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2}$

7. $(1+x^3)^{-1/2}$

8. $(1+x^2)^{-1/3}$

9. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}$

10. $\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1/3}$

11–14 alıştırmalarındaki fonksiyonların Binom serilerini bulun.

11. $(1+x)^4$

12. $(1+x^2)^3$

13. $(1 - 2x)^3$

14. $\left(1 - \frac{x}{2}\right)^4$

Başlangıç Değer Problemleri

15–32 alıştırmalarında başlangıç değer problemlerinin seri çözümlerini bulun.

15. $y' + y = 0$, $y(0) = 1$ 16. $y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$
 17. $y' - y = 1$, $y(0) = 0$ 18. $y' + y = 1$, $y(0) = 2$
 19. $y' - y = x$, $y(0) = 0$ 20. $y' + y = 2x$, $y(0) = -1$
 21. $y' - xy = 0$, $y(0) = 1$ 22. $y' - x^2y = 0$, $y(0) = 1$
 23. $(1 - x)y' - y = 0$, $y(0) = 2$
 24. $(1 + x^2)y' + 2xy = 0$, $y(0) = 3$
 25. $y'' - y = 0$, $y'(0) = 1$ ve $y(0) = 0$
 26. $y'' + y = 0$, $y'(0) = 0$ ve $y(0) = 1$
 27. $y'' + y = x$, $y'(0) = 1$ ve $y(0) = 2$
 28. $y'' - y = x$, $y'(0) = 2$ ve $y(0) = -1$
 29. $y'' - y = -x$, $y'(2) = -2$ ve $y(2) = 0$
 30. $y'' - x^2y = 0$, $y'(0) = b$ ve $y(0) = a$
 31. $y'' + x^2y = x$, $y'(0) = b$ ve $y(0) = a$
 32. $y'' - 2y' + y = 0$, $y'(0) = 1$ ve $y(0) = 0$

Yaklaşımlar ve Elemanter Olmayan İntegraller

T 33–36 alıştırmalarında, integralin değerini büyüklüğü 10^{-3} 'ten küçük bir hatayla bulmak için seri kullanın. (Yanıt bölümü integrallerin değerlerini 5 ondalık basamağa yuvarlanmış olarak verir.)

33. $\int_0^{0.2} \sin x^2 dx$

34. $\int_0^{0.2} \frac{e^{-x} - 1}{x} dx$

35. $\int_0^{0.1} \frac{1}{\sqrt{1 + x^4}} dx$

36. $\int_0^{0.25} \sqrt[3]{1 + x^2} dx$

T 37–40 alıştırmalarında, integralin değerini büyüklüğü 10^{-8} 'den küçük bir hatayla bulmak için seri kullanın. (Yanıt bölümü integrallerin değerlerini 10 ondalık basamağa yuvarlanmış olarak verir.)

37. $\int_0^{0.1} \frac{\sin x}{x} dx$

38. $\int_0^{0.1} e^{-x^2} dx$

39. $\int_0^{0.1} \sqrt{1 + x^4} dx$

40. $\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$

41. $\int_0^1 \cos t^2 dt$ integralinde $\cos t^2$ 'ye $1 - \frac{t^4}{2} + \frac{t^8}{4!}$ yaklaşımı kullanılırsa, hatayı tahmin edin.

42. $\int_0^1 \cos \sqrt{t} dt$ integralinde $\cos \sqrt{t}$ 'ye $1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4!} - \frac{t^3}{6!}$ yaklaşımı kullanılırsa, hatayı tahmin edin.

43–46 alıştırmalarında, verilen aralıkta büyüklüğü 10^{-3} 'ten küçük bir hatayla $F(x)$ 'e yaklaşımda bulunan bir polinom bulun.

43. $F(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$, $[0, 1]$

44. $F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$, $[0, 1]$

45. $F(x) = \int_0^x \tan^{-1} t dt$, (a) $[0, 0.5]$ (b) $[0, 1]$

46. $F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1 + t)}{t} dt$, (a) $[0, 0.5]$ (b) $[0, 1]$

Belirsiz Formlar

47–56 alıştırmalarında limitleri serilerle hesaplayın.

47. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + x)}{x^2}$

48. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

49. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t - (t^2/2)}{t^4}$

50. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta - \theta + (\theta^3/6)}{\theta^5}$

51. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \tan^{-1} y}{y^3}$

52. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} y - \sin y}{y^3 \cos y}$

53. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(e^{-1/x^2} - 1)$

54. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1) \sin \frac{1}{x + 1}$

55. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{1 - \cos x}$

56. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\ln(x - 1)}$

Teori ve Örnekler

57. $\ln(1 + x)$ 'in Taylor serisinde x yerine $-x$ yazarak $\ln(1 - x)$ serisini bulun. Sonra bunu $\ln(1 + x)$ 'in Taylor serisinden çıkararak, $|x| < 1$ için,

$$\ln \frac{1 + x}{1 - x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right).$$

olduğunu gösterin.

58. $\ln(1.1)$ 'i büyüklüğü 10^{-8} 'den küçük bir hatayla bulmak için $\ln(1 + x)$ 'in Taylor serisinde kaç terim almalısınız? Yanıtınızı açıklayın.

59. Alterne Seriler Tahmin Teoremine göre, $\pi/4$ 'ü büyüklüğü 10^{-3} 'ten küçük bir hatayla bulduğunuzdan emin olmak için $\tan^{-1} 1$ 'in Taylor serisinin kaç terimini almanız gerekir? Yanıtınızı açıklayın.

60. $f(x) = \tan^{-1} x$ 'in Taylor serisinin $|x| > 1$ için ıraksadığını gösterin.

T 61. π 'yi hesaplamak

$$\pi = 48 \tan^{-1} \frac{1}{18} + 32 \tan^{-1} \frac{1}{57} - 20 \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

denkleminin sağ tarafındaki her terimi büyüklüğü 10^{-6} 'dan küçük bir hatayla hesaplamak için $\tan^{-1} x$ 'in Taylor serisinin kaç terimini almanız gerekir? Bunun tersine, $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) \pi^2/6$ 'ya o kadar yavaş yakınsar ki, 50 terim bile iki ondalık basamak hassaslık vermez.

62. $\tan t$ 'nin Taylor serisinin sıfırdan farklı ilk üç terimini 0'dan x 'e kadar integre ederek, $\ln \sec x$ 'in Taylor serisinin ilk üç terimini elde edin.

63. a. $\sin^{-1} x$ 'in Taylor serisinin sıfırdan farklı ilk dört terimini üretmek için Binom serisi ve

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = (1 - x^2)^{-1/2}$$

eşitliğini kullanın. Yakınsaklık yarıçapı nedir?

- b. $\cos^{-1} x$ için bir seri (a) şıkkındaki sonucu kullanarak $\cos^{-1} x$ 'in Taylor serisinin sıfırdan farklı ilk beş terimini bulun.

64. a. $\sinh^{-1} x$ için bir seri

$$\sinh^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

fonksiyonunun Taylor serisinin sıfırdan farklı ilk dört terimini bulun.

- T** 65. (a) şıkkındaki serinin ilk üç terimini kullanarak $\sinh^{-1} 0.25$ 'i hesaplayın. Hesaplama hatasının büyüklüğünün bir üst sınırını bulun.
66. $-1/(1+x)$ serisinden $1/(1+x)^2$ 'in Taylor serisini elde edin.
67. $2x/(1+x^2)^2$ için bir seri bulmak üzere $1/(1+x)^2$ 'nin Taylor serisini kullanın.

- T** 68. π 'yi hesaplamak İngiliz matematikçi Wallis

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \dots}.$$

formülünü keşfetti. Bu formülle π 'yi 2 ondalık basamak hassaslıkla bulun.

- T** 69. Alıştırma 57'deki formülü kullanarak $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ için bir doğal logaritma, $\ln n$, tablosu oluşturun fakat, $\ln 4 = 2 \ln 2$, $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$, $\ln 8 = 3 \ln 2$, $\ln 9 = 2 \ln 3$ ve $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$ bağıntılarından yararlanarak işi çok az logaritmanın serisini hesaplamaya indirgeyin. Alıştırma 57'de aşağıdaki değerleri yerine koyarak işe başlayın:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{13}$$

69. $\sin^{-1} x$ için bir seri $(1-x^2)^{-1/2}$ 'nin binom serisini integre ederek, $|x| < 1$ için aşağıdaki eşitliği gösterin.

$$\sin^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

70. $|x| > 1$ için $\tan^{-1} x$ serisi.

$$\tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots, \quad x > 1$$

$$\tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots, \quad x < -1$$

serilerini

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{1+(1/t^2)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^6} - \frac{1}{t^8} + \dots$$

serisini birinci durumda x 'ten ∞ 'a, ikincisindeyse $-\infty$ 'dan x 'e kadar integre ederek bulun.

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1}(2/n^2)$ 'nin değeri

- a. İki açının farkının tanjantını kullanarak

$$\tan(\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1}(n-1)) = \frac{2}{n^2}$$

olduğunu gösterin.

- b.

$$\sum_{n=1}^N \tan^{-1} \frac{2}{n^2} = \tan^{-1}(N+1) + \tan^{-1} N - \frac{\pi}{4}$$

olduğunu gösterin.

- c. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1} \frac{2}{n^2}$ değerini bulun.

11.11

Fourier Serileri

TARİHSEL BİYOGRAFI

Jean-Baptiste Joseph Fourier

(1766–1830)

Taylor serilerinin bir f fonksiyonuna polinomlarla yaklaşmak için nasıl kullanılabileceğini gördük. Taylor polinomları özel bir $x = a$ noktası yakınlarında f fonksiyonuna uyan bir elbise verir, fakat uzak noktalarda yaklaşımdaki hata büyük olabilir. Geniş aralıklar üzerinde çoğu kez iyi yaklaşımlar veren ve Taylor polinomlarının işe yaramadığı süreksiz fonksiyonlarda çoğu kez işe yarayan başka bir yöntem vardır. Joseph Fourier tarafından tanıtılan bu yöntem sinüs ve kosinüs fonksiyonları toplamaları ile fonksiyonlara yaklaşır. Yöntem, radyo sinyalleri ve alternatif akım gibi periyodik fonksiyonları incelemek, ısı iletimi problemlerini çözmek ve bilimde ve mühendislikteki birçok başka problemi çözmek için çok elverişlidir.

Bir f fonksiyonuna $[0, 2\pi]$ aralığı üzerinde sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının bir toplamı ile yaklaşmak istediğimizi varsayın,

$$f_n(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots \\ + (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

veya toplam notasyonu ile

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1)$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n$ sabitleri için, $f_n(x)$ 'i $f(x)$ 'e “muhtemel en iyi” yaklaşım yapacak, değerler seçmek isteyebiliriz. “Muhtemel en iyi” kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

1. $f_n(x)$ ve $f(x)$, 0'dan 2π 'ye integre edildiklerinde aynı değeri verirler.
2. $f_n(x) \cos kx$ ve $f(x) \cos kx$, ($k = 1, \dots, n$) 0'dan 2π 'ye integre edildiklerinde aynı değeri verirler.
3. $f_n(x) \sin kx$ ve $f(x) \sin kx$, ($k = 1, \dots, n$) 0'dan 2π 'ye integre edildiklerinde aynı değeri verirler.

f_n üzerine toplam $2n + 1$ koşul koyuyoruz:

$$\int_0^{2\pi} f_n(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx, \\ \int_0^{2\pi} f_n(x) \cos kx dx = \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k = 1, \dots, n, \\ \int_0^{2\pi} f_n(x) \sin kx dx = \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, \dots, n.$$

Aşağıdaki şekilde devam ederek $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n$ katsayıları bütün bu koşullar sağlanacak şekilde seçilebilir. $\cos kx$ ve $\sin kx$ 'in $[0, 2\pi]$ üzerindeki integralleri $k \geq 1$ için sıfır olduğundan (1) Denkleminin iki tarafını 0'dan 2π 'ye integre etmek

$$\int_0^{2\pi} f_n(x) dx = 2\pi a_0$$

verir. Sadece a_0 sabit terimi f_n 'nin $[0, 2\pi]$ üzerindeki integraline katkıda bulunur. Benzer bir hesaplama bütün diğer terimler için uygulanır. (1) Denkleminin iki tarafını $\cos x$ ile çarpıp ve 0'dan 2π 'ye integre edersek

$$\int_0^{2\pi} f_n(x) \cos x dx = \pi a_1$$

elde ederiz. Bu,

$$\int_0^{2\pi} \cos px \cos qx dx = \pi$$

ile birlikte p, q ve m tamsayılar ve $p \neq q$ iken

$$\int_0^{2\pi} \cos px \cos qx dx = \int_0^{2\pi} \cos px \sin mx dx = \int_0^{2\pi} \sin px \sin qx dx = 0$$

olmasından elde edilir (9–13 alıştırmaları). (1) Denkleminin iki tarafını $\sin x$ ile çarpar ve 0'dan 2π 'ye integre edersek

$$\int_0^{2\pi} f_n(x) \sin x \, dx = \pi b_1.$$

elde ederiz.

$$\cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx$$

ile benzer tarzda devam ederek her defasında sıfırdan farklı sadece bir terim, sinüs kare ile veya kosinüs kare ile bir terim, elde ederiz. Özet olarak,

$$\int_0^{2\pi} f_n(x) \, dx = 2\pi a_0$$

$$\int_0^{2\pi} f_n(x) \cos kx \, dx = \pi a_k, \quad k = 1, \dots, n$$

$$\int_0^{2\pi} f_n(x) \sin kx \, dx = \pi b_k, \quad k = 1, \dots, n$$

f_n yerine f yazıldığında soldaki integraller aynı kalacak şekilde f_n 'yi seçeriz. Dolayısıyla bu eşitlikleri, f 'den $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n$ katsayılarını bulmak için kullanabiliriz:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx \quad (2)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, \dots, n \quad (4)$$

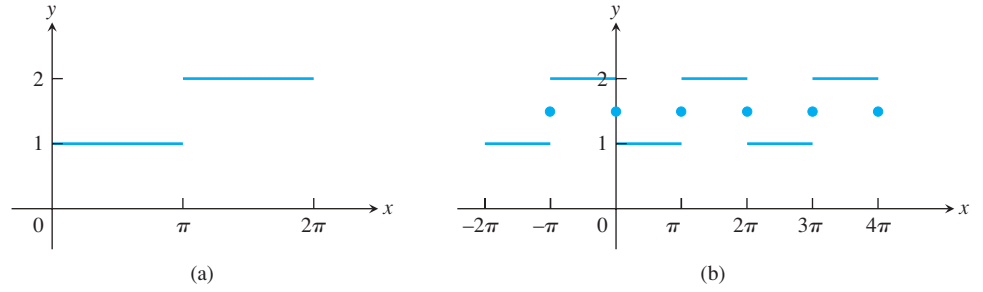
Bu katsayıları bulmak için gerekli tek koşul yukarıdaki integrallerin var olmasıdır. n 'yi sonsuza götürür ($n \rightarrow \infty$) ve bu kuralları bir sonsuz serinin katsayılarını elde etmek için kullanırsak sonuçta elde edilen toplama $f(x)$ 'in **Fourier serisi** denir

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (5)$$

ÖRNEK 1 Bir Fourier Serisi Açılımı Bulmak

Fourier serileri, Taylor serileri ile temsil edilemeyen bazı serileri temsil etmek için kullanılabilir. Örneğin Şekil 11.16a'da gösterilen f adım fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi \text{ ise} \\ 2, & \pi < x \leq 2\pi \text{ ise} \end{cases}$$



ŞEKİL 11.16 (a)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi \\ 2, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

adım fonksiyonu

(b) f 'nin Fourier serisinin grafiği periyodiktir ve her süreksizlik noktasındaki değeri $3/2$ dir (Örnek 1).

f 'nin Fourier serisinin katsayıları (2), (3) ve (4) Denklemleri kullanılarak hesaplanır.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} 1 dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2 dx \right) = \frac{3}{2} \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \cos kx dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2 \cos kx dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{\sin kx}{k} \right]_0^{\pi} + \left[\frac{2 \sin kx}{k} \right]_{\pi}^{2\pi} \right) = 0, \quad k \geq 1 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin kx dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2 \sin kx dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} + \left[-\frac{2 \cos kx}{k} \right]_{\pi}^{2\pi} \right) \\ &= \frac{\cos k\pi - 1}{k\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{k\pi}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$a_0 = \frac{3}{2}, \quad a_1 = a_2 = \cdots = 0,$$

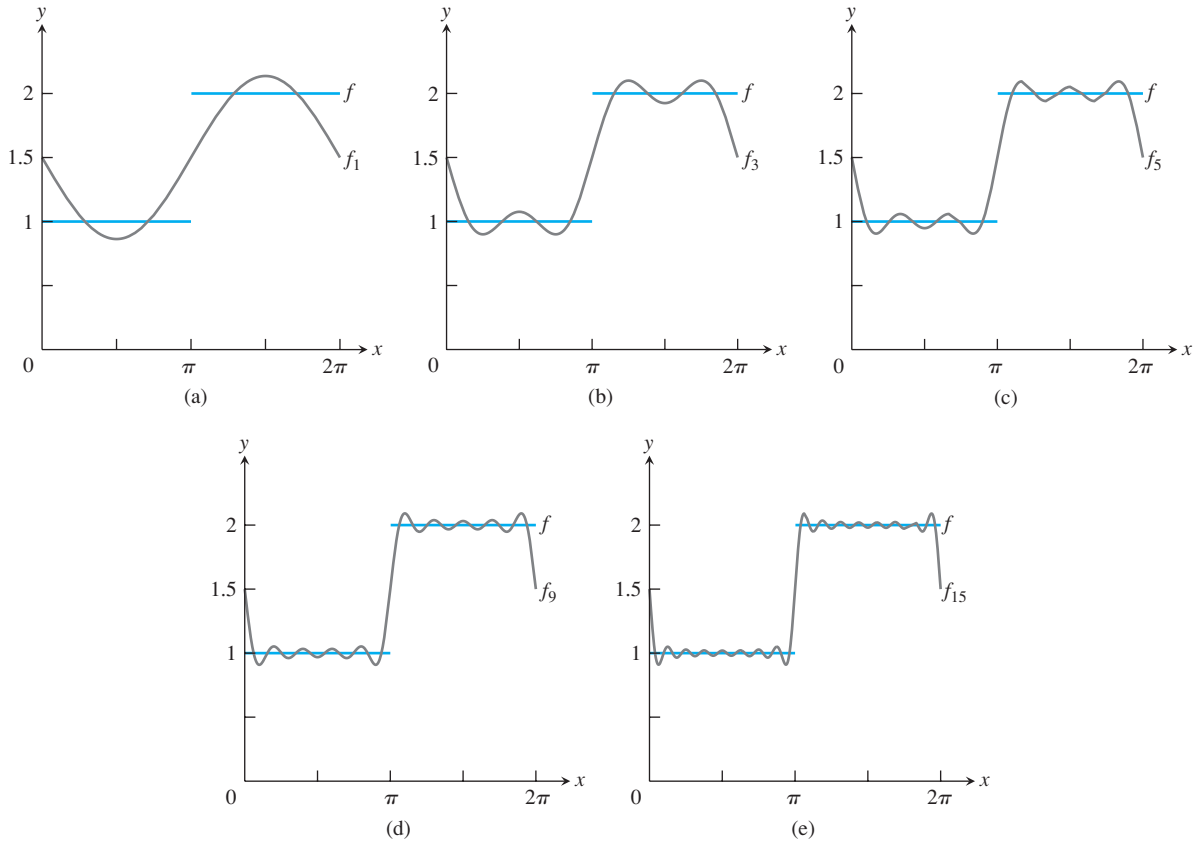
ve

$$b_1 = -\frac{2}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = -\frac{2}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = -\frac{2}{5\pi}, \quad b_6 = 0, \dots$$

bulunur. Fourier serisi

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right).$$

dir. Şuna dikkat edin; $f(x)$ fonksiyonunun 1'den 2'ye sıçradığı $x = \pi$ 'de bütün sinüs terimleri ortadan kalkar ve serinin değeri olarak $3/2$ kalır. Bu, $f(\pi) = 1$ olduğundan f 'nin π 'deki değeri değildir. Fourier serisi ayrıca $x = 0$ 'da ve $x = 2\pi$ 'de de $3/2$ değerini alır. Aslında, Fourier serisindeki bütün terimler periyodiktir, 2π periyotlu, ve serinin $x + 2\pi$ 'deki değeri x 'teki değeri ile aynıdır. Elde etmiş olduğumuz seri, tanım kümesi bütün reel sayılar olan ve 2π uzunluğundaki her aralıkta tekrarlanan bir kalıpla Şekil 11.16b'de grafiği çizilen periyodik fonksiyonu temsil etmektedir. Fonksiyon, $x = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ de sıçrama yapar ve bu noktadaki değeri, her iki taraftan tek taraflı limitlerin ortalama değeri olan $3/2$ 'dir. f fonksiyonunun Fourier serisinin yakınsaklığı Şekil 11.17'de gösterilmiştir. ■



ŞEKİL 11.17 Örnek 1'deki $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi \text{ ise} \\ 2, & \pi < x \leq 2\pi \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun f_1, f_3, f_5, f_9 ve f_{15} Fourier yaklaşım fonksiyonları.

Fourier Serilerinin Yakınsaklığı

Taylor serileri bir fonksiyon ve türevlerinin tek bir $x = a$ noktasındaki değerlerinden hesaplanır ve Örnek 1'deki f gibi süreksiz fonksiyonların davranışlarını yansıtamazlar. Bir Fourier serisinin böyle fonksiyonları temsil etmekte kullanılabilmesinin nedeni, bir fonksiyonun Fourier serisinin bazı *integrallerin varlığına* dayanmasıdır. Oysa Taylor serisi bir fonksiyonun tek bir nokta civarındaki türevlerine dayanmaktadır. Bir fonksiyon süreksiz olsa bile integrali var olabilir.

Fourier serilerini oluşturmak için kullanılan katsayılar tam olarak, f' 'ye f_n ile yaklaşımdaki hatanın karesinin integralini minimize edecek şekilde seçilmesi gereklilerdir. Yani, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n$ katsayılarını söylediğimiz gibi seçmekle

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - f_n(x)]^2 dx$$

integrali minimize edilir. Taylor serileri bir nokta civarında bir fonksiyona ve türevlerine yaklaşmak için kullanışlı iken, Fourier serileri bir aralık üzerine dağılmış bir hatayı minimize ederler.

Fourier serilerinin yakınsaklığı ile ilgili bir sonucu ispatsız ifade ediyoruz. Bir fonksiyonun bir I aralığı üzerinde sonlu sayıda süreksizlik noktası varsa ve bu noktalarda her iki taraftan tek-yanlı limitler mevcut ise fonksiyon I aralığı üzerinde **parçalı sürekli** dir. (Bölüm 5, Ek-Alıştırmalar 11-18'e bakın.)

TEOREM 24 $f(x)$, aralığında f ve f' 'nin parçalı sürekli olduğu bir fonksiyon olsun. Bu durumda f , sürekli olduğu bütün noktalarda kendi Fourier serisine eşittir. f' 'nin süreksiz olduğu bir noktasında Fourier serisi

$$\frac{f(c^+) + f(c^-)}{2}$$

değerine yakınsar. Burada $f(c^+)$ ve $f(c^-)$ değerleri c 'deki tek yanlı limitlerdir.

ALİŞTIRMALAR 11.11

Fourier Serileri Bulmak

1-8 alıştırmalarında, verilen fonksiyonun Fourier serisini bulun. Her bir fonksiyonu çizin.

1. $f(x) = 1 \quad 0 \leq x \leq 2\pi$.
2. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi \\ -1, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi \\ x - 2\pi, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$
5. $f(x) = e^x \quad 0 \leq x \leq 2\pi$.

6. $f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$
7. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$
8. $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq \pi \\ -x, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

Teori and Örnekler

9-13 alıştırmalarındaki sonuçları gerçekleyin. p ve q pozitif tam sayılardır.

9. $\int_0^{2\pi} \cos px \, dx = 0$ her p için

$$10. \int_0^{2\pi} \sin px \, dx = 0 \text{ her } p \text{ için}$$

$$11. \int_0^{2\pi} \cos px \cos qx \, dx = \begin{cases} 0, & p \neq q \text{ ise} \\ \pi, & p = q \text{ ise} \end{cases}$$

(İpucu: $\cos A \cos B = (1/2) [\cos (A + B) + \cos (A - B)]$.)

$$12. \int_0^{2\pi} \sin px \sin qx \, dx = \begin{cases} 0, & p \neq q \text{ ise} \\ \pi, & p = q \text{ ise} \end{cases}$$

(İpucu: $\sin A \sin B = (1/2) [\cos (A - B) - \cos (A + B)]$.)

$$13. \int_0^{2\pi} \sin px \cos qx \, dx = 0 \text{ her } p \text{ ve } q \text{ için}$$

(İpucu: $\sin A \cos B = (1/2) [\sin (A + B) + \sin (A - B)]$.)

14. **Fonksiyonların toplamalarının Fourier Serileri** f ve g Teorem 24'ün koşullarını sağlayan iki fonksiyon ise $f + g$ 'nin $[0, 2\pi]$ 'deki Fourier serisi f 'nin Fourier serisi ile g 'nin Fourier serisinin toplamı mıdır? Cevabınızı açıklayın.

15. **Terim-terime türetme**

a. Örnek 3'teki $f(x)$ 'in Fourier serisinin $0 < x < 2\pi$ iken $f(x)$ 'e yakınsadığını göstermek için Teorem 24'ü kullanın.

b. $f'(x) = 1$ olmasına rağmen, (a)'daki Fourier serisinin terim-terime türetilmesi ile elde edilen serinin ıraksak olduğunu gösterin.

16. Örnek 4'te tanımlanan Fourier serisinin Değerini bulmak için Teorem 24'ü kullanın ve $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ olduğunu gösterin.

Bölüm 11

Bölüm Tekrar Soruları

- Sonsuz bir dizi nedir? Böyle bir dizinin yakınsaması veya ıraksaması ne anlama gelir? Örnekler verin.
- Azalmayan bir dizi nedir? Hangi koşullar altında böyle bir dizinin limiti vardır? Örnekler verin.
- Dizilerin limitlerini hesaplamak için hangi teoremler vardır? Örnekler verin.
- Hangi teorem bazen bir dizinin limitini hesaplamak için l'Hôpital kuralını kullanmamızı sağlar? Bir örnek verin.
- Diziler ve serilerle çalışırken, hangi altı dizi limiti karşımıza çıkabilir?
- Sonsuz bir seri nedir? Böyle bir serinin yakınsaması veya ıraksaması ne anlama gelir? Örnekler verin.
- Bir geometrik seri nedir? Böyle bir seri ne zaman yakınsar veya ıraksar? Yakınsadığında, toplamı nedir? Örnekler verin.
- Geometrik serilerin dışında, hangi yakınsak ve ıraksak serileri biliyorsunuz?
- İraksaklık için n . Terim Testi nedir? Testin altında hangi fikir yatar?
- Yakınsak serilerin terim-terime toplamaları ve farkları ile ıraksak ve yakınsak serilerin bir sabitle çarpımı hakkında ne söylenebilir?
- Bir yakınsak seriye sonlu sayıda terim eklerseniz ne olur? Peki ya ıraksak bir seriye? Yakınsak veya ıraksak bir seriden sonlu sayıda terim çıkarırsanız ne olur?
- Bir seriyi nasıl yeniden indisersiniz? Bunu neden yapmak istersiniz?
- Hangi koşullar altında terimleri negatif olmayan sonsuz bir seri yakınsar veya ıraksar? Neden terimleri negatif olmayan serilerle çalışıyoruz?
- İntegral Testi nedir? Arkasındaki neden nedir? Kullanımına bir örnek verin.
- p -serileri ne zaman yakınsar veya ıraksar? Nereden biliyorsunuz? Yakınsak ve ıraksak p -serilerine örnekler verin.
- Doğrudan Karşılaştırma Testi ve Limit Karşılaştırma Testi nedir? Bu testlerin altında yatan neden nedir? Kullanımlarına örnekler verin.
- Oran ve Kök Testleri nedir? Her zaman yakınsaklığı veya ıraksaklığı belirleyecek bilgiyi verirler mi? Örnekler verin.
- Alterne seri nedir? Böyle bir serinin yakınsaklığını belirlemek için hangi teorem vardır?
- Bir alterne serinin toplamını bulurken yapılan hatayı serinin kısmi toplamlarından biriyle nasıl belirlersiniz? Belirlemenin altında yatan neden nedir?
- Mutlak yakınsaklık ve koşullu yakınsaklık nedir? İkisi arasındaki ilişki nedir?
- Mutlak yakınsak veya koşullu yakınsak bir serinin terimlerini yeniden düzenleme hakkında ne biliyorsunuz? Örnek verin.
- Bir kuvvet serisi nedir? Bir kuvvet serisinin yakınsaklığını nasıl test edersiniz? Olası sonuçlar nedir?
- Aşağıdakiler hakkındaki temel bilgiler nedir?
 - Kuvvet serilerinin terim-terime türevinin alınması?
 - Kuvvet serilerinin terim-terim integrasyonu?
 - Kuvvet serilerinin çarpımı?
 örnekler verin.
- Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ 'da ürettiği Taylor serisi nedir? Seriyi inşa etmek için f hakkında ne bilmeniz gerekir? Bir örnek verin.
- Maclaurin serisi nedir?
- Bir Taylor serisi her zaman üretildiği fonksiyona yakınsar mı? Açıklayın.
- Taylor polinomları nedir? Yararları nedir?

28. Taylor formülü nedir? Fonksiyonlara yaklaşım yapmak için Taylor polinomlarını kullanmaktan gelen hata hakkında ne söyler? Özel olarak, Taylor formülü bir lineerizasyon ve bir kuadratik yaklaşımdaki hata için ne söyler?
29. Binom serisi nedir? Hangi aralıkta yakınsar? Nasıl kullanılır?
30. Bazen kuvvet serilerini başlangıç değer problemlerini çözmek için nasıl kullanırsınız?
31. Bazen, elemanter olmayan integrallerin değerlerini tahmin etmek için kuvvet serilerini nasıl kullanırsınız?

32. $1/(1-x)$, $1/(1+x)$, e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\ln[(1+x)/(1-x)]$ ve $\tan^{-1}x$ 'in Taylor serileri nedir? Bu seriler yerine kısmi toplamalarını yazmanın getireceği hatayı nasıl tahmin edersiniz?
33. Fourier serisi nedir? $[0, 2\pi]$ aralığında tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonu için a_0 , a_1 , a_2 , ... ve b_1 , b_2 , ... Fourier katsayılarını nasıl hesaplırsınız?
34. f ve f' $[0, 2\pi]$ üzerinde parçalı sürekli iken $f(x)$ 'in Fourier serisinin yakınsaklığı hakkındaki teoremi ifade edin.

Bölüm 11

Problemler

Yakınsak veya İraksak Diziler

1–18 problemlerinde n .inci terimleri görülen dizilerin hangileri yakınsar, hangileri ıraksar? Yakınsak her dizinin limitini bulun.

1. $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$
2. $a_n = \frac{1 - (-1)^n}{\sqrt{n}}$
3. $a_n = \frac{1 - 2^n}{2^n}$
4. $a_n = 1 + (0.9)^n$
5. $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$
6. $a_n = \sin n\pi$
7. $a_n = \frac{\ln(n^2)}{n}$
8. $a_n = \frac{\ln(2n+1)}{n}$
9. $a_n = \frac{n + \ln n}{n}$
10. $a_n = \frac{\ln(2n^3+1)}{n}$
11. $a_n = \left(\frac{n-5}{n}\right)^n$
12. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$
13. $a_n = \sqrt[n]{\frac{3^n}{n}}$
14. $a_n = \left(\frac{3}{n}\right)^{1/n}$
15. $a_n = n(2^{1/n} - 1)$
16. $a_n = \sqrt[n]{2n+1}$
17. $a_n = \frac{(n+1)!}{n!}$
18. $a_n = \frac{(-4)^n}{n!}$

Yakınsak Seriler

19–24 problemlerindeki serilerin toplamalarını bulun.

19. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)(2n-1)}$
20. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2}{n(n+1)}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{(3n-1)(3n+2)}$
22. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{-8}{(4n-3)(4n+1)}$
23. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{4^n}$

Yakınsak veya İraksak Seriler

25–40 problemlerindeki serilerin hangileri mutlak yakınsak, hangileri koşullu yakınsak ve hangileri ıraksaktır? Yanıtlarınızı açıklayın.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-5}{n}$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3}$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$
30. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$
31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$
32. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{\ln(\ln n)}$
33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$
34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n^2}{n^3+1}$
35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$
36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2+1)}{2n^2+n-1}$
37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$
38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n 3^n}{n^n}$
39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$
40. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

Kuvvet Serileri

41–50 problemlerinde, (a) serinin yakınsaklık yarıçapı ve aralığını bulun. Sonra serinin (b) mutlak yakınsak ve (c) koşullu yakınsak olduğu x değerlerini belirleyin.

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n3^n}$
42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n-2}}{(2n-1)!}$
43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(3x-1)^n}{n^2}$
44. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(2x+1)^n}{(2n+1)2^n}$
45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$
46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

$$47. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^{2n-1}}{3^n}$$

$$48. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^{2n+1}}{2n+1}$$

$$49. \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{csch} n)x^n$$

$$50. \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{coth} n)x^n$$

Maclaurin Serisi

51–56 problemlerindeki serilerin her biri bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki Taylor serisinin belirli bir noktadaki değeridir. Hangi fonksiyon ve hangi nokta? Serinin toplamı nedir?

$$51. 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{4^n} + \cdots$$

$$52. \frac{2}{3} - \frac{4}{18} + \frac{8}{81} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{2^n}{n3^n} + \cdots$$

$$53. \pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$54. 1 - \frac{\pi^2}{9 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{81 \cdot 4!} - \cdots + (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{3^{2n}(2n)!} + \cdots$$

$$55. 1 + \ln 2 + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} + \cdots$$

$$56. \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{45\sqrt{3}} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)(\sqrt{3})^{2n-1}} + \cdots$$

57–64 problemlerindeki fonksiyonların $x = 0$ 'daki Taylor serilerini bulun.

$$57. \frac{1}{1-2x}$$

$$58. \frac{1}{1+x^3}$$

$$59. \sin \pi x$$

$$60. \sin \frac{2x}{3}$$

$$61. \cos(x^{5/2})$$

$$62. \cos \sqrt{5x}$$

$$63. e^{(\pi x/2)}$$

$$64. e^{-x^2}$$

Taylor Serileri

65–68 problemlerinde, f 'nin $x = a$ 'da ürettiği Taylor serisinin sıfırdan farklı ilk dört terimini bulun.

$$65. f(x) = \sqrt{3+x^2} \quad x = -1$$

$$66. f(x) = 1/(1-x) \quad x = 2$$

$$67. f(x) = 1/(x+1) \quad x = 3$$

$$68. f(x) = 1/x \quad x = a > 0$$

Başlangıç Değer Problemleri

69–76 Problemlerindeki başlangıç değer problemlerini çözmek için kuvvet serileri kullanın.

$$69. y' + y = 0, \quad y(0) = -1 \quad 70. y' - y = 0, \quad y(0) = -3$$

$$71. y' + 2y = 0, \quad y(0) = 3 \quad 72. y' + y = 1, \quad y(0) = 0$$

$$73. y' - y = 3x, \quad y(0) = -1 \quad 74. y' + y = x, \quad y(0) = 0$$

$$75. y' - y = x, \quad y(0) = 1 \quad 76. y' - y = -x, \quad y(0) = 2$$

Elemanter Olmayan İntegraller

77–80 Problemlerinde, integrallerin değerine büyüklüğü 10^{-8} 'den küçük bir hatayla yaklaşım yapmak için seri kullanın. (Yanıt bölümü integrallerin değerlerini 10 ondalık basamağa yuvarlanmış olarak verir.)

$$77. \int_0^{1/2} e^{-x^3} dx$$

$$78. \int_0^1 x \sin(x^3) dx$$

$$79. \int_0^{1/2} \frac{\tan^{-1} x}{x} dx$$

$$80. \int_0^{1/64} \frac{\tan^{-1} x}{\sqrt{x}} dx$$

Belirsiz Formlar

81–86 problemlerinde:

T a. Limiti hesaplamak için kuvvet serisi kullanın.

b. Hesabınızı desteklemek için bir grafik çizici kullanın.

$$81. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \sin x}{e^{2x} - 1}$$

$$82. \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{e^{\theta} - e^{-\theta} - 2\theta}{\theta - \sin \theta}$$

$$83. \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2 - 2 \cos t} - \frac{1}{t^2} \right)$$

$$84. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin h)/h - \cos h}{h^2}$$

$$85. \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 z}{\ln(1 - z) + \sin z}$$

$$86. \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{\cos y - \cosh y}$$

87. $\sin 3x$ 'in bir seri temsilini kullanarak,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{r}{x^2} + s \right) = 0.$$

olmasını sağlayacak r ve s değerlerini bulun.

88. a. Bölüm 11.10, Örnek 9'daki $\csc x \approx 1/x + x/6$ yaklaşımının $\sin x \approx 6x/(6+x^2)$ yaklaşımına yol açtığını gösterin.

T b. $f(x) = \sin x - x$ ve $g(x) = \sin x - (6x/(6+x^2))$ fonksiyonlarının grafiklerini karşılaştırarak $\sin x \approx x$ ve $\sin x \approx 6x/(6+x^2)$ yaklaşımlarının hassaslıklarını karşılaştırın. Bulduklarınızı tanımlayın.

Teori ve Örnekler

89. a.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{2n} - \sin \frac{1}{2n+1} \right)$$

serisinin yakınsadığını gösterin.

T b. Serinin toplamına yaklaşım yapmak için sinüslerin $n = 20$ 'ye kadar toplamının kullanılmasının getireceği hatanın büyüklüğünü bulun. Yaklaşım çok mu büyük, çok mu küçüktür? Yanıtınızı açıklayın.

90. a. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tan \frac{1}{2n} - \tan \frac{1}{2n+1} \right)$ serisinin yakınsadığını gösterin.

T b. Serinin toplamına yaklaşım yapmak için tanjanların $-\tan(1/41)$ 'e kadar toplamının kullanılmasının getireceği hatanın büyüklüğünü bulun. Yaklaşım çok mu büyük, çok mu küçüktür? Yanıtınızı açıklayın.

91. Aşağıdaki serinin yakınsaklık yarıçapını bulun.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} x^n.$$

92. Aşağıdaki serinin yakınsaklık yarıçapını bulun.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{4 \cdot 9 \cdot 14 \cdot \dots \cdot (5n-1)} (x-1)^n$$

93. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 - (1/n^2))$ serisinin n . kısmi toplamının bir kapalı-form formülünü bulun ve bunu kullanarak serinin yakınsaklığını veya iraksaklığını belirleyin.

94. Serinin n . kısmi toplamının $n \rightarrow \infty$ iken limitini bularak $\sum_{k=2}^{\infty} (1/(k^2 - 1))$ toplamını hesaplayın.

95. a. Aşağıdaki serinin yakınsaklık aralığını bulun.

$$y = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \dots \\ + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{(3n)!} x^{3n} + \dots$$

- b. Serinin tanımladığı fonksiyonun

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^a y + b$$

şeklinde bir diferansiyel denklemi sağladığını gösterin ve a ile b sabitlerini bulun.

96. a. $x^2/(1+x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisini bulun.

- b. Seri $x = 1$ 'de yakınsar mı? Açıklayın.

97. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ negatif olmayan sayıların yakınsak serileriye, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

98. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ negatif olmayan sayıların iraksak serileriye, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

99. $\{x_n\}$ dizisinin ve $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{k+1} - x_k)$ serisinin ikisinin de yakınsayacağını veya ikisinin de iraksayacağını ispatlayın.

100. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise ve her n için $a_n > 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/(1 + a_n))$ serisinin de yakınsayacağını gösterin.

101. (Bölüm 4.7, Alıştırma 27'nin devamı) Bölüm 4.7'deki Alıştırma 27'yi yaptıysanız, pratikte Newyon yönteminin $f(x) = (x-1)^{40}$ 'in kökünden, $x = 1$, yararlı bir tahminini veremeyecek kadar uzakta durduğunu görmüşsünüzdür. Yine de $x_0 \neq 1$ olan herhangi bir başlama değeri için, Newton yönteminin ürettiği yaklaşımların $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ dizisinin gerçekten 1'e yakınsadığını gösterin.

102. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 'nin aşağıdaki koşulları sağlayan pozitif sayılar olduklarını varsayın.

i. $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$;

ii. $a_2 + a_4 + a_8 + a_{16} + \dots$ serisi iraksar.

Aşağıdaki serinin iraksadığını gösterin.

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots$$

103. Problem 102'deki sonucu kullanarak

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

serisinin iraksadığını gösterin.

104. $\int_0^1 x^2 e^x dx$ 'in değerini çabuk bir şekilde tahmin etmek istediğinizi varsayın. Bunu yapmanın birkaç yolu vardır.

- a. $\int_0^1 x^2 e^x dx$ 'i tahmin etmek için $n = 2$ ile yamuk kuralını kullanın.

- b. $x^2 e^x$ 'in Taylor serisinin sıfırdan farklı ilk üç terimini yazarak, $x^2 e^x$ 'in dördüncü Taylor polinomu $P(x)$ 'i elde edin. $\int_0^1 P(x) dx$ için başka bir tahmin elde etmek üzere $\int_0^1 x^2 e^x dx$ 'i kullanın.

- c. $f(x) = x^2 e^x$ 'in ikinci türevi her $x > 0$ için pozitifdir. Bunun, (a) şıkında elde edilen yamuk kuralı tahmininin neden çok büyük olduğu sonucuna varmanızı sağladığını açıklayın. (İpucu: İkinci türev size bir fonksiyonun grafiği hakkında ne söyler? Bununla, bu grafiğin altında kalan alana yapılan yamuk yaklaşımının ilişkisi nedir?)

- d. $f(x) = x^2 e^x$ 'in bütün türevleri $x > 0$ için pozitifdir. Bunun neden $f(x)$ 'e $[0, 1]$ aralığında yapılan bütün Maclaurin polinom yaklaşımlarının çok küçük olduğu sonucuna varmanızı sağladığını açıklayın. (İpucu: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.)

- e. $\int_0^1 x^2 e^x dx$ 'i kısmi integrasyonla hesaplayın.

Fourier Serileri

105–108 problemlerindeki fonksiyonların Fourier serilerini bulun. Her fonksiyonu çizin.

105. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ 1, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

106. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 1, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

107. $f(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 \leq x \leq \pi \\ x - 2\pi, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

108. $f(x) = |\sin x|, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

Bölüm 11

Ek ve İleri Alıştırmalar

Yakınsaklık veya İraksaklık

1–4 alıştırmalarındaki formüllerle tanımlanan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serilerinin hangileri yakınsak, hangileri iraksaktır? Yanıtınızı açıklayın.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)^{n+(1/2)}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tan^{-1} n)^2}{n^2 + 1}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tanh n$
4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log_n(n!)}{n^3}$

5–8 alıştırmalarındaki formüllerle tanımlanan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serilerinin hangileri yakınsak, hangileri iraksaktır? Yanıtınızı açıklayın.

5. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)} a_n$

(İpucu: Birkaç terim yazarak, hangi çarpanların sadeleştiğini görün ve genelleştirin.)

6. $a_1 = a_2 = 7, \quad a_{n+1} = \frac{n}{(n-1)(n+1)} a_n \quad n \geq 2$ ise

7. $a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \quad n \geq 2$ ise

8. $a_n = 1/3^n \quad n$ tek ise, $a_n = n/3^n \quad n$ çift ise

Taylor Serilerinin Merkezlerini Seçmek

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Taylor formülü f 'nin x 'teki değerini f 'nin ve türevlerinin $x = a$ 'daki değerleri cinsinden ifade eder. Bundan dolayı, sayısal hesaplamalarda noktasının, f 'nin ve türevlerinin değerlerini bildiğimiz bir nokta olması gerekir. Ayrıca, a 'nın da f 'nin ilgilendiğimiz değerlerine, $(x-a)^{n+1}$ 'in kalanı ihmal edebileceğimiz kadar küçük olmasını sağlayacak şekilde yakın olmasını isteriz.

9–14 alıştırmalarında, fonksiyonu verilen nokta civarında temsil etmesi için hangi Taylor serisini seçersiniz? (Birden fazla yanıt olabilir.) Seçtiğiniz serinin sıfırdan farklı ilk dört terimini yazın.

9. $\cos x \quad x = 1$ civarında
10. $\sin x \quad x = 6.3$ civarında
11. $e^x \quad x = 0.4$ civarında
12. $\ln x \quad x = 1.3$ civarında
13. $\cos x \quad x = 69$ civarında
14. $\tan^{-1} x \quad x = 2$ civarında

Teori ve Örnekler

15. a ve $b, 0 < a < b$ olmak üzere sabitler olsun. $\{(a^n + b^n)^{1/n}\}$ dizisi yakınsar mı? Yakınsarsa, limiti nedir?

16. Aşağıdaki sonsuz serinin limitini bulun.

$$1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \frac{2}{10^7} + \frac{3}{10^8} + \frac{7}{10^9} + \dots$$

17. Aşağıdaki seriyi hesaplayın.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

- 18.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n+1)(2x+1)^n}$$

serisinin mutlak yakınsak olduğu bütün x değerlerini bulun.

19. **Euler sabitini genelleştirmek** Şekil, ikinci türevi $(0, \infty)$ aralığında pozitif olan iki kere türetilen, azalan bir pozitif f fonksiyonunun grafiğini göstermektedir. Her n için A_n sayısı, eğri ile $(n, f(n))$ ve $(n+1, f(n+1))$ noktalarını birleştiren aya benzer bölgenin alanıdır.

- a. Şekli kullanarak $\sum_{n=1}^{\infty} A_n < (1/2)(f(1) - f(2))$ olduğunu gösterin.

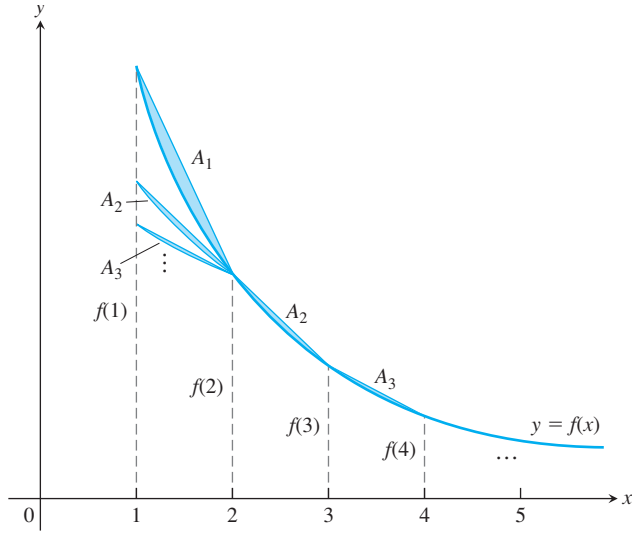
- b. Aşağıdaki limitin varlığını gösterin.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n f(k) - \frac{1}{2}(f(1) + f(n)) - \int_1^n f(x) dx \right].$$

- c. Sonra aşağıdaki limitin varlığını gösterin.

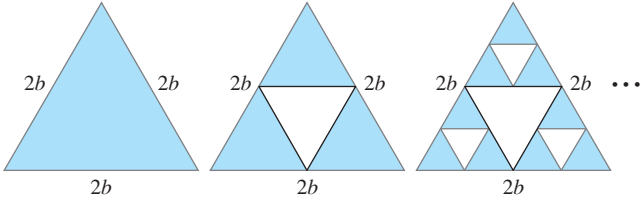
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \right].$$

$f(x) = 1/x$ ise, (c) şıkkındaki limit Euler sabitidir (Bölüm 11.3, Alıştırma 41). (Kaynak: "Convergence with Pictures", P. J. Rippon, *American Mathematical Monthly*, Vol. 93, No. 6, 1986, sayfa 476-78.)



20. Bu alıştırma alt kenarları $2b$ olan “yukarı doğru” eşkenar üçgenle ilgilidir. Şeklin devamının gösterdiği gibi esas üçgenden “aşağı doğru” eşkenar üçgenler çıkarılmaktadır. Esas üçgenden çıkarılan üçgenlerin alanlarının toplamı sonsuz bir seri oluşturur.

- Bu sonsuz seriyi bulun.
- Bu sonsuz serinin toplamını ve dolayısıyla esas üçgenden çıkarılan toplam alanı bulun.
- Esas üçgendeki her nokta çıkarılır mı? Neden çıktığını veya çıkmadığını açıklayın.



- T** 21. a. a bir sabit olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\cos(a/n)}{n} \right)^n$$

limiti a 'nın değerine bağlı mıdır? Bağlıysa, nasıl?

- a ve b birer sabit ve $b \neq 0$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\cos(a/n)}{bn} \right)^n$$

limiti b 'nin değerine bağlı mıdır? Bağlıysa, nasıl?

- (a) ve (b)'de bulduklarınızı analizle doğrulayın.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \sin(a_n)}{2} \right)^n$$

serisinin de yakınsak olacağını gösterin.

- 23.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n x^n}{\ln n}$$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını 5 yapacak b değerini bulun.

24. $\sin x$, $\ln x$ ve e^x 'in polinom olmadığını nereden biliyorsunuz? Yanıtınızı açıklayın.

- 25.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax) - \sin x - x}{x^3}$$

limitinin sonlu olduğu bir a değeri bulun ve limiti hesaplayın.

- 26.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - b}{2x^2} = -1$$

olacak şekilde a ve b değerlerini bulun.

27. **Raabe (veya Gauss) testi** İspat vermeden göstereceğimiz aşağıdaki test Oran Testi'nin genişletilmiştir.

Raabe testi: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ pozitif sabitlerden oluşan bir seri ise ve her $n \geq N$ için $|f(n)| < K$ olmak üzere

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{C}{n} + \frac{f(n)}{n^2} \quad (1)$$

olmasını sağlayacak C , K ve N sabitleri varsa, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ serisi, $C > 1$ ise yakınsak ve $C \leq 1$ ise iraksaktır.

Raabe testinin sonuçlarının $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ serileri hakkında bildiklerinizle uyduğunu gösterin.

28. (Alıştırma 27'nin devamı.) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ serisinin terimlerinin

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{(2n-1)^2}{(2n)(2n+1)} u_n$$

tekrarlama formülüyle verildiğini varsayın. Serinin yakınsak olup olmadığını belirlemek için Raabe testini kullanın.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise her n için $a_n \neq 1$ ve $a_n > 0$ ise

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ serisinin yakınsak olduğunu gösterin.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/(1 - a_n)$ yakınsak mıdır? Açıklayın.

30. (Alıştırma 29'un devamı) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise ve her n için $1 > a_n > 0$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - a_n)$ 'in yakınsak olduğunu gösterin. (İpucu: Önce $|\ln(1 - a_n)| \leq a_n/(1 - a_n)$ olduğunu gösterin.)

31. **Nicole Oresme'nin Teoremi** Nicole Oresme'nin

$$1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} + \cdots = 4$$

olduğunu söyleyen teoremini ispatlayın.

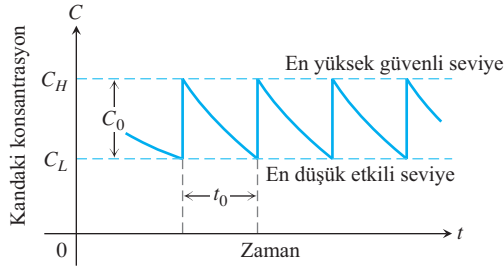
(İpucu: $1/(1-x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ denkleminin iki tarafının da türevini alın.)

- c. $k = 0.01 \text{ sa}^{-1}$ ve $t_0 = 10 \text{ sa}$ ise, $R_n > (1/2) R$ olmasını sağlayacak en küçük n değerini bulun.

(Kaynak: *Prescribing Safe and Effective Dosage*, B. Horelick ve S. Koont, COMAP, Inc., Lexington MA.)

- 38. İki doz arasındaki zaman** (Alıştırma 37'nin devamı) Eğer bir ilacın bir C_L konsantrasyonunun altında etkisiz, daha yüksek bir C_H konsantrasyonunun üstünde ise zararlı olduğu biliniyorsa, güvenli (C_H 'nin üstünde değil), ama etkili (C_L 'nin altında değil) bir konsantrasyon sağlayacak C_0 ve t_0 değerlerinin bulunması gerekir. Şekle bakın. Dolayısıyla

$$R = C_L \text{ ve } C_0 + R = C_H$$



Yani, $C_0 = C_H - C_L$ olur. Bu değerler Alıştırma 37'nin (a) şikkında elde edilen R denklemine koyulursa, ortaya çıkan denklem

$$t_0 = \frac{1}{k} \ln \frac{C_H}{C_L}$$

şeklinde sadeleşir. Etkili bir seviyeye hızlı bir şekilde ulaşmak için, C_H mg/mL'lik bir konsantrasyon üretecek bir "yükleme" dozu verilebilir. Bundan sonra her t_0 saatte bir konsantrasyonu $C_0 = C_H - C_L$ mg/mL miktarında arttıracak bir dozla devam edilebilir.

- a. t_0 için yukarıda verilen denklemi doğrulayın.
b. $k = 0.05 \text{ sa}^{-1}$ ve en yüksek güvenli konsantrasyon e kere en düşük etkili konsantrasyon ise, dozlar arasındaki güvenli ve etkili konsantrasyonu garantileyecek zaman uzunluğunu bulun.
c. $C_H = 2 \text{ mg/mL}$, $C_L = 0.5 \text{ mg/mL}$ ve $k = 0.02 \text{ sa}^{-1}$ ise, ilacı vermek için bir program belirleyin.
d. $k = 0.2 \text{ sa}^{-1}$ olduğunu ve en küçük etkili konsantrasyonun 0.03 mg/mL olduğunu varsayın. 0.1 mg/mL 'lik konsantrasyon sağlayan tek bir doz veriliyor. İlaç yaklaşık ne kadar süre etkili kalacaktır?

39. Sonsuz bir çarpım

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \cdots$$

sonsuz çarpımının, çarpımın doğal logaritması alınarak elde edilen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$$

serisi yakınsaksa, yakınsayacağı söylenir. Her n için, $a_n > -1$ ise ve $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yakınsak ise çarpımın yakınsak olacağını gösterin. (İpucu: $|a_n| < 1/2$ ise

$$|\ln(1 + a_n)| \leq \frac{|a_n|}{1 - |a_n|} \leq 2|a_n|$$

olduğunu gösterin.)

40. p bir sabitse,

$$1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot [\ln(\ln n)]^p}$$
 serisinin

- a. $p > 1$ ise yakınsayacağını, b. $p \leq 1$ ise ıraksayacağını gösterin. Genelde, $f_1(x) = x$, $f_{n+1}(x) = \ln(f_n(x))$ ise ve $n = 1, 2, 3, \dots$ değerlerini alıyorsa, $f_2(x) = \ln x$, $f_3(x) = \ln(\ln x)$, ... buluruz. $f_n(a) > 1$ ise,

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{f_1(x)f_2(x) \cdots f_n(x)(f_{n+1}(x))^p}$$

$p > 1$ ise yakınsar, $p \leq 1$ ise ıraksar.

41. a. Şu teoremi ispatlayın: $\{c_n\}$, her $t_n = \sum_{k=1}^n c_k$ toplamının sınırlı olmasını sağlayacak şekilde sayılardan oluşan bir diziyse, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n/n$ serisi yakınsar ve değeri $\sum_{n=1}^{\infty} t_n/(n(n+1))$ 'e eşittir.

İspatın taslağı: c_1 yerine t_1 ve $n \geq 2$ için c_n yerine $t_n - t_{n-1}$ yazın. $s_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} c_k/k$ ise

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= t_1 \left(1 - \frac{1}{2}\right) + t_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ &\quad + \cdots + t_n \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) + \frac{t_{2n+1}}{2n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{t_k}{k(k+1)} + \frac{t_{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

olduğunu gösterin. Bir M sabiti için, $|t_k| < M$ olduğundan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{k(k+1)}$$

serisi mutlak yakınsaktır ve $n \rightarrow \infty$ iken s_{2n+1} 'in bir limiti vardır. $s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} c_k/k$ ise, $n \rightarrow \infty$ iken, $s_{2n+1} - s_{2n} = c_{2n+1}/(2n+1)$ sıfıra yaklaşır, çünkü $|c_{2n+1}| = |t_{2n+1} - t_{2n}| < 2M$ 'dir. Dolayısıyla $\sum c_k/k$ serisi yakınsar ve limit $\sum_{k=1}^{\infty} t_k/(k(k+1))$ olur.

- b. Bahsedilen teoremin aşağıdaki alterne harmonik seriye nasıl uygulanacağını gösterin.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

c.

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots$$

serisinin yakınsadığını gösterin (İlk terimden sonra, işaretleri iki negatif, iki pozitif, iki negatif, iki pozitif şeklinde gider).

42. $-1 < x \leq 1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^{n-1} x^n] / n$ 'nin $\ln(1+x)$ 'e yakınsaklığı

a. Uzun bölme veya başka bir yolla

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$$

olduğunu gösterin.

b. (a) şıkkındaki denklemi 0'dan x 'e kadar t 'ye göre integre ederek

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}$$

olmak üzere,

$$R_{n+1} = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt.$$

olduğunu gösterin.

c. $x \geq 0$ ise,

$$|R_{n+1}| \leq \int_0^x t^{n+1} dt = \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

olduğunu gösterin.

$$\left(\begin{array}{l} \text{İpucu: } t, 0 \text{ 'dan } x \text{ 'e değişirken,} \\ 1+t \geq 1 \quad \text{ve} \quad t^{n+1}/(1+t) \leq t^{n+1} \end{array} \right)$$

ve

$$\left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \int_0^x |f(t)| dt \text{ olur. } \left. \right)$$

d. $-1 < x < 0$ ise

$$|R_{n+1}| \leq \left| \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-|x|} dt \right| = \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)(1-|x|)}$$

olduğunu gösterin.

$$\left(\begin{array}{l} \text{İpucu: } x < t \leq 0 \text{ ise, } |1+t| \geq 1-|x| \text{ ve} \end{array} \right)$$

$$\left| \frac{t^{n+1}}{1+t} \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{1-|x|} \text{ olur. } \left. \right)$$

e. Yapılan tartışmaları kullanarak,

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

serisinin $-1 < x \leq 1$ için, $\ln(1+x)$ 'e yakınsadığını gösterin.)

Bölüm 11

Teknoloji Uygulama Projeleri

Mathematica/Maple Modülü

Zıplayan Top

Model, zıplayan bir topun yüksekliğini ve zıplaması sona erene kadar geçen zamanı tahmin eder.

Mathematica/Maple Modülü

Bir Fonksiyonun Taylor Polinomları Yaklaşımları

Bir grafik animasyon, Taylor polinomlarının, tanım kümeleri içindeki bir aralık üzerinde her mertebeden türevleri var olan fonksiyonlara yakınsadıklarını göstermektedir.