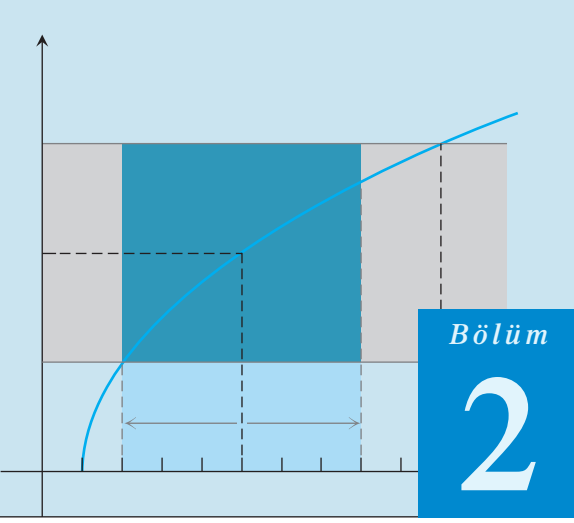




LİMİT VE SÜREKLİLİK

GİRİŞ Limit kavramı, analizi cebir ve trigonometriden ayıran ana fikirdir. Bir eğriye teğet bulmak veya bir nesnenin hızını bulmada temeldir.

Bu bölümde önce sezgisel, sonra da matematiksel olarak limiti geliştireceğiz. Limiti bir f fonksiyonunun nasıl değiştiğini tanımlamak için kullanırız. Bazı fonksiyonlar sürekli olarak değişir; x 'teki küçük değişiklikler $f(x)$ 'te de küçük değişikliklere neden olur. Bazı fonksiyonların değerleri kesikli veya çok hızlı değişiyor olabilir. Limit kavramı bu davranışları ayırt etmek için kesin bir yol verir. Ayrıca, fonksiyon grafiklerinin teğet doğrularını bulmakta da limiti kullanırız. Bu geometrik uygulama bizi hemen bir fonksiyonun türevi kavramına götürür. Bölüm 3'te derinlemesine inceleyeceğimiz türev bir fonksiyonun değerlerinin nasıl değiştiğini belirler.

2.1

Değişim Oranları ve Limitler

Bu bölümde ortalama ve anlık değişim oranlarını tanıtıyoruz. Bu da bizi bu bölümün ana fikrine, limit fikrine götürecektir.

Ortalama ve Anlık Hız

Hareket eden bir cismin bir zaman aralığındaki **ortalama hızı** katedilen mesafenin geçen zamana bölünmesi ile bulunur. Ölçü birimi, uzunluk/birim zaman dır: kilometre/saat, feet/saniye veya eldeki probleme ne uyuyorsa.

ÖRNEK 1 Bir Ortalama Hız Bulmak

Bir taş yüksek bir uçurumun tepesinden serbest düşmeye bırakılır.

- (a) ilk 2 saniyedeki,
- (b) birinci ve ikinci saniyeler arasındaki 1 saniyelik aralıktaki ortalama hızı nedir?

Çözüm Bu problemin çözümünde 16. yy sonlarında Galileo tarafından keşfedilen şu gerçeği kullanırız: dünya yüzeyine yakın yerlerde durgun (hareketsiz) durumdan yere doğru serbest düşmeye bırakılan bir katı cisim, geçen zamanın karesi ile orantılı bir yol katedecektir (Cismi yavaşlatacak hava direncinin ihmal edildiği ve cisme etkiyen tek

TARİHSEL BİYOGRAFİ*

Galileo Galilei
(1564–1642)

kuvvetin yer çekimi ivmesi olduğu kabul ediliyor. Bu tip harekete **serbest düşme** deriz). t saniyede düşülen mesafe feet olarak y ise Galileo kanunu

$$y = 16t^2$$

dir. Burada 16 orantı sabitidir.

Verilen bir zaman aralığında taşın ortalama hızı, konumdaki değişiklik Δy 'nin zaman aralığı Δt 'ye bölümüdür.

(a) İlk 2 saniyede:
$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2)^2 - 16(0)^2}{2 - 0} = 32 \frac{\text{ft}}{\text{sn}}$$

(b) İlk saniyeden ikinci saniyeye
$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2)^2 - 16(1)^2}{2 - 1} = 48 \frac{\text{ft}}{\text{sn}}$$
 ■

Şimdiki örnek, düşmekte olan bir cismin ortalama hızına gittikçe kısalan zaman aralıklarında baktığımızda neler olduğunu incelemektedir.

ÖRNEK 2 Bir Anlık Hız Bulmak

Düşmekte olan bir taşın $t = 1$ sn. ve $t = 2$ sn. zamanlarındaki hızını bulun.

Çözüm Uzunluğu $\Delta t = h$ olan $[t_0, t_0 + h]$ zaman aralığında taşın ortalama hızını

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(t_0 + h)^2 - 16t_0^2}{h} \quad (1)$$

olarak hesaplayabiliriz.

Bu formülü, $h = 0$ alarak $t_0 = 0$ anındaki “anlık” hızı hesaplamakta kullanamayız, çünkü 0 ile bölme yapamayız. Ancak, $t_0 = 1$ ve $t_0 = 2$ zamanlarında başlayan ve giderek kısalan zaman aralıklarındaki ortalama hızları hesaplamada *kullanabiliriz*. Bunu yaptığımız zaman, karşımıza belirli bir kalıp çıkar (Tablo 2.1).

TABLO 2.1 Kısa zaman aralıklarında ortalama hızlar

Ortalama hız: $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(t_0 + h)^2 - 16t_0^2}{h}$		
Zaman aralığının uzunluğu h	$t_0 = 1$ 'de başlayan h zaman aralığında ortalama hız	$t_0 = 2$ 'de başlayan h zaman aralığında ortalama hız
1	48	80
0.1	33.6	65.6
0.01	32.16	64.16
0.001	32.016	64.016
0.0001	32.0016	64.0016

$t_0 = 1$ anında başlayan aralıklardaki ortalama hız, aralığın uzunluğu azaldıkça 32 gibi bir sınır değere yaklaşıyor gibidir. Bu da $t_0 = 1$ anında taşın 32 ft/sn hızla düştüğüne işaret etmektedir. Bunu cebirsel olarak doğrulayalım.

Calculus'un tarihsel figürleri, esas elemanların gelişimleri ve konuları hakkında daha fazlasını öğrenmek için www.aw-bc.com/thomas'ı ziyaret edin.

Yukarıdaki (1) denkleminde $t_0 = 1$ alır ve payı açıp kısaltmaları yaparsak

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta t} &= \frac{16(1+h)^2 - 16(1)^2}{h} = \frac{16(1+2h+h^2) - 16}{h} \\ &= \frac{32h + 16h^2}{h} = 32 + 16h\end{aligned}$$

buluruz.

h 'nin 0'dan farklı değerleri için iki taraftaki ifadeler özdeştir ve ortalama hız $32 + 16h$ ft/sn dir. Şimdi, h 0'a yaklaşıırken ortalama hızın neden $32 + 16(0) = 32$ ft/sn gibi bir sınır değerinin var olduğunu görebiliriz.

Aynı şekilde (1) denkleminde $t_0 = 2$ almak, h 'nin 0'dan farklı değerleri için

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = 64 + 16h$$

verir. h gittikçe 0'a yaklaştığında $t_0 = 2$ s deki ortalama hızın sınır değeri 64 ft/sn dir. ■

Ortalama Değişim Oranları ve Kirişler

Herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonu verilmişse, y 'nin $[x_1, x_2]$ aralığında x 'e bağlı ortalama değişimini y 'deki değişim değeri $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ 'i değişimin oluştuğu aralığın uzunluğu $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ 'ye bölerek hesaplarız.

TANIM Bir Aralık Üzerinde Ortalama Değişim Oranı

$y = f(x)$ 'in $[x_1, x_2]$ aralığında x 'e bağlı ortalama değişiminin oranı

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \quad h \neq 0.$$

Geometrik olarak, $[x_1, x_2]$ aralığında f 'nin ortalama değişim oranı $P(x_1, f(x_1))$ ile $Q(x_2, f(x_2))$ noktalarından geçen doğrunun eğimidir (Şekil 2.1). Geometride, bir eğrinin iki noktasını birleştiren doğruya eğrinin **kirişi** denir. Yani, f 'nin x_1 'den x_2 'ye ortalama değişim oranı PQ kirişinin eğimiyle aynıdır.

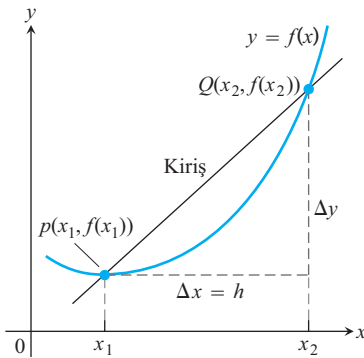
Deney yapan biyologlar çoğunlukla kontrollü laboratuvar ortamında toplulukların büyüme hızını bilmek isterler.

ÖRNEK 3 Bir Laboratuvar Topluluğunun Ortalama Büyüme Oranı

Şekil 2.2, 50 günlük bir deneyde bir meyve sineği (*Drosophila*) topluluğunun nasıl büyüdüğünü göstermektedir. Sinek sayısı belirli aralıklarla sayılmış, bulunan değerler zamana karşı işaretlenmiş ve noktalar düzgün bir eğriyle birleştirilmiştir (Şekil 2.2 de mavi renkli). 23. günden 45. güne ortalama büyüme oranını bulun.

Çözüm 23. günde 150, 45. günde 340 sinek vardır. Yani, $45 - 23 = 22$ günde sinek sayısı $340 - 150 = 190$ artmıştır. Topluluğun 23. günden 45. güne kadar ortalama değişim oranı

$$\text{Ortalama değişim oranı: } \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{340 - 150}{45 - 23} = \frac{190}{22} \approx 8.6 \text{ sinek/gün}$$



ŞEKİL 2.1 $y = f(x)$ grafiğinin bir kirişi. Eğimi $\Delta y/\Delta x$, f 'nin $[x_1, x_2]$ aralığındaki ortalama değişim oranıdır.

Tablodaki değerler Q 'nun t koordinatı 45'ten 30'a düşerken giriş eğimlerinin 8.6'dan 16.4'e yükseldiğini göstermektedir ve $t = 23$ 'e giderken bu eğimlerin biraz daha artmasını bekleriz. Geometrik olarak, girişler P etrafında dönmekte ve şekildeki eğrinin P 'den geçtiği yönde giden kırmızı doğruya yaklaşmaktadır. İleride bu doğrunun P 'deki eğrinin teğeti olduğunu göreceğiz. Bu doğru $(14, 0)$ ve $(35, 350)$ noktalarından geçtiği için, eğimi

$$\frac{350 - 0}{35 - 14} = 16.7 \text{ sinek/gün (yaklaşık olarak)}$$

bulunur. 23. günde, topluluk 16.7 sinek/gün gibi bir hızla artmaktadır. ■

Örnek 2'deki taşın $t = 1$ ve $t = 2$ anlarındaki düşüş oranlarına ve Örnek 4'teki topluluk $t = 23$ günündeki değişim oranına *anlık değişim oranları* denir. Örneklerin belirttiği gibi, anlık oranları ortalama oranların sınır değerleri olarak buluruz. Örnek 4'te, nüfus eğrisinin 23. gündeki teğetinin girişlerin bir sınır konumu olduğunu gördük. Yakından ilişkili olan anlık oran ve teğetler bir çok başka olayda da karşımıza çıkar. Bu ikisinden yapıcı bir şekilde bahsetmek ve aralarındaki bağlantıyı daha iyi anlamak için, süreci sınır değerleri veya bundan sonra kullanacağımız adıyla *limitler* yardımıyla incelememiz gerekir.

Fonksiyon Değerlerinin Limitleri

Örneklerimiz limitin kavramını akla getirmiştir. Yeterince ilerleyene kadar kesin tanımı erteleyerek şu gayri resmi tanımla başlayalım.

$f(x)$, x_0 civarında açık bir aralıkta tanımlı olsun (x_0 'da tanımlı olmayabilir). x_0 'a yeterince yakın bütün x için $f(x)$ L değerine keyfi derecede (istediğimiz ölçüde L 'ye yakın) yaklaşıyorsa, x x_0 'a yaklaşıırken, f L **limitine** yaklaşıyor deriz ve “ x x_0 'a yaklaşıırken $f(x)$ 'in limiti L dir” diye okunan

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

yazarız. Aslında tanım şunu söyler: x x_0 'a yakın iken (x_0 'ın her iki tarafında) $f(x)$ değerleri L sayısına yakındır.

Bu tanım gayri resmidir, çünkü keyfi derecede yakın ve yeterince yakın gibi terimler açık değildir; anlamları duruma göre değişir. Piston yapan bir işçiye göre yakın, bir inç'in bir kaç binde biri anlamına gelebilirken, uzak galaksileri inceleyen bir astronom için birkaç ışık yılı uzaklıkta anlamına gelebilir. Yine de, bu tanım belirli bazı fonksiyonların limitini bulmamızı sağlayacak kadar açıktır. Ancak limit teoremlerini ispatlamaya koyduğumuzda, Bölüm 2.3'teki daha açık tanıma gerek duyacağız.

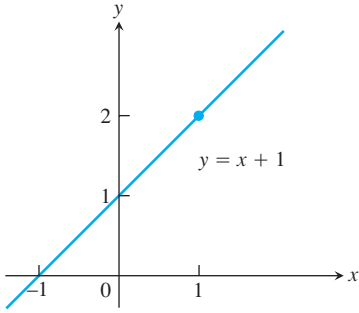
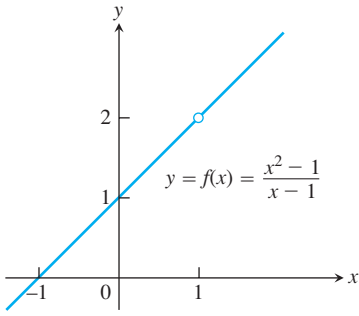
ÖRNEK 5 Bir Fonksiyonun Bir Nokta Civarındaki Davranışı

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

fonksiyonu $x = 1$ civarında nasıl davranır?

Çözüm Verilen formül, $x = 1$ hariç bütün x reel sayıları için f 'yi tanımlı kılar. (0 ile bölemeyiz). Herhangi bir $x \neq 1$ değeri için, payı çarpanlarına ayırıp, ortak çarpanı sadeleştirerek formülü basitleştirebiliriz:

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1, \quad x \neq 1$$



ŞEKİL 2.4 f 'nin grafiği, f 'nin tanımsız olduğu $x = 1$ dışında, $y = x + 1$ doğrusuyla özdeşdir (Örnek 5).

Böylece f 'nin grafiği bir noktası, yani $(1, 2)$, çıkartılmış olan $y = x + 1$ doğrusu olur. Bu çıkartılmış nokta Şekil 2.4'te bir "boşluk" olarak gösterilmektedir. $f(1)$ tanımlı olmadığı halde x 'i 1'e *yeterince yakın seçerek*, $f(x)$ 'in değerini 2'ye *istediğimiz kadar yakın* bulabileceğimiz açıktır (Tablo 2.2).

TABLO 2.2 x 1'e yaklaştıkça, $f(x) = (x^2 - 1) / (x - 1)$ 2'ye o kadar yaklaşır.

x 'in 1'in altında ve üstündeki değerleri	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1, \quad x \neq 1$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

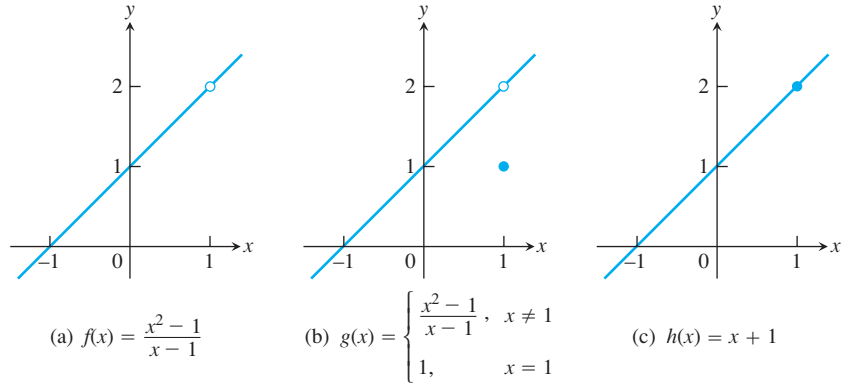
x 1'e yaklaşıırken $f(x)$ 2 limitine yaklaşır deriz ve bunu

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \text{veya} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

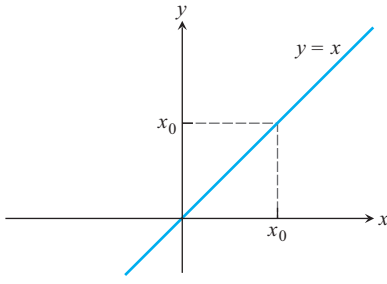
olarak yazabiliriz.

ÖRNEK 6 Limit Değeri Fonksiyonun x_0 'da Nasıl Tanımlandığına Bağlı Değildir.

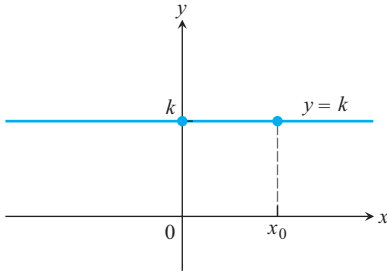
Şekil 2.5'teki f fonksiyonu $x = 1$ 'de f tanımsız olduğu halde, $x \rightarrow 1$ iken limiti 2'dir. $2 \neq g(1)$ olduğu halde, $x \rightarrow 1$ iken, g fonksiyonunun limiti 2'dir. h fonksiyonu, $x \rightarrow 1$ iken



ŞEKİL 2.5 x 1'e yaklaşıırken $f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonlarının hepsinin limiti 2'dir. Halbuki, $x = 1$ de yalnız $h(x)$ 'in değeri limiti ile aynıdır (Örnek 6).



(a) Birim fonksiyon



(b) Sabit fonksiyon

ŞEKİL 2.6 Örnek 8'deki fonksiyonlar

limiti $x = 1$ 'deki değerine eşit olan tek fonksiyondur. h için, $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(1)$ dir. Limitin ve fonksiyon değerinin bu şekilde eşitliği özel bir durumdur ve Bölüm 2.6'da buna döneceğiz. ■

Bazen $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ $f(x_0)$ hesaplanarak bulunabilir. Örneğin, $f(x)$, $f(x_0)$ 'ın tanımlı olduğu polinomların ve trigonometrik fonksiyonların cebirsel bir kombinasyonuysa, bu geçerlidir (Bölüm 2.2 ve 2.6'te bunun hakkında daha çok şey söyleyeceğiz).

ÖRNEK 7 $f(x_0)$ 'ı Hesaplayarak Limit Bulmak

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2} (4) = 4$
- (b) $\lim_{x \rightarrow -13} (4) = 4$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 2} (5x - 3) = 10 - 3 = 7$
- (e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 4}{x + 5} = \frac{-6 + 4}{-2 + 5} = -\frac{2}{3}$

ÖRNEK 8 Birim ve Sabit Fonksiyonların Her Noktada Limitleri Vardır

(a) **f birim fonksiyon** $f(x) = x$ ise, x_0 'ın herhangi bir değeri için (Şekil 2.6a)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

(b) **f sabit fonksiyon** $f(x) = k$ ise, (k sabit değerli fonksiyon) x_0 'ın herhangi bir değeri için (Şekil 2.6b)

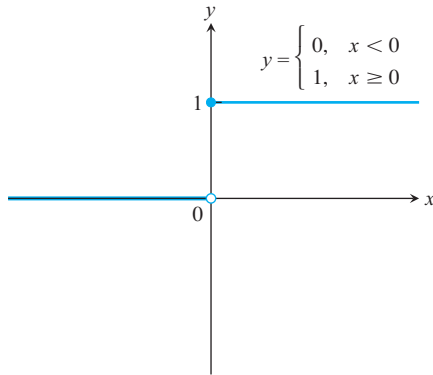
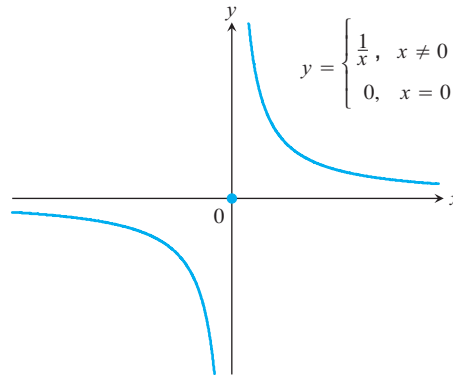
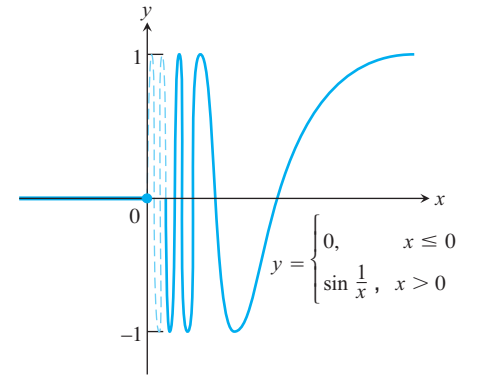
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} k = k$$

Örneğin,

$$\lim_{x \rightarrow 3} x = 3 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow -7} (4) = \lim_{x \rightarrow -2} (4) = 4$$

tür. Bu sonuçları Bölüm 2.3 Örnek 3'te ispat edeceğiz. ■

Limitin var olmadığı birkaç durum Şekil 2.7'de gösterilmekte ve bir sonraki örnekte incelenmektedir.

(a) Birim basamak fonksiyonu $U(x)$ (b) $g(x)$ (c) $f(x)$ ŞEKİL 2.7 $x \rightarrow 0$ 'a yaklaşırken bu fonksiyonlardan hiç birinin limiti yoktur (Örnek 9).

ÖRNEK 9 Bir Fonksiyonun Tanım Kümesindeki Bir Noktada Limiti Olmayabilir.

$x \rightarrow 0$ iken aşağıdaki fonksiyonların davranışlarını inceleyin.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad U(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \\ \text{(b)} \quad g(x) &= \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \\ \text{(c)} \quad f(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Çözüm

- (a) Sıçrar: Birim basamak fonksiyonu $U(x)$ 'in $x \rightarrow 0$ iken limiti yoktur, çünkü değerleri $x = 0$ 'da sıçrama yapar. x 'in sıfıra yakın negatif değerleri için $U(x) = 0$ 'dır. x 'in sıfıra yakın pozitif değerleri içinse $U(x) = 1$ 'dir. $x \rightarrow 0$ iken, $U(x)$ 'in yaklaştığı tek bir L değeri yoktur (Şekil 2.7a).
- (b) Çok büyür: $x \rightarrow 0$ iken $g(x)$ 'in limiti yoktur, çünkü $x \rightarrow 0$ iken g 'nin değerleri mutlak değer olarak çok büyür ve herhangi bir reel sayıya yaklaşmaz (Şekil 2.7b).
- (c) Çok fazla salınır: $x \rightarrow 0$ iken $f(x)$ 'in limiti yoktur, çünkü fonksiyonun değerleri 0 'ı içeren bütün açık aralıklarda -1 ile $+1$ arasında salınır. $x \rightarrow 0$ iken, değerleri herhangi bir sayının yakınında kalmaz (Şekil 2.7c). ■

Limitleri Tahmin Etmek İçin Hesap Makinesi ve Bilgisayar Kullanmak

Tablo 2.1 ve Tablo 2.2, x x_0 'a yaklaştıkça bir limiti numerik olarak tahmin etmede bir hesap makinesi veya bilgisayar kullanımını göstermektedir. Bu prosedür Örnek 7 deki gibi fonksiyonların limitleri için de başarılı olabilir (bunlar *süreklili* fonksiyonlardır ve Bölüm 2.6 da inceleneceklerdir). Ancak, hesap makineleri veya bilgisayarlar, bir noktada tanımlı olmayan veya limiti olmayan fonksiyonlar için *yanlış değerler* verebilir veya *yanlış izlenimlere* yol açabilir. Bir fonksiyonun bir nokta civarındaki davranışı hakkında, bir hesap makinesinin veya bir bilgisayarın ne zaman garip veya muğlak bilgiler verdiğini bilmemizde diferansiyel hesap bize yardımcı olacaktır (Bölüm 4.4 ve 4.6'ya bakın). Şimdilik, bir limit değerini tahmin etmek için hesaplama araçları kullandığımızda gizli tuzakların ortaya çıkabileceği konusunda basitçe dikkatli olmamız gerekir. İşte bir örnek.

ÖRNEK 10 Bir Limiti Tahmin Etmek

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} \text{ limitini tahmin edin.}$$

Çözüm Tablo 2.3 te $x = 0$ 'a yakın bazı değerler için fonksiyonun değerleri listelenmiştir. x , ± 1 , ± 0.5 , ± 0.10 ve ± 0.01 değerleri ile 0 'a yaklaşıırken fonksiyon 0.05 değerine yaklaşıyor gibi gözükmemektedir.

x 'in ± 0.0005 , ± 0.0001 , ± 0.00001 ve ± 0.000001 gibi daha küçük değerlerini alırsak fonksiyon 0 değerine yaklaşıyor gibi gözükür.

Şu halde cevap nedir? 0.05 veya 0 mı yoksa başka bir değer mi? Hesap makinesi veya bilgisayar değerleri muğlaktır. Fakat, sonraki bölümde tanıtılan limit teoremleri doğru li-

TABLO 2.3 $x = 0$ civarında $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}$ nin bilgisayar değerleri

x	$f(x)$
± 1	0.049876
± 0.5	0.049969
± 0.1	0.049999
± 0.01	0.050000
± 0.0005	0.080000
± 0.0001	0.000000
± 0.00001	0.000000
± 0.000001	0.000000

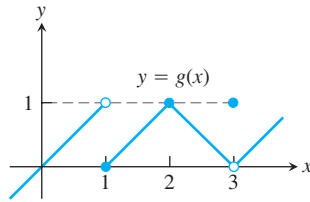
mit değerinin olduğunu doğrulayacaktır. Bu gibi problemler, birkaç gözlem yaparak elde edebileceğimiz sonuçlar üzerine geliştirilen matematiksel muhakemenin gücünü gösterir. Her iki yaklaşımın doğa gerçekleri karşısında avantajları ve dezavantajları vardır. ■

ALİŞTIRMALAR 2.1

Grafiklerden Limitler

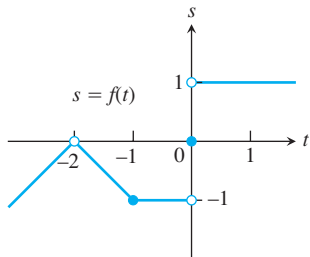
1. Grafiği çizilen $g(x)$ fonksiyonu için, aşağıdaki limitleri bulun veya neden bulunmadıklarını açıklayın.

a. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$



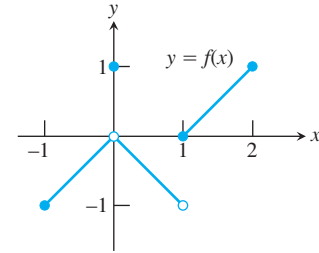
2. Grafiği çizilen $f(t)$ fonksiyonu için, aşağıdaki limitleri bulun veya neden bulunmadıklarını açıklayın.

a. $\lim_{t \rightarrow -2} f(t)$ b. $\lim_{t \rightarrow -1} f(t)$ c. $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$



3. Grafiği çizilen $y = f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadelerden hangileri doğru, hangileri yanlıştır?

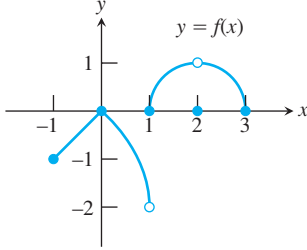
- a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ vardır.
b. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.
c. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
d. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.
e. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.
f. $(-1, 1)$ deki her x_0 için $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ vardır.



4. Grafiği çizilen $y = f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadelerden hangileri doğru, hangileri yanlıştır?

- a. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ yoktur.
b. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$.

- c. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ yoktur.
d. $(-1, 1)$ deki her x_0 için $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ vardır.
e. $(1, 3)$ teki her x_0 için $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ vardır.



Limitlerin Varlığı

5 ve 6 alıştırmalarında limitlerin neden olmadığını açıklayın.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ 6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$
7. Bir $f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ hariç bütün reel x değerlerinde tanımlı olsun. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 'in varlığı hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.
8. Bir $f(x)$ fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığındaki bütün x değerlerinde tanımlı olsun. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 'in varlığı hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.
9. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ ise $f(x) = 5$ $x = 1$ 'de tanımlı olmak zorunda mıdır? Tanımlıysa, $f(1) = 5$ midir? $x = 1$ 'de f 'nin değerleri hakkında herhangi bir sonuca varabilir miyiz? Açıklayın.
10. $f(1) = 5$ ise, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ var olmak zorunda mıdır? Varsa, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ olmak zorunda mıdır? $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ hakkında herhangi bir sonuca varabilir miyiz?

Limitleri Tahmin Etme

11–20 alıştırmalarında grafik çizin bir hesap makinesi faydalı olabilir.

11. $f(x) = (x^2 - 9)/(x + 3)$ olsun.
- a. $x = -3.1, -3.01, -3.001$ ve hesap makinenizin izin verdiği uzunluktaki noktalarda f 'nin değerlerinin bir tablosunu yapın. Sonra $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ 'i tahmin edin. Bunun yerine f 'yi $x = -2.9, -2.99, -2.999, \dots$ gibi değerlerde hesaplırsanız ne bulursunuz?
- b. (a)'da bulduklarınızı f 'yi $x_0 = -3$ civarında çizerek ve $x \rightarrow -3$ iken grafikteki y değerlerini bulmak için ZOOM ve TRACE kullanarak doğrulayın.
- c. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ 'i cebirsel olarak bulun.
12. $g(x) = (x^2 - 2)/(x - \sqrt{2})$ olsun.
- a. $x = 1.4, 1.41, 1.414$ ve $\sqrt{2}$ 'nin artan ondalıklı değerleriyle g 'nin bir tablosunu yapın. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x)$ 'i tahmin edin.
- b. (a)'daki sonuçlarınızı g 'yi $x_0 = \sqrt{2}$ civarında çizerek ve $x \rightarrow \sqrt{2}$ iken grafikteki y değerlerini bulmak için ZOOM ve TRACE kullanarak doğrulayınız.
- c. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x)$ 'i cebirsel olarak bulun.

13. $G(x) = (x + 6)/(x^2 + 4x - 12)$ olsun.

- a. $x = -5.9, -5.99, -5.999, \dots$ noktalarında G 'nin değerlerinin bir tablosunu yapın. Sonra $\lim_{x \rightarrow -6} G(x)$ 'i tahmin edin. G 'yi $x = -6.1, -6.01, -6.001, \dots$ gibi değerlerde hesaplırsanız ne bulursunuz?
- b. (a)'da bulduklarınızı G 'yi çizerek ve $x \rightarrow -6$ iken grafikteki y değerlerini bulmak için ZOOM ve TRACE kullanarak doğrulayın.
- c. $\lim_{x \rightarrow -6} G(x)$ 'i cebirsel olarak bulun.
14. $h(x) = (x^2 - 2x - 3)/(x^2 - 4x + 3)$ olsun.
- a. $x = 2.9, 2.99, 2.999, \dots$ noktalarında h 'nin değerlerinin $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$ 'i tahmin edin. h 'yi $x = 3.1, 3.01, 3.001, \dots$ değerlerinde hesaplırsanız ne bulursunuz?
- b. (a)'da bulduklarınızı h 'yi $x_0 = 3$ civarında çizerek ve $x \rightarrow 3$ iken grafikteki y değerlerini bulmak için ZOOM ve TRACE kullanarak doğrulayın.
- c. $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$ cebirsel olarak bulun.
15. $f(x) = (x^2 - 1)/(|x| - 1)$ olsun.
- a. $x_0 = -1$ 'e alttan ve üstten yaklaşan x değerleri için f 'nin değerlerinin bir tablosunu yapın. Sonra $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 'i tahmin edin.
- b. (a)'da bulduklarınızı f 'yi $x_0 = -1$ civarında çizerek ve $x \rightarrow -1$ iken grafikteki y değerlerini bulmak için ZOOM ve TRACE kullanarak doğrulayın.
- c. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ cebirsel olarak bulun.
16. $F(x) = (x^2 + 3x + 2)/(2 - |x|)$ olsun.
- a. $x_0 = -2$ 'ye alttan ve üstten yaklaşan x değerleri için F 'nin değerlerinin bir tablosunu yapın. Sonra $\lim_{x \rightarrow -2} F(x)$ 'i tahmin edin.
- b. (a)'da bulduklarınızı F 'yi $x_0 = -2$ civarında çizerek ve $x \rightarrow -2$ iken grafikteki y değerlerini bulmak için ZOOM ve TRACE kullanarak doğrulayın.
- c. $\lim_{x \rightarrow -2} F(x)$ cebirsel olarak bulun.
17. $g(\theta) = (\sin \theta)/\theta$ olsun.
- a. $\theta_0 = 0$ 'a alttan ve üstten yaklaşan θ değerleri için g 'nin değerlerinin bir tablosunu yapın. Sonra $\lim_{\theta \rightarrow 0} g(\theta)$ 'i tahmin edin.
- b. (a)'da bulduklarınızı g 'yi $\theta_0 = 0$ civarında çizerek doğrulayın.
18. $G(t) = (1 - \cos t)/t^2$ olsun.
- a. $t_0 = 0$ 'a alttan ve üstten yaklaşan t değerleri için G 'nin değerlerinin bir tablosunu yapın. Sonra $\lim_{t \rightarrow 0} G(t)$ 'i tahmin edin.
- b. (a)'da bulduklarınızı G 'yi $t_0 = 0$ civarında çizerek doğrulayın.
19. $f(x) = x^{1/(1-x)}$ olsun.
- a. $x_0 = 1$ 'e alttan ve üstten yaklaşan x değerleri için f değerlerinin bir tablosunu yapın. $x \rightarrow 1$ iken f 'nin bir limiti var mıdır? Varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?
- b. (a)'da bulduklarınızı f 'yi $x_0 = 1$ civarında çizerek doğrulayın.

20. $f(x) = (3^x - 1)/(x)$ olsun.

- a. $x_0 = 0$ 'a alttan ve üstten yaklaşan x değerleri için f değerlerinin bir tablosunu yapın. $x \rightarrow 0$ iken f 'nin bir limiti var mıdır? Varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?

b. (a)'da bulduklarınızı f 'yi $x_0 = 0$ civarında çizerek doğrulayın.

Yerine Koyarak Limit Bulma

21–28 alıştırmalarında değerleri yerine koyarak limitleri bulun. Eğer mümkünse bir hesap makinesi veya bir grafik programıyla yanıtlarınızı doğrulayın.

21. $\lim_{x \rightarrow 2} 2x$

22. $\lim_{x \rightarrow 0} 2x$

23. $\lim_{x \rightarrow 1/3} (3x - 1)$

24. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(3x - 1)}$

25. $\lim_{x \rightarrow -1} 3x(2x - 1)$

26. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2}{2x - 1}$

27. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} x \sin x$

28. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{1 - \pi}$

Ortalama Değişim Oranları

29–34 alıştırmalarında verilen aralık veya aralıklarda fonksiyonun ortalama değişim oranını bulun.

29. $f(x) = x^3 + 1$;

- a. $[2, 3]$ b. $[-1, 1]$

30. $g(x) = x^2$;

- a. $[-1, 1]$ b. $[-2, 0]$

31. $h(t) = \cot t$;

- a. $[\pi/4, 3\pi/4]$ b. $[\pi/6, \pi/2]$

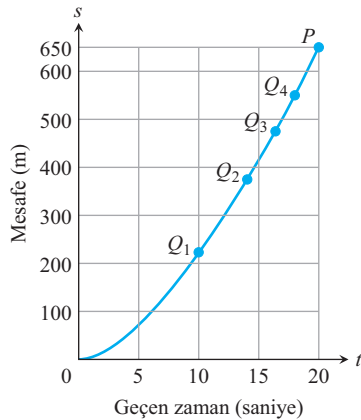
32. $g(t) = 2 + \cos t$;

- a. $[0, \pi]$ b. $[-\pi, \pi]$

33. $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1}$; $[0, 2]$

34. $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta$; $[1, 2]$

35. **Bir Ford Mustang Cobra'nın Hızı** Aşağıdaki şekilde hareket-sizken ivmelenen bir 1994 Ford Mustang Cobra'nın zaman-konum grafiği görülmektedir.



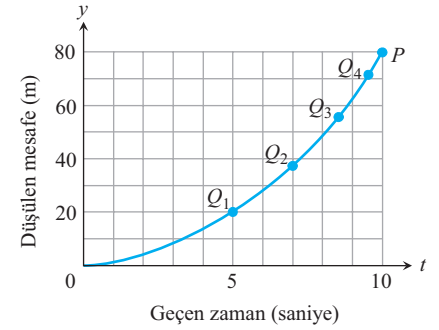
a. PQ_1, PQ_2, PQ_3 ve PQ_4 kirislerinin eğimlerini, sırasıyla Şekil 2.3 teki gibi bir tablo düzenleyerek tahmin edin. Eğimlerin uygun birimi nedir?

b. $t = 20$ s anında Cobra'nın hızını bulun.

36. Şekilde, ay yüzeyine 80 m mesafedeki bir indirme modülünden düşen bir nesnenin zamana karşı düşülen mesafe (m) grafiği görülmektedir.

a. PQ_1, PQ_2, PQ_3 ve PQ_4 kirislerinin eğimlerini, sırasıyla Şekil 2.3 teki gibi bir tablo düzenleyerek tahmin edin.

b. Yüzeye çarptığında nesnenin hızı nedir?



T 37. Küçük bir firmanın ilk beş yılındaki yıllık kâr tablosu aşağıda verilmektedir:

Yıl	1000\$ olarak kâr
1990	6
1991	27
1992	62
1993	111
1994	174

a. Kârları temsil eden noktaları yılın fonksiyonu olarak işaretleyin ve olabildiğince düzgün bir eğriyle birleştirin.

b. 1992 ve 1994 arasındaki ortalama kâr artış oranı nedir?

c. Grafiğinizi kullanarak, 1992'de kârın hangi oranda değiştiğini bulun.

T 38. $x = 1.2, x = 11/10, x = 101/100, x = 1001/1000, x = 10001/10000$ ve $x = 1$ noktalarında $F(x) = (x + 2)/(x - 2)$ fonksiyonunun değerlerinin tablosunu yapın.

a. Tablonuzdaki her $x \neq 1$ için $[1, x]$ aralığında $F(x)$ 'in ortalama değişim oranını bulun.

b. Gerekirse tablonuzu genişleterek, $x = 1$ 'de $F(x)$ 'in değişim oranını bulmaya çalışın.

T 39. $x \geq 0$ için $g(x) = \sqrt{x}$ olsun.

a. $[1, 2], [1, 1.5]$ ve $[1, 1 + h]$ aralıklarında $g(x)$ 'in x 'e göre ortalama değişim oranını bulun.

b. h 'nin sifıra yaklaşan değerlerinde, örneğin $h = 0.1, 0.01,$

0.001, 0.0001, 0.00001 ve 0.000001 için, $[1, 1 + h]$ aralığında $g(x)$ 'in x 'e göre ortalama değişim oranlarının bir tablosunu yapın.

- c. Tablonuz $g(x)$ 'in $x = 1$ 'deki x 'e göre değişim oranı hakkında ne söyler?
- d. h sıfıra yaklaşırken, $[1, 1 + h]$ aralığında $g(x)$ 'in x 'e göre ortalama değişim oranının limitini hesaplayın.

T 40. $t \neq 0$ için, $f(t) = 1/t$ olsun.

- a. (i) $t = 2$ 'den $t = 3$ 'e, (ii) $t = 2$ 'den $t = T$ 'ye kadar olan aralıklarda f 'nin t 'ye göre ortalama değişim oranını bulun.
- b. T 'nin ikiye yaklaşan değerlerinde, örneğin $T = 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, 2.00001$ ve 2.000001 için, $[2, T]$ aralığında $f(t)$ 'nin t 'ye göre ortalama değişim oranlarının bir tablosunu yapın.
- c. Tablonuz $f(t)$ 'nin $t = 2$ 'deki t 'ye göre değişim oranı hakkında ne söyler?

- d. T ikiye yaklaşırken, 2 'den T 'ye kadar olan aralıkta f 'nin t 'ye göre ortalama değişim oranının limitini hesaplayın. $T = 2$ almadan önce biraz hesap yapmanız gerekecektir.

BİLGİSAYARLI İNCELEMELER

Limitlerin Grafikselsel Tahminleri

41-46 alıştırmalarında, aşağıdaki adımlar için BCS kullanın.

- a. Yaklaşılan x_0 noktası yakınında fonksiyonu çizin.
- b. Çiziminizden fonksiyonun limitini tahmin edin.

$$41. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$$

$$42. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{(x + 1)^2}$$

$$43. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - 1}{x}$$

$$44. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 + 7} - 4}$$

$$45. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$$

$$46. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{3 - 3 \cos x}$$

2.2

Limitleri Hesaplamak Limit Kurallarını Kullanmak

TARİHSEL DENEME*

Limitler

Bölüm 2.1 de limit değerlerini tahmin etmek için grafikler ve hesap makineleri kullandık. Bu bölüm limitlerin hesaplanmalarıyla ilgili teoremleri vermektedir. İlk üçü geçen bölümdeki Örnek 8'in sonuçlarını kullanarak polinomların, rasyonel fonksiyonların ve kuvvetlerin limitlerini bulmamızı sağlar. Dördüncüsü ise daha ilerideki hesaplar için hazırlık yapar.

Limit Kuralları

Aşağıdaki teorem, limitlerini bildiğimiz fonksiyonların matematiksel kombinasyonları olan fonksiyonların limitlerinin nasıl hesaplanacağını söyler.

TANIM 1 Limit Kuralları

L, M, c ve k reel sayılar ve

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M, \quad \text{ise}$$

$$1. \text{ Toplama Kuralı:} \quad \lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$$

İki fonksiyonun toplamının limiti limitlerinin toplamıdır.

$$2. \text{ Fark Kuralı:} \quad \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = L - M$$

İki fonksiyonun farklarının limiti limitlerinin farkıdır.

$$3. \text{ Çarpım Kuralı:} \quad \lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$$

İki fonksiyonun çarpımının limiti limitlerinin çarpımıdır.

Calculus'un tarihsel figürleri, esas elemanların gelişimleri ve konuları hakkında daha fazlasını öğrenmek için www.aw-bc.com/thomas'ı ziyaret edin.

4. Sabitle Çarpım Kuralı: $\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

Bir fonksiyonun bir sabit katının limiti fonksiyonun limitinin sabit katıdır.

5. Bölüm Kuralı: $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$

İki fonksiyonun bölümünün limiti, bölenin limitinin sıfır olmaması koşuluyla, limitlerinin bölümüdür.

6. Kuvvet Kuralı: r ve s ortak çarpanı bulunmayan iki tamsayı $s \neq 0$ ve $L^{r/s}$ 'nin bir reel sayı olması koşuluyla,

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

dir. (s çift ise $L > 0$ olduğunu varsayıyoruz)

Bir fonksiyonun herhangi bir rasyonel kuvvetinin limiti, bir reel sayı olması koşuluyla, limitin o kuvvetidir.

Teorem 1 deki özelliklerin doğru olduğuna kendimizi ikna etmemiz kolaydır (bu sezgisel iddialar ispat içermese de). Limitin gayri resmi tanımından, $x \rightarrow c$ 'ye yeterince yakın ise $f(x) + g(x)$ 'in $L + M$ 'ye; $f(x) - g(x)$ 'in $L - M$ 'ye; $f(x)g(x)$ 'in LM 'ye; $kf(x)$ 'in kL 'ye ve $M \neq 0$ ise $f(x)/g(x)$ 'in L/M 'ye yakın olmaları anlamlıdır. Limitin kesin tanımına dayanarak, toplam kuralını Bölüm 2.3 te ispat ediyoruz. 2–5 kuralları Ek 2 de ispat edilmiştir. Kural 6 ise daha ileri düzeyde kitaplarda ispat edilmektedir.

Aşağıda, polinom fonksiyonların ve rasyonel fonksiyonların limitlerinin bulunmasında Teorem 1'in nasıl kullanılabileceğini gösteren bazı örnekler verilmiştir.

ÖRNEK 1 Limit Kurallarını Kullanmak

Aşağıdaki limitleri bulmak için $\lim_{x \rightarrow c} k = k$ ve $\lim_{x \rightarrow c} x = c$ gözlemlerini (Bölüm 2.1, Örnek 8) ve limit özelliklerini kullanın.

$$(a) \lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 4x^2 - 3) \quad (b) \lim_{x \rightarrow c} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} \quad (c) \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3}$$

Çözüm

$$\begin{aligned} (a) \lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 4x^2 - 3) &= \lim_{x \rightarrow c} x^3 + \lim_{x \rightarrow c} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow c} 3 && \text{Toplam ve Fark Kuralları} \\ &= c^3 + 4c^2 - 3 && \text{Çarpım ve Sabit Kat Kuralları} \\ (b) \lim_{x \rightarrow c} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} &= \frac{\lim_{x \rightarrow c} (x^4 + x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow c} (x^2 + 5)} && \text{Bölüm Kuralı} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow c} x^4 + \lim_{x \rightarrow c} x^2 - \lim_{x \rightarrow c} 1}{\lim_{x \rightarrow c} x^2 + \lim_{x \rightarrow c} 5} && \text{Toplam ve Fark Kuralları} \\ &= \frac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5} && \text{Kuvvet veya Çarpım Kuralları} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -2} (4x^2 - 3)} && r/s = 1/2 \text{ ile Kuvvet Kuralı} \\
&= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -2} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow -2} 3} && \text{Fark Kuralı} \\
&= \sqrt{4(-2)^2 - 3} && \text{Çarpım ve Sabit Kat Kuralları} \\
&= \sqrt{16 - 3} \\
&= \sqrt{13}
\end{aligned}$$

Teorem 1'in iki sonucu polinomların ve rasyonel fonksiyonların limitlerini bulma işini daha da basitleştirmektedir. Bir polinom fonksiyonun x c 'ye yaklaşırken limitini hesaplamak için fonksiyonun formülünde x yerine basitçe c yazın. Bir rasyonel fonksiyonun x c 'ye yaklaşırken (paydanın sıfır olmadığı bir c) limitini hesaplamak için fonksiyonun formülünde x yerine basitçe c yazın (Örnek 1.a ve 1.b ye bakın).

TANIM 2 Polinomların Limitleri Değer Yerine Koyma İle Bulunabilir

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, ise

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0.$$

olur.

TANIM 3 Bölünün Limiti Sıfır Değilse, Rasyonel Fonksiyonların Limitleri Değer Yerine Konularak Bulunabilir

$P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom ve $Q(c) \neq 0$, ise

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

olur.

ÖRNEK 2 Bir Rasyonel Fonksiyonun Limiti

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 5} = \frac{0}{6} = 0$$

Bu sonuç, $c = -1$ ile Örnek 1 deki ikinci limite benzerdir. Burada bir adımda hesaplanmıştır.

Sıfır Paydayı Cebirsel Olarak Eleme

Teorem 3 sadece c limit noktasında paydası sıfır olmayan rasyonel fonksiyonlara uygulanır. Payda sıfır ise pay ve paydadaki ortak çarpanları kısaltmakla c noktasında paydası sıfır olmayan bir kesir elde edilebilir. Böyle olursa sadeleştirilmiş kesirde yerine yazma ile limiti bulabiliriz.

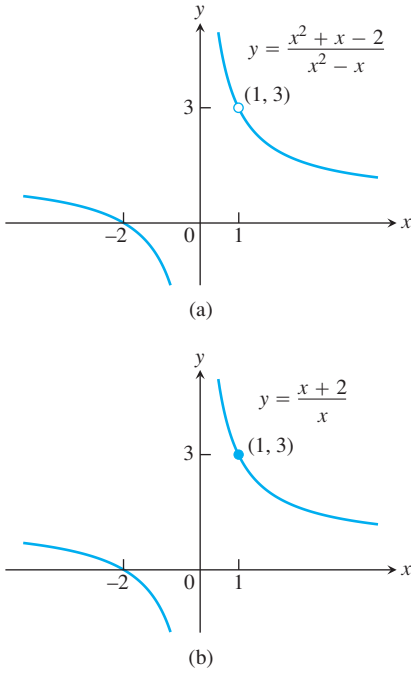
ÖRNEK 3 Bir Ortak Çarpanı Kısaltmak

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}.$$

limitini hesaplayınız.

Ortak Çarpanları Belirlemek

$Q(x)$ bir polinom ve $Q(c) = 0$ ise $Q(x)$ 'in bir çarpanının $(x - c)$ olduğu gösterilebilir. Böylece, x 'in bir rasyonel fonksiyonunun pay ve paydası bir c için sıfır ise $(x - c)$ ortak çarpanlarıdır.



ŞEKİL 2.8 $f(x) = (x^2 + x - 2)/(x^2 - x)$ grafiği (a) da ile $g(x) = (x + 2)/x$ grafiği (b) de f 'nin tanımsız olduğu $x = 1$ dışında aynıdır. $x \rightarrow 1$ iken her iki fonksiyonun limiti aynıdır (Örnek 3).

Çözüm Paydayı sıfır yaptığından $x = 1$ yazamayız. $x = 1$ de payın da sıfır olup olmadığını görmek için pay'ı inceleriz. Pay sıfırdır, şu halde payda ile ortak $(x - 1)$ çarpanı vardır. $(x - 1)$ 'leri kısaltmak $x \neq 1$ için değerleri orijinali ile aynı olan daha basit bir kesir verir.

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x - 1)(x + 2)}{x(x - 1)} = \frac{x + 2}{x}, \quad x \neq 1$$

Daha basit olan kesri kullanarak $x \rightarrow 1$ için limiti yerine yazma ile buluruz:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x} = \frac{1 + 2}{1} = 3.$$

Şekil 2.8'a bakınız. ■

ÖRNEK 4 Bir Ortak Çarpan Oluşturmak ve Kısaltmak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}.$$

limitini hesaplayınız.

Çözüm Bu, önceki bölümde Örnek 10 da ele aldığımız limittir. $x = 0$ yazamayız, ayrıca pay ve paydanın hemen görülen bir ortak çarpanı yoktur. Pay ve paydayı $\sqrt{x^2 + 100} + 10$ (karekökten sonraki işareti değiştirerek elde edilen) ifadesi ile çarparak bir ortak çarpan oluşturabiliriz. Basit bir hesap pay'ı rasyonel hale getirir:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} &= \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 100} + 10}{\sqrt{x^2 + 100} + 10} \\ &= \frac{x^2 + 100 - 100}{x^2(\sqrt{x^2 + 100} + 10)} \\ &= \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 100} + 10)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 100} + 10}. \end{aligned}$$

Ortak Çarpan x^2

$x \neq 0$ için x^2 'yi kısaltın

Bu nedenle,

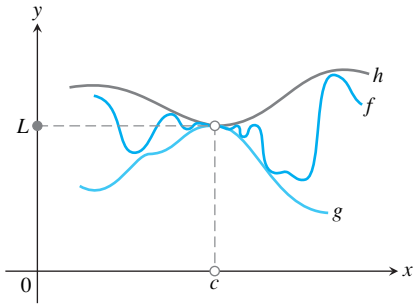
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 100} + 10} \\ &= \frac{1}{\sqrt{0^2 + 100} + 10} \\ &= \frac{1}{20} = 0.05. \end{aligned}$$

$x = 0$ 'da payda sıfır değildir; yerine yazın

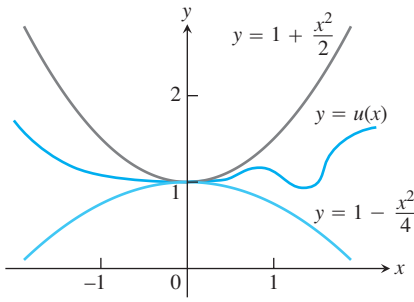
Bu hesap, önceki bölümde Örnek 10'daki belirsiz bilgisayar sonuçlarına karşılık doğru cevabı verir. ■

Sandöviç Teoremi

Aşağıdaki teorem ilerideki bölümlerde çeşitli limitleri hesaplamamızı sağlayacaktır. İsmi Sandöviç Teoremidir, çünkü değerleri, c noktasındaki limitleri aynı ve L olan başka iki g ve h fonksiyonunun değerleri arasına sıkıştırılmış bulunan f fonksiyonundan bahsetmek-



ŞEKİL 2.9 g ve h fonksiyonlarının grafikleri arasına sıkıştırılmış f fonksiyonunun grafiği.



ŞEKİL 2.10 Grafiği $y = 1 + (x^2/2)$ ve $y = 1 - (x^2/4)$ eğrileri arasındaki bölgede bulunan bir $u(x)$ fonksiyonunun $x \rightarrow 0$ iken limiti 1'dir. (Örnek 5)

tedir. Değerleri L 'ye yaklaşan iki fonksiyonun değerleri arasında sıkışmış olduğundan, f 'nin değerleri de L 'ye yaklaşmalıdır (Şekil 2.9). İspatını Ek 2'de bulabilirsiniz.

TEOREM 4 Sandöviç Teoremi

c 'yi içeren bir açık aralıktaki bütün x 'ler için, belki $x = c$ hariç olabilir, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ olduğunu varsayalım. Ayrıca

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L.$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ olur.

ÖRNEK 5 Sandöviç Teoremini Uygulamak

Her $x \neq 0$ için

$$1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2}$$

veriliyor. $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$ 'i bulun, u ne kadar karmaşık olursa olsun.

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - (x^2/4)) = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (x^2/2)) = 1$$

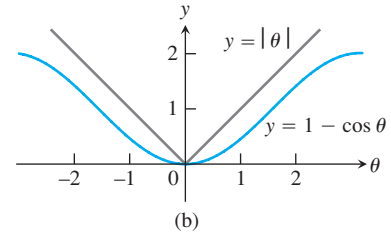
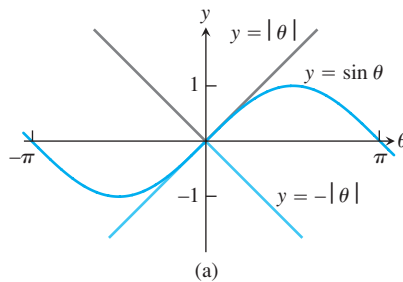
olduğundan, Sandöviç Teoreminden $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 1$ bulunur (Şekil 2.10). ■

ÖRNEK 6 Sandöviç Teoreminin Başka Uygulamaları

(a) (Şekil 2.11a'ya bakınız) $\sin \theta$ 'nin tanımından (Ek B3'e bakınız) her θ için $-\theta \leq \sin \theta \leq \theta$ olduğu görülür. Ayrıca, $\lim_{\theta \rightarrow 0} (-\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta = 0$ olduğundan

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = 0$$

elde ederiz.



ŞEKİL 2.11 Sandöviç Teoremi (a) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = 0$ ve (b) $\lim_{\theta \rightarrow 0} (1 - \cos \theta) = 0$ olduğunu doğrular (Örnek 6).

- (b) (Şekil 2.11b'ye bakınız). $\cos \theta$ 'nin tanımından, her θ için $0 \leq 1 - \cos \theta \leq |\theta|$ olduğu görülür ve $\lim_{\theta \rightarrow 0} (1 - \cos \theta) = 0$ veya

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$$

dir.

- (c) Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için, $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$, ise $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ dır. Düşünce: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ ve $x \rightarrow c$ iken $-|f(x)|$ ve $|f(x)|$ 'in limitleri 0 dır. ■

Limitlerin bir başka önemli özelliği aşağıdaki teoremden veriliyor. Sonraki bölümde bir ispatı verilmektedir.

TEOREM 5 c 'yi içeren bir açık aralıktaki bütün x 'ler için (c 'nin kendisi hariç olabilir) $f(x) \leq g(x)$ ise ve $x \rightarrow c$ 'ye yaklaşırsa f ve g 'nin her ikisinin de limitleri varsa

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

dir.

Teorem 5 te küçük veya eşittir $\leq$ eşitsizliğini kesin küçük $<$ eşitsizliği ile değiştirmekle elde edilen iddia yanlıştır. Şekil 2.11a her $\theta \neq 0$ için $-|\theta| < \sin \theta < |\theta|$, olduğunu fakat $\theta \rightarrow 0$ limitinde eşitliğin sağlandığını göstermektedir.

ALİŞTIRMALAR 2.2

Limit Hesaplamaları

1–18 alıştırmalarında limitleri bulunuz.

1. $\lim_{x \rightarrow -7} (2x + 5)$
2. $\lim_{x \rightarrow 12} (10 - 3x)$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 5x - 2)$
4. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 2x^2 + 4x + 8)$
5. $\lim_{t \rightarrow 6} 8(t - 5)(t - 7)$
6. $\lim_{s \rightarrow 2/3} 3s(2s - 1)$
7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{x + 6}$
8. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{4}{x - 7}$
9. $\lim_{y \rightarrow -5} \frac{y^2}{5 - y}$
10. $\lim_{y \rightarrow 2} \frac{y + 2}{y^2 + 5y + 6}$
11. $\lim_{x \rightarrow -1} 3(2x - 1)^2$
12. $\lim_{x \rightarrow -4} (x + 3)^{1984}$
13. $\lim_{y \rightarrow -3} (5 - y)^{4/3}$
14. $\lim_{z \rightarrow 0} (2z - 8)^{1/3}$
15. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3h + 1} + 1}$
16. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{\sqrt{5h + 4} + 2}$
17. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3h + 1} - 1}{h}$
18. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5h + 4} - 2}{h}$

19–36 alıştırmalarında limitleri bulunuz.

19. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25}$
20. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$
21. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$
22. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}$
23. $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 + t - 2}{t^2 - 1}$
24. $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2 + 3t + 2}{t^2 - t - 2}$
25. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2}$
26. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5y^3 + 8y^2}{3y^4 - 16y^2}$
27. $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^4 - 1}{u^3 - 1}$
28. $\lim_{v \rightarrow 2} \frac{v^3 - 8}{v^4 - 16}$
29. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$
30. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x - x^2}{2 - \sqrt{x}}$
31. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$
32. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 8} - 3}{x + 1}$
33. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 12} - 4}{x - 2}$
34. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$

$$35. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2 - \sqrt{x^2 - 5}}{x + 3}$$

$$36. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{5 - \sqrt{x^2 + 9}}$$

Limit Kurallarını Kullanmak

37. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ve $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -5$ olduğunu varsayın. Teorem 1'in, aşağıdaki işlemlerde (a), (b) ve (c) adımlarını gerçekleştirmek için kullanılan, kurallarını belirtin.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - g(x)}{(f(x) + 7)^{2/3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (2f(x) - g(x))}{\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 7)^{2/3}} \quad (a)$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 7)\right)^{2/3}} \quad (b)$$

$$= \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} 7\right)^{2/3}} \quad (c)$$

$$= \frac{(2)(1) - (-5)}{(1 + 7)^{2/3}} = \frac{7}{4}$$

38. $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 5$, $\lim_{x \rightarrow 1} p(x) = 1$ ve $\lim_{x \rightarrow 1} r(x) = 2$ olduğunu varsayın. Teorem 1'in, aşağıdaki işlemlerde (a), (b) ve (c) adımlarını gerçekleştirmek için kullanılan, kurallarını belirtin.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4 - r(x))} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{5h(x)}}{\lim_{x \rightarrow 1} (p(x)(4 - r(x)))} \quad (a)$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} 5h(x)}}{\left(\lim_{x \rightarrow 1} p(x)\right)\left(\lim_{x \rightarrow 1} (4 - r(x))\right)} \quad (b)$$

$$= \frac{\sqrt{5 \lim_{x \rightarrow 1} h(x)}}{\left(\lim_{x \rightarrow 1} p(x)\right)\left(\lim_{x \rightarrow 1} 4 - \lim_{x \rightarrow 1} r(x)\right)} \quad (c)$$

$$= \frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4 - 2)} = \frac{5}{2}$$

39. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 5$ ve $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = -2$ olduğunu varsayın. Aşağıdaki limitleri hesaplayın.

$$a. \lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) \quad b. \lim_{x \rightarrow c} 2f(x)g(x)$$

$$c. \lim_{x \rightarrow c} (f(x) + 3g(x)) \quad d. \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{f(x) - g(x)}$$

40. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -3$ olduğunu varsayın. Aşağıdaki limitleri hesaplayın.

$$a. \lim_{x \rightarrow 4} (g(x) + 3) \quad b. \lim_{x \rightarrow 4} xf(x)$$

$$c. \lim_{x \rightarrow 4} (g(x))^2 \quad d. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x)}{f(x) - 1}$$

41. $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 7$ ve $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = -3$ olduğunu varsayın. Aşağıdaki limitleri hesaplayın.

$$a. \lim_{x \rightarrow b} (f(x) + g(x)) \quad b. \lim_{x \rightarrow b} f(x) \cdot g(x)$$

$$c. \lim_{x \rightarrow b} 4g(x) \quad d. \lim_{x \rightarrow b} f(x)/g(x)$$

42. $\lim_{x \rightarrow 2} p(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow -2} r(x) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow -2} s(x) = -3$ olduğunu varsayın. Aşağıdaki limitleri bulun.

$$a. \lim_{x \rightarrow -2} (p(x) + r(x) + s(x))$$

$$b. \lim_{x \rightarrow -2} p(x) \cdot r(x) \cdot s(x)$$

$$c. \lim_{x \rightarrow -2} (-4p(x) + 5r(x))/s(x)$$

Ortalama Değişim Oranlarının Limitleri

Kirişler, teğetler ve anlık hızlarla olan ilişkileri yüzünden,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

şeklindeki limitlerle analizde çok sık karşılaşılır. 43–48 alıştırmalarında verilen x değerleri ve f fonksiyonları için bu limiti hesaplayın.

$$43. f(x) = x^2, \quad x = 1$$

$$44. f(x) = x^2, \quad x = -2$$

$$45. f(x) = 3x - 4, \quad x = 2$$

$$46. f(x) = 1/x, \quad x = -2$$

$$47. f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 7$$

$$48. f(x) = \sqrt{3x + 1}, \quad x = 0$$

Sandöviç Teoremini Kullanmak

49. $-1 \leq x \leq 1$ için $\sqrt{5 - 2x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{5 - x^2}$ ise $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 'i bulun.

50. Her x için $2 - x^2 \leq g(x) \leq 2 \cos x$ ise $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 'i bulun.

51. a. Sıfıra yakın bütün x değerleri için

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x} < 1$$

eşitsizliklerinin geçerli olduğu ispatlanabilir. Bu size

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x}$$

hakkında ne söyler? Yanıtınızı açıklayın.

- T** b. $-2 \leq x \leq 2$ için $y = 1 - (x^2/6)$, $y = (x \sin x)/(2 - 2 \cos x)$ ve $y = 1$ grafiklerini birlikte çizin. $x \rightarrow 0$ iken grafiklerin davranışını açıklayın.

52. a. Sıfıra yakın tüm x değerleri için

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$$

eşitsizliklerinin doğru olduğunu düşünün (Bölüm 11.9'da bunun geçerli olduğunu göreceksiniz). Bu size

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

hakkında ne söyler? Yanıtınızı açıklayın.

- b. $-2 \leq x \leq 2$ için $y = (1/2) - (x^2/24)$, $y = (1 - \cos x)/x^2$ ve $y = 1/2$ grafiklerini birlikte çizin. $x \rightarrow 0$ iken grafiklerin davranışını açıklayın.

Teori ve Örnekler

53. $[-1, 1]$ 'deki bütün x 'ler için $x^4 \leq f(x) \leq x^2$ ve $x < -1$ ve $x > 1$ için $x^2 \leq f(x) \leq x^4$ ise, hangi c noktalarında otomatik olarak $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ limitini bulabilirsiniz? Bu noktalardaki limitin değeri hakkında ne söyleyebilirsiniz?

54. Her $x \neq 2$ için $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ve

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -5$$

olduğunu varsayın, f , g ve h 'nin $x = 2$ 'deki değerleri için bir şey söyleyebilir miyiz? $f(2) = 0$ olabilir mi? $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ olabilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

55. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$ ise, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ 'i bulun.

56. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ ise

a. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x}$ 'i bulun.

57. a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$ ise, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 'i bulun.

b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 4$ ise, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 'i bulun.

58. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ ise

a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 'i bulun.

T 59. a. Orijine gerektiği kadar yaklaşarak, $g(x) = x \sin(1/x)$ grafiğini çizip, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ limitini tahmin edin.

b. (a)'daki yanıtınızı bir ispatla doğrulayın.

T 60. a. Orijine gerektiği kadar yaklaşarak, $h(x) = x^2 \cos(1/x^3)$ grafiğini çizip, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ limitini tahmin edin.

b. (a)'daki yanıtınızı bir ispatla doğrulayın.

2.3

Bir Limitin Kesin Tanımı

Gayri resmi tanımla sezgisel olarak çalışmak suretiyle limit kavramı hakkında biraz fikir sahibi olduğumuzu düşünerek dikkatimizi limitin kesin tanımına çeviriyoruz. Gayri resmi tanımdaki “yeterince yakın” gibi terimleri herhangi özel bir örneğe uygulanabilecek özel koşullarla değiştireceğiz. Bir kesin tanımla önceki bölümde verilen limit özelliklerini kesin bir şekilde ispat edebileceğiz ve analiz çalışmada başka önemli limitleri saptayabileceğiz.

$x \rightarrow x_0$ iken $f(x)$ 'in limitinin L 'ye eşit olduğunu göstermek için x x_0 'a “yeterince yakın” tutularak $f(x)$ ile L arasındaki aralığın “seçtiğimiz kadar küçük” yapılabileceğini göstermemiz gerekir. Bunun, $f(x)$ ile L arasındaki aralığın ölçüsünü belirlediğimizde ne gerektireceğine bakalım.

ÖRNEK 1 Bir Lineer Fonksiyon

$y = 2x - 1$ fonksiyonunu $x_0 = 4$ yakınında ele alalım. Sezgisel olarak, x 4'e yakın iken y 'nin 7'ye yakın olduğu açıktır, şu halde, $\lim_{x \rightarrow 4} (2x - 1) = 7$. Halbuki, $y = 2x - 1$ 'in $y_0 = 7$ 'den, örneğin, 2 birimden daha az fark etmesi için x değeri $x_0 = 4$ 'e ne kadar yakın olmalıdır?

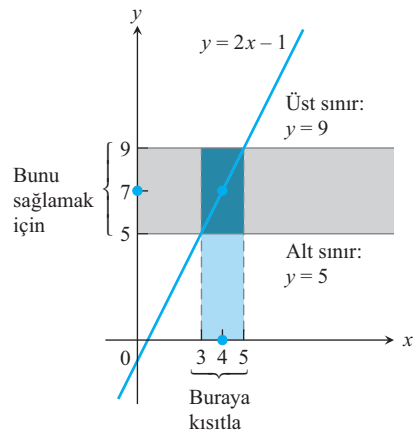
Çözüm Bize sorulan şu: x 'in hangi değerleri için $|y - 7| < 2$ olur? Yanıtı bulmak için önce $|y - 7|$ 'yi x cinsinden açmalıyız.

$$|y - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8|$$

Soru artık şu hale gelir: Hangi x değerleri $|2x - 8| < 2$ eşitsizliğini sağlar? Bulmak için, eşitsizliği çözeriz:

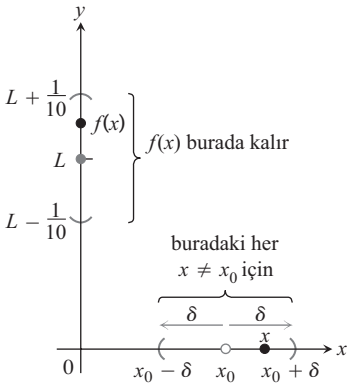
$$\begin{aligned} |2x - 8| &< 2 \\ -2 &< 2x - 8 < 2 \\ 6 &< 2x < 10 \\ 3 &< x < 5 \\ -1 &< x - 4 < 1. \end{aligned}$$

x 'i $x_0 = 4$ 'ün 1 birim yakınında tutmak y 'yi $y_0 = 7$ 'nin 2 birim yakınında tutar (Şekil 2.12). ■



ŞEKİL 2.12 x 'i $x_0 = 4$ 'ün 1 birim

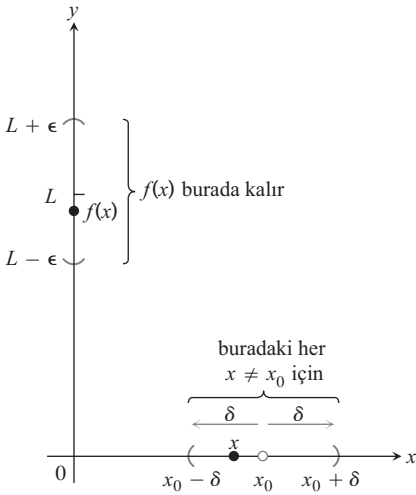
yakınında tutmak y 'yi $y_0 = 7$ 'nin 2 birim yakınında tutar (Örnek 1).



ŞEKİL 2.13 x 'i $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ aralığı içinde tutmakla $f(x)$ 'i

$\left(L - \frac{1}{10}, L + \frac{1}{10}\right)$ aralığının içinde

tutacak şekilde bir $\delta > 0$ 'ı nasıl tanımlamalıyız?



ŞEKİL 2.14 Limit tanımında δ ile ϵ 'nin ilişkisi.

Önceki örnekte bir fonksiyonun $f(x)$ çıktısının bir L limit değeri civarında belirlenmiş bir aralıkta kaldığından emin olmak için x 'in belirli bir x_0 değerine ne kadar yakın olması gerektiği belirledik. $x \rightarrow x_0$ iken $f(x)$ 'in limitinin gerçekten L olduğunu göstermek için x 'i x_0 'a yeterince yakın tutmakla $f(x)$ ile L arasındaki aralığın, ne kadar küçük olursa olsun, belirlenmiş herhangi bir hatadan daha küçük yapılabildiğini göstermeliyiz.

Limitin Tanımı

x (x_0 değerini almadan) x_0 'a yaklaşırken bir $f(x)$ fonksiyonunun değerlerini izlediğimizi varsayalım. Elbette, x x_0 'ın δ kadar yakınındayken $f(x)$ L 'nin bir birimin onda biri kadar yakınındadır diyebilmeyi istiyoruz (Şekil 2.13). Fakat bu kadarı da yeterli değildir, çünkü x x_0 'a yaklaşmaya devam ettikçe, $f(x)$ 'i L 'ye yaklaştırmadan $L - 1/10$ ile $L + 1/10$ aralığında salınmaktan ne alıkoymacaktır?

Hatanın $1/100$ veya $1/1000$ veya $1/10,000$ 'den fazla olmaması istenebilir. Her defasında, x_0 etrafında, x 'i o aralık içinde tutmanın yeni bir hata değeri tanımlayacağı bir δ -aralığı buluruz. Ve her defasında, $f(x)$ 'in son anda L 'den kaçma olasılığı vardır.

Aşağıdaki şekiller problemi göstermektedir. Bunu bir şüpheci ile bir bilim adamı arasındaki kavgaya benzetebilirsiniz. Şüpheci, limitin bulunmayacağını, veya varlığından kuşku duyulabileceğini ispatlamak için ϵ -değerleri ile meydan okur ve bilim adamı da her meydan okumayı x_0 etrafında bir δ -aralığıyla yanıtlar.

Bu sonsuz gibi görünen meydan okuma ve yanıt dizisini nasıl durdurabiliriz? Meydan okuyanın üretebileceği her ϵ hata değeri için, $f(x)$ 'i L 'den o hata kadar uzak bir aralık içinde bulunduracak şekilde x 'i x_0 'a “yeterince yakın” tutacak bir δ uzaklığı bulabileceğimizi, hesaplayabileceğimizi veya yaratabileceğimizi ispat ederek (Şekil 2.14). Bu bizi limitin kesin tanımına götürür.

TANIM Bir Fonksiyonun Limiti

$f(x)$, x_0 civarında (x_0 'da tanımlı olmayabilir) bir açık aralıkta tanımlı olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık,

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ eşitsizliğini sağlayan bütün } x\text{'ler için } |f(x) - L| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, x x_0 'a yaklaşırken, $f(x)$ L limitine yaklaşıyor der ve

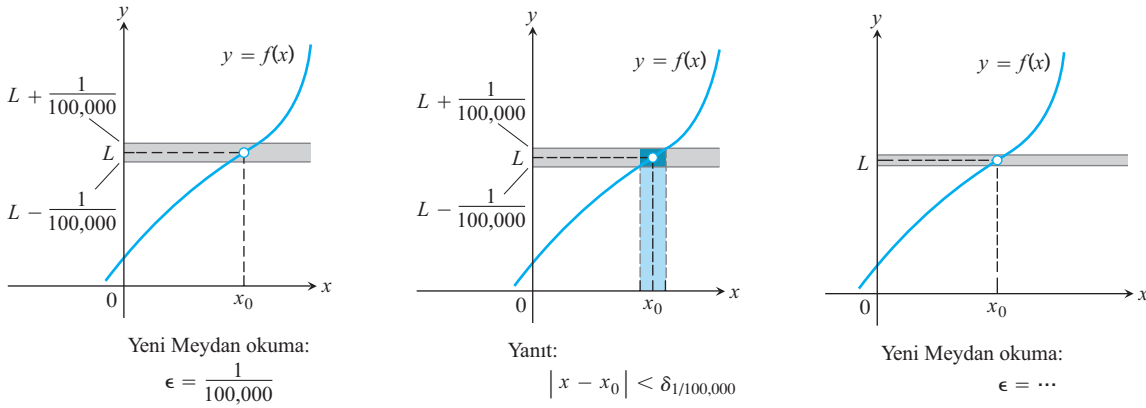
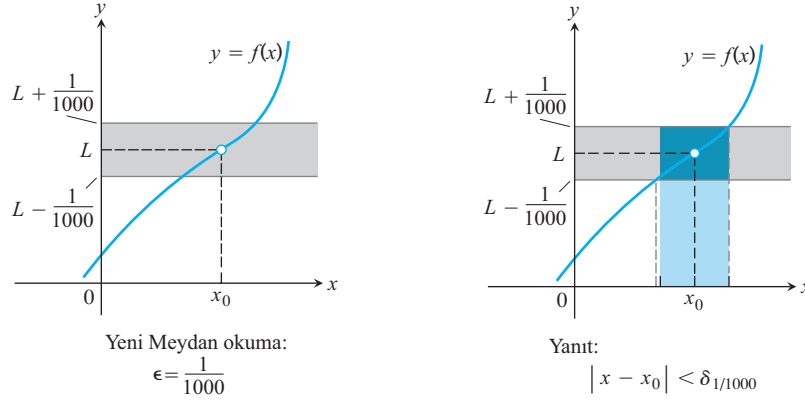
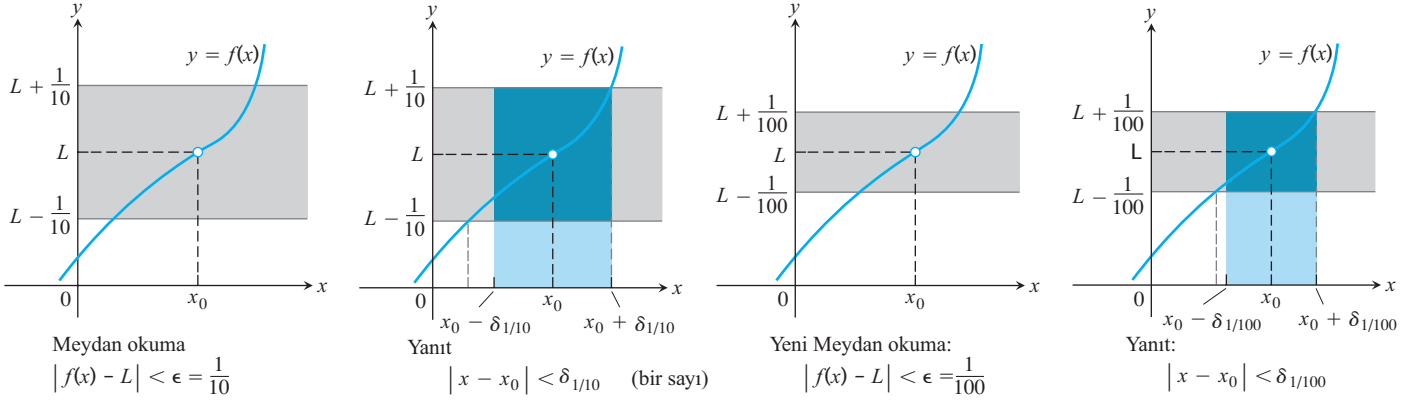
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

yazarız.

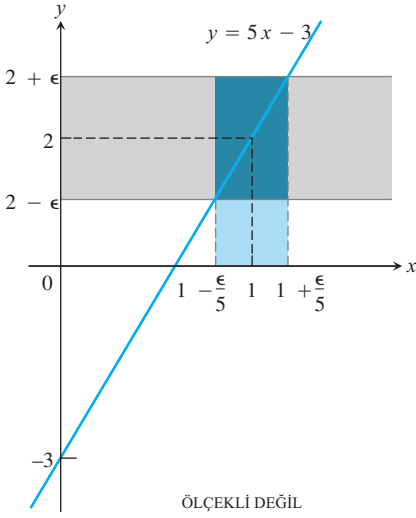
Tanım hakkında düşünmenin bir yolu, yakın bir hata dahilinde bir jeneratör mili yaptığımızı varsaymaktır. L çapına ulaşmayı deneyebiliriz, ama hiçbir şey mükemmel olmadığından $L - \epsilon$ ile $L + \epsilon$ arasında bir $f(x)$ çapıyla yetinmek zorunda kalabiliriz. δ , milin çapındaki bu hassaslığı garantilemek için x 'in kontrol ayarında ne kadar hassas olmamız gerektiğinin ölçüsüdür. Hata payı değiştikçe δ 'yı yeniden ayarlamak zorunda olduğumuza dikkat edin. Yani, kontrol aralığımızın ne kadar olması gerektiğini söyleyen δ değeri hata payı ϵ 'nin değerine bağlıdır.

Tanımı Test Eden Örnekler

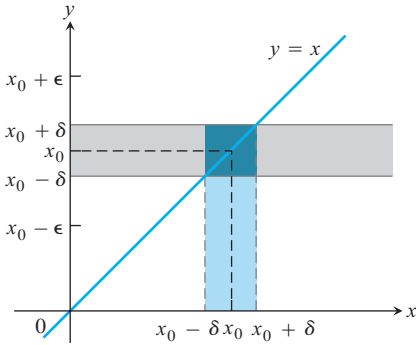
Limitin esas tanımı bir fonksiyonun limitinin nasıl bulunacağını söylemek yerine, düşünülen bir limitin doğru olup olmadığını anlamamızı sağlar. Aşağıdaki örnekler belirli



fonksiyonlar için bu tanımın nasıl kullanılacağını göstermektedir (İlk iki örnek Bölüm 2.1'deki 7 ve 8 örneklerinin bazı kısımlarına karşılık gelir). Ancak, tanımın asıl amacı bu gibi hesaplamalar yapmak değil, belirli limitlerin hesaplanmasını kolaylaştıracak genel teoremlerin ispatını sağlamaktır.



ŞEKİL 2.15 $f(x) = 5x - 3$ ise,
 $0 < |x - 1| < \epsilon/5$ olması
 $|f(x) - 2| < \epsilon$ olmasını garantiler
 (Örnek 2).



ŞEKİL 2.16 $f(x) = x$ fonksiyonu için $\delta \leq \epsilon$ iken $0 < |x - x_0| < \delta$ olmasının
 $|f(x) - x_0| < \epsilon$ olmasını garantilediğini
 görürüz (Örnek 3a).

ÖRNEK 2 Tanımı Test Etmek

$$\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2.$$

olduğunu gösterin.

Çözüm Limit tanımında $x_0 = 1$, $f(x) = 5x - 3$ ve $L = 2$ koyun. Verilen herhangi bir $\epsilon > 0$ için, $x \neq 1$ ve $\delta > 0$ ve x 'in $x_0 = 1$ 'e uzaklığı δ 'dan küçük ise, yani

$$0 < |x - 1| < \delta,$$

ise $f(x)$ 'in $L = 2$ 'ye uzaklığı ϵ 'dan küçüktür, yani

$$|f(x) - 2| < \epsilon.$$

ifadesinin doğru olacağı uygun bir δ bulmalıyız.

δ 'yı ϵ -eşitsizliğinden geriye doğru giderek buluruz:

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| < \epsilon$$

$$5|x - 1| < \epsilon$$

$$|x - 1| < \epsilon/5.$$

Böylece, $\delta = \epsilon/5$ alabiliriz (Şekil 2.15). $0 < |x - 1| < \delta = \epsilon/5$ ise,

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| = 5|x - 1| < 5(\epsilon/5) = \epsilon,$$

dur ve bu $\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2$ olduğunu ispatlar.

$0 < |x - 1| < \delta$ olmasının $|5x - 5| < \epsilon$ olmasını gerektirdiği tek değer $\delta = \epsilon/5$ değeri değildir. Daha küçük herhangi bir δ da olur. Tanım “en iyi” pozitif δ sormuyor, işe yarayacak bir tane soruyor. ■

ÖRNEK 3 Birim ve Sabit Fonksiyonların Limitleri

İspatlayın:

$$(a) \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \quad (b) \lim_{x \rightarrow x_0} k = k \quad (k \text{ sabit}).$$

Çözüm

(a) $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ eşitsizliğini sağlayan her } x \text{ için } |x - x_0| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta > 0$ bulmalıyız. ϵ 'a eşit veya daha küçük bir δ için bu sağlanır (Şekil 2.16). Bu da $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ olduğunu ispatlar.

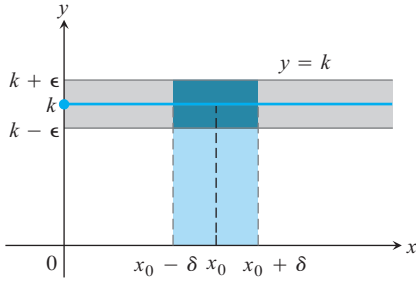
(b) $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ eşitsizliğini sağlayan her } x \text{ için } |k - k| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta > 0$ bulmalıyız. $k - k = 0$ olduğundan herhangi bir pozitif sayıyı δ olarak kullanabiliriz (Şekil 2.17). Bu da $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$ olduğunu ispatlar. ■

Verilen Epsilonlar İçin Deltaları Cebirsel Olarak Bulma

Örnek 2 ve 3'te, $|f(x) - L|$ 'nin ϵ 'dan küçük olduğu x değerleri aralığı x_0 etrafında simetrikti ve δ 'yı aralığın uzunluğunun yarısı olarak alabildik. Böyle bir simetri, genelde



ŞEKİL 2.17 $f(x) = k$ fonksiyonu için, herhangi bir pozitif δ için $|f(x) - k| < \epsilon$ 'un sağladığını görürüz (Örnek 3b).

olduğu gibi, bulunmadığında, δ 'yı x_0 'dan aralığın en yakın uç noktasına olan uzaklık olarak alırız.

ÖRNEK 4 Deltayı Cebirsel Olarak Bulmak

$\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-1} = 2$ limiti için, $\epsilon = 1$ olduğunda işe yarayacak bir $\delta > 0$ değeri bulun. Yani, $\delta > 0$ eşitsizliğini sağlayan her x için

$$0 < |x - 5| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x-1} - 2| < 1$$

gerektirmesi sağlanacak şekilde bir $\delta > 0$ değeri bulun.

Çözüm Araştırmamızı, aşağıda verildiği gibi iki adımda gerçekleştiririz.

1. $x_0 = 5$ 'i içeren ve içerdigi her $x \neq x_0$ için eşitsizliğin sağlandığı bir aralık bulmak üzere $|\sqrt{x-1} - 2| < 1$ eşitsizliğini çözün.

$$\begin{aligned} |\sqrt{x-1} - 2| &< 1 \\ -1 &< \sqrt{x-1} - 2 < 1 \\ 1 &< \sqrt{x-1} < 3 \\ 1 &< x-1 < 9 \\ 2 &< x < 10 \end{aligned}$$

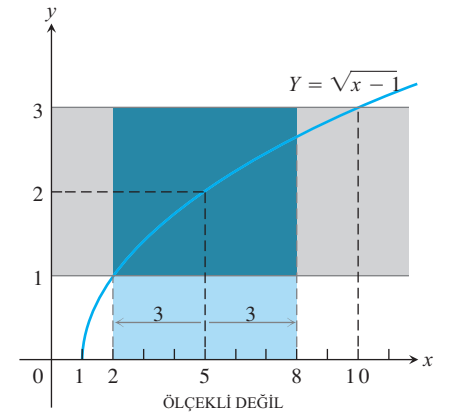
Eşitsizlik $(2, 10)$ açık aralığındaki her x için geçerli olduğundan dolayı bu aralıktaki her $x \neq 5$ için geçerlidir (Şekil 2.19'a bakınız).

2. Merkezi $x_0 = 5$ olan ve $5 - \delta < x < 5 + \delta$ aralığını $(2, 10)$ aralığı içine yerleştiren bir $\delta > 0$ değeri bulun. 5'ten $(2, 10)$ açık aralığının en yakın uç noktasına olan uzaklık 3'tür (Şekil 2.18). $\delta = 3$ veya daha küçük herhangi bir pozitif sayı alırsak, $0 < |x - 5| < \delta$ eşitsizliği otomatik olarak x 'i, $|\sqrt{x-1} - 2| < 1$ olacak şekilde, 2 ile 10 arasına yerleştirecektir (Şekil 2.19).

$$0 < |x - 5| < 3 \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x-1} - 2| < 1$$



ŞEKİL 2.18 $x_0 = 5$ civarındaki 3 yarıçaplı bir açık aralık $(2, 10)$ açık aralığının içinde kalacaktır.



ŞEKİL 2.19 Örnek 4'teki fonksiyon ve aralıklar.

Verilen, f, L, x_0 ve $\epsilon > 0$ Değerleri İçin δ 'nın Cebirsel Bulunuşu

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{iken} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

eşitsizliğin geçerli olmasını sağlayacak bir $\delta > 0$ sayısının bulunması iki adımda gerçekleşir.

1. x_0 'ı içeren ve içerdiği her $x \neq x_0$ için eşitsizliğin sağlandığı bir (a, b) açık aralığı bulmak üzere $|f(x) - L| < \epsilon$ eşitsizliğini çözün.
2. Merkezi x_0 'da olan $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ açık aralığını (a, b) aralığı içine yerleştirecek bir $\delta > 0$ değeri bulun. Bu δ -aralığındaki her $x \neq x_0$ için $|f(x) - L| < \epsilon$ eşitsizliği sağlanacaktır.

ÖRNEK 5 Deltayı Cebirsel Olarak Bulmak

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2. \end{cases}$$

ise, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ olduğunu ispat edin.

Çözüm Amacımız $\epsilon > 0$ verildiğinde, $0 < |x - 2| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x için

$$|f(x) - 4| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunduğunu göstermektir.

1. $x_0 = 2$ 'yi içeren ve içerdiği her $x \neq x_0$ için eşitsizliğin sağlandığı bir açık aralık bulmak üzere $|f(x) - 4| < \epsilon$ eşitsizliğini çözün.

$x \neq x_0 = 2$ için, $f(x) = x^2$ ve çözülecek eşitsizlik $|x^2 - 4| < \epsilon$ 'dur.

$$|x^2 - 4| < \epsilon$$

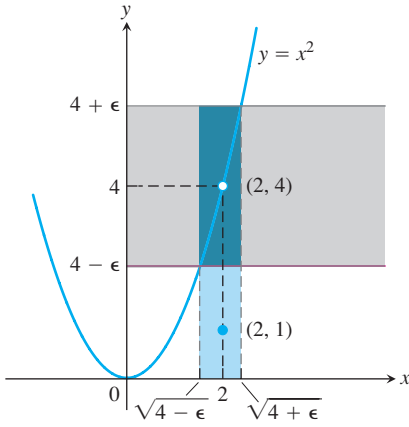
$$-\epsilon < x^2 - 4 < \epsilon$$

$$4 - \epsilon < x^2 < 4 + \epsilon$$

$$\sqrt{4 - \epsilon} < |x| < \sqrt{4 + \epsilon}$$

$$\sqrt{4 - \epsilon} < x < \sqrt{4 + \epsilon}$$

$\epsilon < 4$ varsayımı; aşağıya bakın
 $x_0 = 2$ etrafında eşitsizliği çözen
bir açık aralık.



ŞEKİL 2.20 Örnek 5 teki fonksiyon için $x = 2$ 'yi içeren ve $|f(x) - 4| < \epsilon$ 'un sağlandığı bir aralık

$|f(x) - 4| < \epsilon$ eşitsizliği $(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon})$ açık aralığındaki her $x \neq 2$ için geçerlidir (Şekil 2.20).

2. $(2 - \delta, 2 + \delta)$ simetrik aralığını $(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon})$ aralığı için yerleştirecek bir $\delta > 0$ değeri bulun.

δ 'yı $x_0 = 2$ 'den $(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon})$ aralığının en yakın uç noktasına uzaklık olarak alın. Başka bir deyişle, $\delta = \min \{2 - \sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon} - 2\}$ yani $2 - \sqrt{4 - \epsilon}$ ve $\sqrt{4 + \epsilon} - 2$ değerinin en küçüğü olarak kabul edin. Eğer δ 'nın değeri bu veya bundan küçük bir pozitif sayıysa, $0 < |x - 2| < \delta$ eşitsizliği otomatik olarak x 'i, $|f(x) - 4| < \epsilon$ olacak şekilde, $\sqrt{4 - \epsilon}$ ile $\sqrt{4 + \epsilon}$ arasına yerleştirecektir. $0 < |x - 2| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x için

$$|f(x) - 4| < \epsilon$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

$\epsilon < 4$ olduğunu varsaymak neden doğrudur? Çünkü, $x, 0 < |x - 2| < \delta$ eşitsizliğinin $|f(x) - 4| < \epsilon < 4$ anlamına geleceği bir δ değeri bulurken, daha büyük ϵ değerleri için de geçerli olacak bir δ değeri bulduk.

Son olarak, $\delta = \min \{2 - \sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon} - 2\}$ seçerken kazandığımız özgürlüğü ele alalım. Hangisinin en küçük olduğunu düşünmek için hiç zaman harcamadık. Sadece δ 'nın küçüğünü temsil ettiğini kabul edip, ispatımızı tamamladık. ■

Tanımı Kullanarak Teorem İspatlama

Genelde, limitin esas tanımını deminki örneklerde olduğu gibi belirli limitlerin doğru olduğunu göstermekte kullanmayız. Bunun yerine limit hakkındaki genel teoremlere, özellikle de Bölüm 2.2'dekilere başvururuz. Tanım bu teoremleri ispatlamakta kullanılır (EK 2). Bir örnek olarak, Teorem 1'in 1. bölümünü, Toplama Kuralını ispatlayalım.

ÖRNEK 6 Bir Toplamanın Limiti Kuralının İspatı

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ ve $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ veriliyor.

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$$

olduğunu ispatlayın.

Çözüm $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$0 < |x - c| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x için $|f(x) + g(x) - (L + M)| < \epsilon$ olacak şekilde bir δ sayısı bulmak istiyoruz. Terimleri bir araya getirerek

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| && \text{Üçgen eşitsizliği:} \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| && |a + b| \leq |a| + |b| \end{aligned}$$

buluruz. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ olduğundan,

$$0 < |x - c| < \delta_1 \text{ eşitsizliğini sağlayan her } x \text{ için } |f(x) - L| < \epsilon/2$$

olacak şekilde bir $\delta_1 > 0$ sayısı da bulunabilir. Aynı şekilde, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ olduğundan

$$0 < |x - c| < \delta_2 \text{ eşitsizliğini sağlayan her } x \text{ için } |g(x) - M| < \epsilon/2$$

olacak şekilde bir $\delta_2 > 0$ sayısı da bulunabilir. $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$, yani δ_1 ve δ_2 'nin en küçüğü olsun. $0 < |x - c| < \delta$ ise $|x - c| < \delta_1$ ve dolayısıyla $|f(x) - L| < \epsilon/2$ olur ve $0 < |x - c| < \delta$ ise $|x - c| < \delta_2$ ve $|g(x) - M| < \epsilon/2$ olacaktır. Buradan,

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

bulunur. Bu da $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$ olduğunu gösterir. ■

Bölüm 2.2'deki Teorem 5'i de ispat edelim

ÖRNEK 7 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ ve $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ ve c 'yi içeren bir açık aralıktaki bütün x 'ler (c 'nin kendisi hariç olabilir) için $f(x) \leq g(x)$ olduğu veriliyor. $L \leq M$ olduğunu ispat edin.

Çözüm Çelişki yöntemi ile ispatı kullanacağız. $L > M$ olduğunu kabul edelim. Teorem 1'deki farkın limiti özelliğine göre,

$$\lim_{x \rightarrow c} (g(x) - f(x)) = M - L$$

dir. Bu nedenle, her $\epsilon > 0$ için, $0 < |x - c| < \delta$ oldukça

$$|(g(x) - f(x)) - (M - L)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.

Kabulümüşe göre $L - M > 0$ olduğundan özel olarak $\epsilon = L - M$ alırsak ve $0 < |x - c| < \delta$ oldukça $|(g(x) - f(x)) - (M - L)| < L - M$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Herhangi bir a için $a \leq |a|$ olduğundan

$$0 < |x - c| < \delta \text{ oldukça } |(g(x) - f(x)) - (M - L)| < L - M$$

bulunur ve kısaltmalar yapılarak

$$g(x) < f(x) \text{ oldukça } 0 < |x - c| < \delta$$

elde edilir. Fakat bu, $f(x) \leq g(x)$ olması ile çelişir. Böylece, $L > M$ eşitsizliği yanlış olmalıdır. Bu yüzden $L \leq M$ dir.

■

ALİŞTIRMALAR 2.3

Bir Nokta Etrafına Aralık Yerleştirme

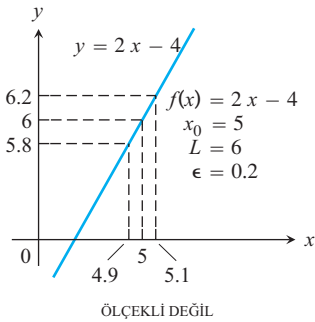
1-6 alıştırmalarında, x -ekseninde x_0 noktasını da içeren (a, b) aralığını çizin. Sonra, $0 < |x - x_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x için $a < x < b$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ değeri bulun.

1. $a = 1$, $b = 7$, $x_0 = 5$
2. $a = 1$, $b = 7$, $x_0 = 2$
3. $a = -7/2$, $b = -1/2$, $x_0 = -3$
4. $a = -7/2$, $b = -1/2$, $x_0 = -3/2$
5. $a = 4/9$, $b = 4/7$, $x_0 = 1/2$
6. $a = 2.7591$, $b = 3.2391$, $x_0 = 3$

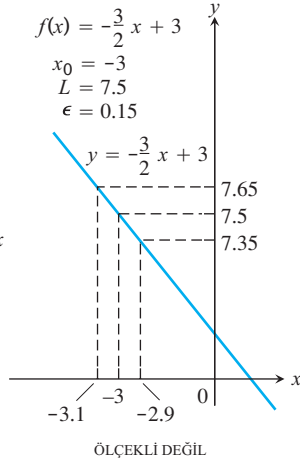
Deltaları Grafikten Bulma

7-14 alıştırmalarında, $0 < |x - x_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x için $|f(x) - L| < \epsilon$ olmasını sağlayacak $\delta > 0$ bulmak için grafikleri kullanın.

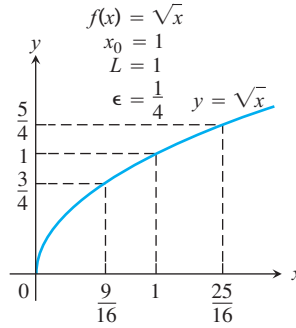
7.



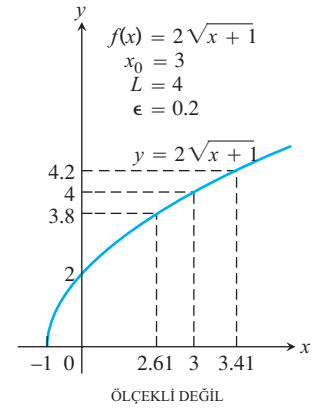
8.



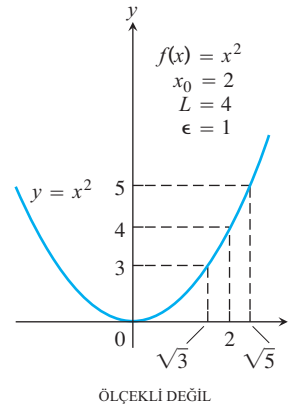
9.



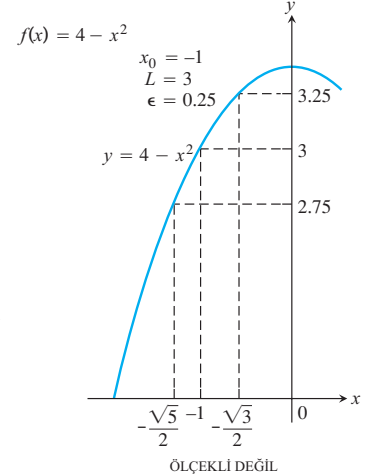
10.



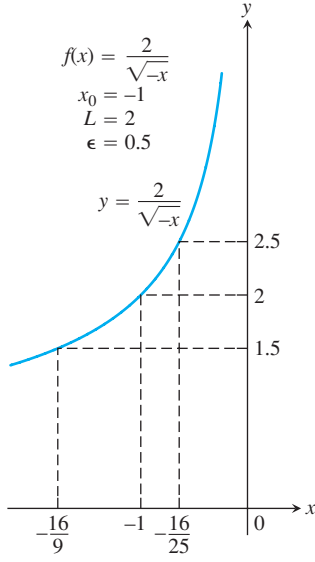
11.



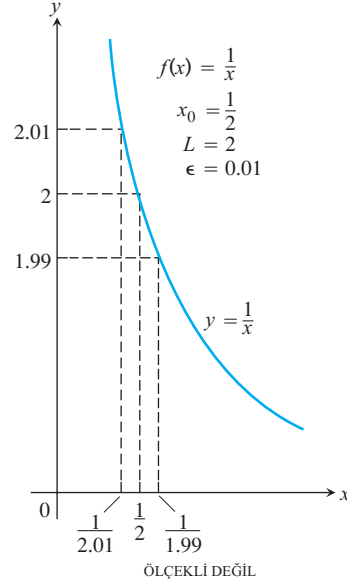
12.



13.



14.



Deltaları Cebirsel Olarak Bulma

15–30 alıştırmalarının her birinde bir $f(x)$ fonksiyonu ile L , x_0 ve $\epsilon > 0$ sayıları verilmektedir. Her bir durumda, x_0 civarında $|f(x) - L| < \epsilon$ eşitsizliğinin sağlandığı bir açık aralık bulun. Sonra $0 < |x - x_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x noktasında $|f(x) - L| < \epsilon$ eşitsizliğinin geçerli olacağı bir $\delta > 0$ sayısı bulun.

15. $f(x) = x + 1$, $L = 5$, $x_0 = 4$, $\epsilon = 0.01$
16. $f(x) = 2x - 2$, $L = -6$, $x_0 = -2$, $\epsilon = 0.02$
17. $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $L = 1$, $x_0 = 0$, $\epsilon = 0.1$
18. $f(x) = \sqrt{x}$, $L = 1/2$, $x_0 = 1/4$, $\epsilon = 0.1$
19. $f(x) = \sqrt{19 - x}$, $L = 3$, $x_0 = 10$, $\epsilon = 1$
20. $f(x) = \sqrt{x - 7}$, $L = 4$, $x_0 = 23$, $\epsilon = 1$
21. $f(x) = 1/x$, $L = 1/4$, $x_0 = 4$, $\epsilon = 0.05$
22. $f(x) = x^2$, $L = 3$, $x_0 = \sqrt{3}$, $\epsilon = 0.1$
23. $f(x) = x^2$, $L = 4$, $x_0 = -2$, $\epsilon = 0.5$
24. $f(x) = 1/x$, $L = -1$, $x_0 = -1$, $\epsilon = 0.1$
25. $f(x) = x^2 - 5$, $L = 11$, $x_0 = 4$, $\epsilon = 1$
26. $f(x) = 120/x$, $L = 5$, $x_0 = 24$, $\epsilon = 1$
27. $f(x) = mx$, $m > 0$, $L = 2m$, $x_0 = 2$, $\epsilon = 0.03$
28. $f(x) = mx$, $m > 0$, $L = 3m$, $x_0 = 3$, $\epsilon = c > 0$
29. $f(x) = mx + b$, $m > 0$, $L = (m/2) + b$, $x_0 = 1/2$, $\epsilon = c > 0$
30. $f(x) = mx + b$, $m > 0$, $L = m + b$, $x_0 = 1$, $\epsilon = 0.05$

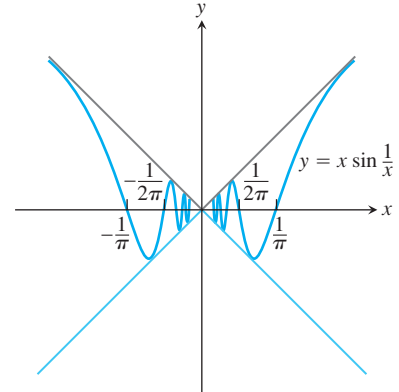
Limit Üzerine Biraz Daha Alıştırma

31–36 alıştırmalarında bir $f(x)$ fonksiyonu, bir x_0 noktası ve bir pozitif ϵ sayısı verilmektedir. $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 'i ve $0 < |x - x_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x için $|f(x) - L| < \epsilon$ olmasını sağlayacak bir $\delta > 0$ sayısı bulun.

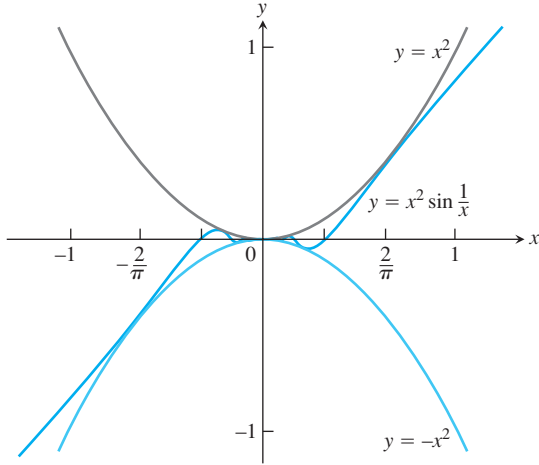
31. $f(x) = 3 - 2x$, $x_0 = 3$, $\epsilon = 0.02$
32. $f(x) = -3x - 2$, $x_0 = -1$, $\epsilon = 0.03$
33. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x_0 = 2$, $\epsilon = 0.05$
34. $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 5}{x + 5}$, $x_0 = -5$, $\epsilon = 0.05$
35. $f(x) = \sqrt{1 - 5x}$, $x_0 = -3$, $\epsilon = 0.5$
36. $f(x) = 4/x$, $x_0 = 2$, $\epsilon = 0.4$

37–50 alıştırmalarındaki limitleri ispatlayın.

37. $\lim_{x \rightarrow 4} (9 - x) = 5$
38. $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 7) = 2$
39. $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x - 5} = 2$
40. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4 - x} = 2$
41. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$
42. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq -2 \\ 1, & x = -2 \end{cases}$
43. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$
44. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$
45. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = -6$
46. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$
47. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, $f(x) = \begin{cases} 4 - 2x, & x < 1 \\ 6x - 4, & x \geq 1 \end{cases}$
48. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ x/2, & x \geq 0 \end{cases}$
49. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$



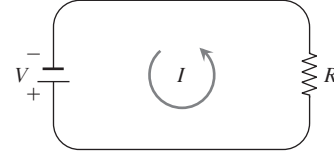
50. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$



Teori ve Örnekler

51. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = k$ demenin ne anlama geldiğini açıklayın.
52. İspatlayın; $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ ve $\lim_{h \rightarrow 0} f(h + c) = L$.
53. **Limitler hakkında yanlış bir ifade** Örnek vererek aşağıdaki ifadenin yanlış olduğunu gösterin.
 x x_0 'a yaklaşırken $f(x)$ L 'ye yaklaşıyorsa, $f(x)$ 'in x x_0 'a yaklaşırkenki limiti L sayısıdır.
 Örneğinizdeki fonksiyonun limitinin $x \rightarrow x_0$ iken neden L olmadığını açıklayın.
54. **Limitler hakkında yanlış bir ifade daha** Örnek vererek aşağıdaki ifadenin yanlış olduğunu gösterin.
 Verilen bir $\epsilon > 0$ için, $|f(x) - L| < \epsilon$ olacak şekilde bir x bulunuyorsa, L sayısı $f(x)$ 'in x x_0 'a yaklaşırkenki limitidir.
 Örneğinizdeki fonksiyonun limitinin $x \rightarrow x_0$ iken neden L olmadığını açıklayın.
- T** 55. **Motor silindiri yapma** Kesit alanı 9 in^2 'lik bir motor silindiri yapmadan önce, yarıçapı $x_0 = 3.385$ inç olan ideal bir silindirin çapından ne kadar sapma yapabileceğinizi ve istenen 9 in^2 'lik alanın 0.01 in^2 civarında bir alan elde edebileceğinizi bilmek zorundasınız. Bunu bulmak için, $A = \pi(x/2)^2$ kabul edin ve $|A - 9| \leq 0.01$ olabilmesi için x 'i hangi aralıkta tutmanız gerektiğini bulun. Hangi aralığı bulursunuz?
56. **Elektirsel direnç imal etme** Şekilde gösterilen elektrik devreleri gibi devreler için Ohm Kanunu $V = RI$ olduğunu söyley. Bu denklemde V sabit bir gerilim, I amper olarak akım ve R de ohm olarak dirençtir. Firmanızdan V 'nin 120 volt, I 'nin da 5 ± 0.1 A olacağı bir devreye direnç hazırlaması istenmiş olsun.

I 'nin hedef değer $I_0 = 5$ 'in 0.1 A civarında olması için R hangi aralıkta olmalıdır?

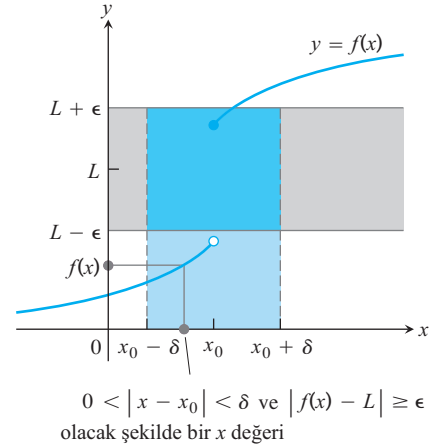


$x \rightarrow x_0$ iken Ne Zaman L sayısı $f(x)$ 'in Limiti Değildir?

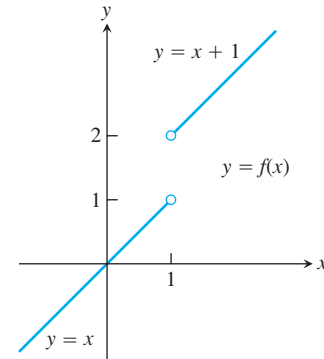
$0 < |x - x_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x için $|f(x) - L| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunamayacağını gösteren bir $\epsilon > 0$ bularak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq L$ olduğunu ispatlayabiliriz. Bunu, seçtiğimiz ϵ 'na karşılık her $\delta > 0$ için

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{and} \quad |f(x) - L| \geq \epsilon.$$

olacak şekilde bir x -değeri bulunduğunu göstererek yaparız.



57. $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$ olsun.



- a. $\epsilon = 1/2$ olsun. Hiçbir $\delta > 0$ 'ın aşağıdaki koşulu sağlamayacağını gösterin:

$$0 < |x - 1| < \delta \text{ eşitsizliğini sağlayan her } x \text{ için } |f(x) - 2| < 1/2$$

Yani, her $\delta > 0$ için,

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ ve } |f(x) - 2| \geq 1/2$$

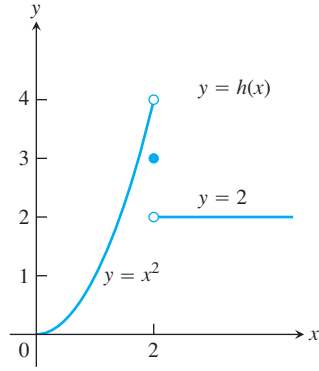
olacak şekilde bir x değeri olduğunu gösterin.

Bu $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 2$ olduğunu gösterecektir.

- b. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 1$ olduğunu gösterin.

- c. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 1.5$ olduğunu gösterin.

58.
$$h(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ 2, & x > 2. \end{cases} \text{ olsun.}$$



Şunları gösterin.

a. $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) \neq 4$

b. $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) \neq 3$

c. $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) \neq 2$

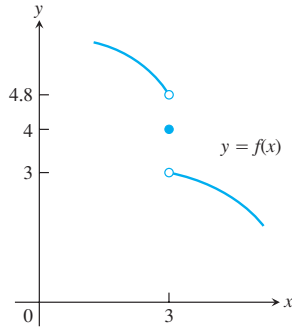
59. Aşağıda grafiği verilen fonksiyon için, neden

a. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq 4$

b. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq 4.8$

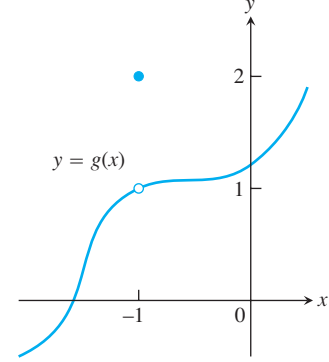
c. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq 3$

olduğunu açıklayın.



60. a. Aşağıdaki grafik için $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) \neq 2$ olduğunu gösterin.

- b. $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ var mıdır? Varsa limitin değeri nedir? Yoksa, neden yoktur?



BİLGİSAYAR ALIŞTIRMALARI

61–66 alıştırmalarında deltaları grafik yöntemlerle bulmaya çalışacaksınız. Aşağıdaki adımlar için BCS kullanın.

- yaklaşılan x_0 noktası civarında $y = f(x)$ fonksiyonunu çizin.
- L limitinin değerini tahmin edin ve tahmininizin doğru olup olmadığını görmek için limiti analitik olarak bulun.
- $\epsilon = 0.2$ değerini kullanarak, $y_1 = L - \epsilon$ ve $y_2 = L + \epsilon$ doğrularını x_0 civarında f fonksiyonuyla birlikte çizin.
- (c) şıkındaki grafikten

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ eşitsizliğini sağlayan her } x \text{ için}$$

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ değeri bulun. Tahmininizi f , y_1 , ve y_2 'yi $0 < |x - x_0| < \delta$ aralığında beraber çizerek kontrol edin. Görüş aralığı olarak $x_0 - 2\delta \leq x \leq x_0 + 2\delta$ ve $L - 2\epsilon \leq y \leq L + 2\epsilon$ aralığının dışına taşıyorsa, δ değerini çok büyük seçmişsinizdir. Daha küçük bir değerle yeniden deneyin.

- e. $\epsilon = 0.1, 0.05$ ve 0.001 için (c) ve (d) şıklarını tekrarlayın.

61. $f(x) = \frac{x^4 - 81}{x - 3}, \quad x_0 = 3$

62. $f(x) = \frac{5x^3 + 9x^2}{2x^5 + 3x^2}, \quad x_0 = 0$

63. $f(x) = \frac{\sin 2x}{3x}, \quad x_0 = 0$

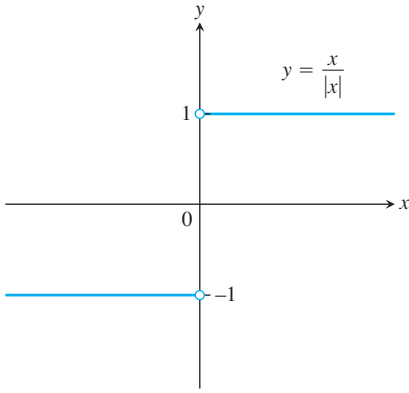
64. $f(x) = \frac{x(1 - \cos x)}{x - \sin x}, \quad x_0 = 0$

65. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}, \quad x_0 = 1$

66. $f(x) = \frac{3x^2 - (7x + 1)\sqrt{x} + 5}{x - 1}, \quad x_0 = 1$

2.4

Tek Taraflı Limitler ve Sonsuzda Limitler



ŞEKİL 2.21 Orijinde farklı sağ ve sol taraflı limitler

Bu bölümde limit kavramını, x x_0 'a sadece soldan ($x < x_0$) veya sadece sağdan ($x > x_0$) yaklaşırkenki limitler olan tek *taraflı limitlere* genişletiyoruz. Ayrıca, $x \rightarrow \pm \infty$ iken belirli rasyonel fonksiyonlar ve diğer bazılarının grafiklerini analiz ediyoruz.

Tek Taraflı Limitler

x c 'ye yaklaşırken bir L limitinin olabilmesi için, bir f fonksiyonunun a 'nın *iki tarafında* da tanımlı olması ve x c 'ye herhangi bir taraftan yaklaşırken $f(x)$ değerlerinin de L 'ye yaklaşması gerekir. Bu yüzden, normal limitlere bazen **iki taraflı** limitler de denir.

f 'nin bir c noktasında iki-taraflı bir limitinin olmaması halinde bir tek-taraflı limiti, yani yaklaşımın sadece tek taraflı olması durumunda bir limiti bulunabilir. Yaklaşım sağdan ise limit bir **sağdan limit** dir. Soldan ise **soldan limit**.

$f(x) = x/|x|$ fonksiyonunun (Şekil 2.21) limiti, x sıfıra sağdan yaklaşırken 1, soldan yaklaşırken -1 'dir. Bu tek taraflı limit değerleri aynı olmadığından x sıfıra yaklaşırken $f(x)$ 'in yaklaştığı tek bir değer yoktur. Dolayısıyla, $f(x)$ 'in 0 da bir limiti (iki taraflı) yoktur.

Sezgisel olarak, $f(x)$ fonksiyonu $c < b$ olmak üzere bir (c, b) aralığında tanımlanmış ise ve x c 'ye bu aralığın içinde kalarak yaklaşıyorken $f(x)$ L 'ye oldukça yaklaşıyorsa, f 'nin c 'de **sağdan** bir L limiti vardır deriz ve

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L.$$

yazarız.

“ $x \rightarrow c^+$ ” sembolü, sadece x 'in c 'den daha büyük değerlerini göz önüne aldığımız anlamındadır.

Benzer şekilde, $f(x)$ fonksiyonu $a < c$ olmak üzere bir (a, c) aralığında tanımlanmış ise ve x c 'ye bu aralığın içinde kalarak yaklaşıyorken $f(x)$ M 'ye oldukça yaklaşıyorsa, f 'nin c 'de **soldan** bir M limiti vardır deriz ve

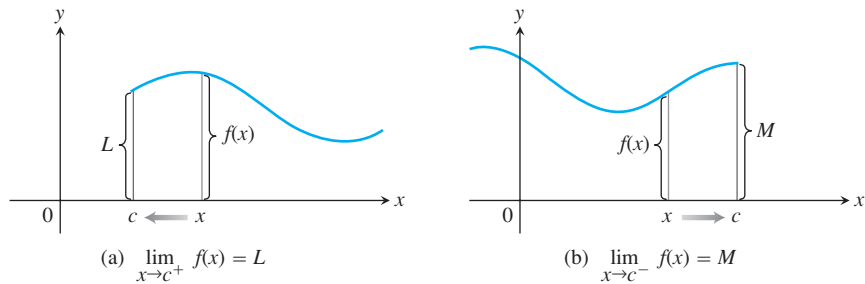
$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = M.$$

yazarız.

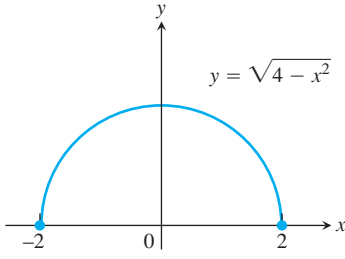
“ $x \rightarrow c^-$ ” sembolü, sadece x 'in c 'den daha küçük değerlerini göz önüne aldığımız anlamındadır.

Bu resmi olmayan tanımlar Şekil 2.22'de gösterilmiştir. Şekil 2.21'deki $f(x) = x/|x|$ fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1. \text{ dir.}$$



ŞEKİL 2.22 (a) x c 'ye yaklaşırken sağdan limit. (b) x c 'ye yaklaşırken soldan limit.



ŞEKİL 2.23 $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0$ (Örnek 1).

ÖRNEK 1 Bir Yarım Çember İçin Tek Taraflı Limitler

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ fonksiyonunun tanım aralığı $[-2, 2]$ 'dir ve grafiği Şekil 2.23'teki yarım çemberdir. Limitleri şu şekildedir:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$$

Fonksiyonun $x = -2$ 'de soldan bir limiti veya $x = 2$ 'de sağdan bir limiti yoktur. -2 veya 2 'de iki taraflı bir limiti bulunmamaktadır.

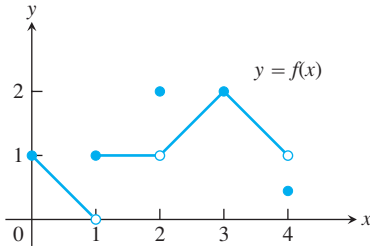
Tek taraflı limitlerde Bölüm 2.2 Teorem 1'de verilen limit özelliklerinin hepsi bulunur. İki fonksiyonun toplamının sağdan limiti fonksiyonların sağdan limitlerinin toplamıdır gibi. Sandöviç Teoremi ve Teorem 5 gibi, polinom ve rasyonel fonksiyonların limitleriyle ilgili teoremler de tek taraflı limitler için geçerlidir.

Tek taraflı ve iki taraflı limitler arasındaki bağlantı aşağıdaki gibidir:

TEOREM 6

$x \rightarrow c$ 'ye yaklaşırken bir $f(x)$ fonksiyonunun, ancak ve yalnız o noktada sağdan ve soldan limitleri varsa ve bu limitler eşitse, bir limiti vardır

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$



ŞEKİL 2.24 Örnek 2'deki fonksiyonun grafiği.

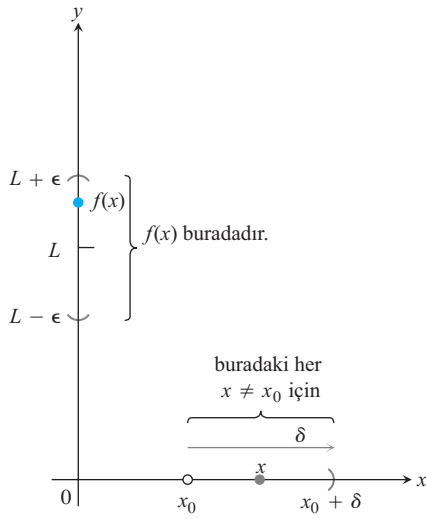
ÖRNEK 2 Şekil 2.24'te Grafikleri Çizilen Fonksiyonların Limitleri.

- $x = 0$ 'da : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$,
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ yoktur. Fonksiyon $x = 0$ 'ın solunda tanımlı değildir.
- $x = 1$ 'de : $f(1) = 1$, olduğu halde $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ 'dır.
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$,
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ yoktur. Sağdan ve soldan limitler eşit değildir.
- $x = 2$ 'de : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$,
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$,
 $f(2) = 2$. olduğu halde $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ 'dir.
- $x = 3$ 'te : $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 2$.
- $x = 4$ 'te : $f(4) \neq 1$, olduğu halde $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1$ 'dir.
 $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ yoktur. Fonksiyon $x = 4$ 'ün sağında tanımlı değildir.

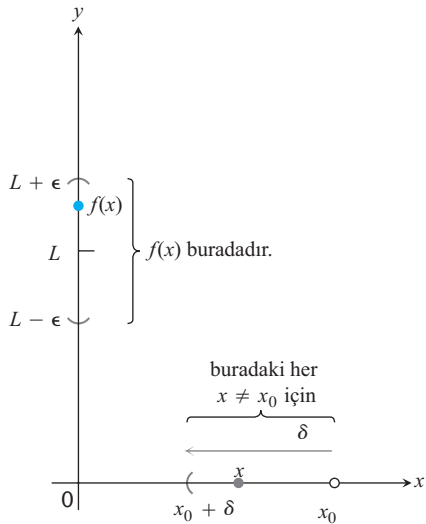
$[0, 4]$ 'teki diğer bütün c noktalarında $f(x)$ 'in limiti $f(c)$ 'dir. ■

Tek Taraflı Limitlerin Tam Tanımı

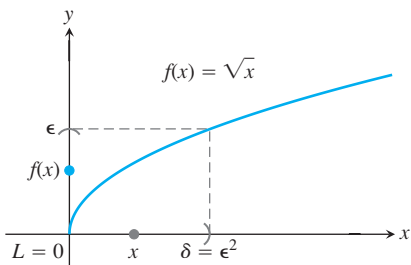
Bölüm 2.3'teki iki taraflı limitin esas tanımı tek taraflı limitlere göre düzenlenebilir.



ŞEKİL 2.25 Sağdan limit tanımı ile ilgili aralıklar.



ŞEKİL 2.26 Soldan limit tanımı ile ilgili aralıklar



ŞEKİL 2.27 Örnek 3'teki $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$

TANIMLAR Sağdan Limit, Soldan Limit

Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık

$$x_0 < x < x_0 + \delta \quad \text{iken} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, $f(x)$ 'in x_0 'da **sağdan bir L limiti** vardır der ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \quad (\text{Şekil 2.25'e bakın})$$

yazarız.

Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık

$$x_0 - \delta < x < x_0 \quad \text{iken} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, $f(x)$ 'in x_0 'da **soldan bir L limiti** vardır der ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \quad (\text{Şekil 2.26'ya bakın})$$

yazarız.

ÖRNEK 3 Delta Bulmak İçin Tanımı Uygulamak

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

olduğunu ispat edin.

Çözüm $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Burada $x_0 = 0$ ve $L = 0$ 'dır, dolayısıyla

$$0 < x < \delta \text{ eşitsizliğini sağlayan her } x \text{ için } |\sqrt{x} - 0| < \epsilon$$

olacak şekilde veya

$$0 < x < \delta \quad \text{iken} \quad \sqrt{x} < \epsilon$$

gerektirmesi sağlanacak şekilde bir $\delta > 0$ bulmak istiyoruz.

Her iki tarafın karesini alarak

$$0 < x < \delta \quad \text{ise} \quad x < \epsilon^2$$

buluruz. $\delta = \epsilon^2$ seçersek

$$0 < x < \delta = \epsilon^2 \quad \text{iken} \quad \sqrt{x} < \epsilon$$

veya

$$0 < x < \epsilon^2 \quad \text{iken} \quad |\sqrt{x} - 0| < \epsilon$$

gerektirmesi sağlanır.

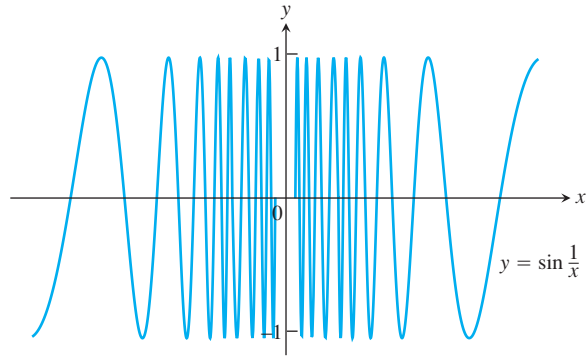
Tanım göre bu, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ olduğunu gösterir (Şekil 2.27). ■

Şimdiye kadar incelenen örneklerde, ele alınan her noktada bir tür limit vardı. Genelde bunun böyle olması gerekmez.

ÖRNEK 4 Çok Fazla Salınan Bir Fonksiyon

$y = \sin(1/x)$ 'in x iki taraftan da sıfıra yaklaşırken bir limitinin olmadığını gösterin (Şekil 2.28).

Çözüm x sıfıra yaklaşırken, çarpmaya göre tersi, $1/x$, sınırsızca büyür ve $\sin(1/x)$ 'in değerleri -1 ile 1 arasında gidip gelir. x sıfıra yaklaşırken fonksiyon değerlerinin giderek

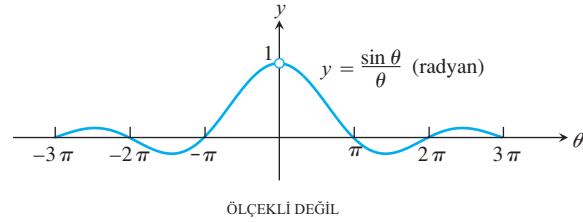


ŞEKİL 2.28 $y = \sin(1/x)$ fonksiyonunun x sıfıra yaklaşırken sağdan veya soldan limiti yoktur (Örnek 4).

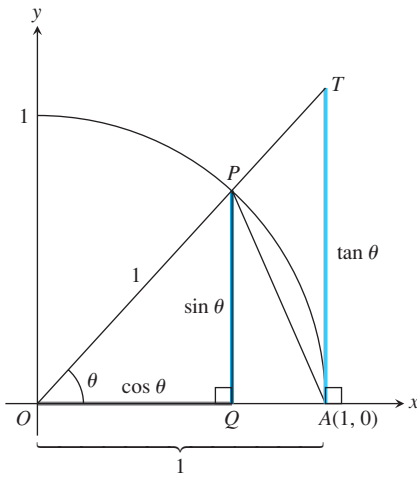
yaklaştıkları tek bir L sayısı yoktur. x 'i sadece pozitif veya negatif değerlerle de sınırlasak, bu durum geçerlidir. $x = 0$ 'da fonksiyonun sağdan veya soldan bir limiti yoktur. ■

$(\sin \theta)/\theta$ İçeren Limitler

$(\sin \theta)/\theta$ hakkındaki temel gerçek şudur: radyan ölçüde $\theta \rightarrow 0$ iken limiti 1 dir. Bunu Şekil 2.29 da görebilir ve Sandöviç Teoremi yardımıyla cebirsel olarak doğrulayabiliriz. Bu limitin önemini, trigonometrik fonksiyonların anlık değişim oranlarının incelendiği Bölüm 3.4'te göreceksiniz.



ŞEKİL 2.29 $f(\theta) = (\sin \theta)/\theta$ 'nin grafiği.



ŞEKİL 2.30 Teorem 7'nin ispatındaki şekil $TA/OA = \tan \theta$ fakat $OA = 1$ olduğundan $TA = \tan \theta$ 'dır.

TEOREM 7

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad (\theta \text{ radyan ölçüde}) \quad (1)$$

İspat Plan, sağdan ve soldan limitlerin her ikisinin de 1 olduğunu göstermektir. Bunun sonunda iki taraflı limitin de 1 olduğunu söyleyebiliriz.

Sağdan limitin 1 olduğunu göstermek için θ 'nın $\pi/2$ 'den küçük pozitif değerleri ile başlıyoruz (Şekil 2.30).

$$\text{Alan } \triangle OAP < \text{OAP daire diliminin alanı} < \text{alan } \triangle OAT$$

olduğuna dikkat edin.

(2) denklemi radyan ölçünün çıkış noktasıdır: yalnızca θ radyan olarak ölçülürse OAP daire diliminin alanı $\theta/2$ 'dir.

Bu alanları θ 'ya bağlı olarak şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\text{Alan } \triangle OAP = \frac{1}{2} \text{ taban} \times \text{yükseklik} = \frac{1}{2}(1) (\sin \theta) = \frac{1}{2} \sin \theta$$

$$OAP \text{ daire diliminin alanı} = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} (1)^2 \theta = \frac{\theta}{2} \quad [2]$$

$$\text{Alan } \triangle OAT = \frac{1}{2} \text{ taban} \times \text{yükseklik} = \frac{1}{2} (1) (\tan \theta) = \frac{1}{2} \tan \theta$$

Böylece,

$$\frac{1}{2} \sin \theta < \frac{1}{2} \theta < \frac{1}{2} \tan \theta$$

dır.

$0 < \theta < \pi/2$ olduğundan, pozitif olan $(1/2) \sin \theta$ sayısı ile her üç tarafı da bölersek bu son eşitsizlik doğru kalmaya devam eder:

$$1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$

Çarpmaya göre terslerini alırsak

$$1 > \frac{\sin \theta}{\theta} > \cos \theta$$

buluruz. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \cos \theta = 1$ olduğundan (Bölüm 2.2 Örnek 6b), Sandöviç Teoremine göre

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

bulunur.

$\sin \theta$ ve θ fonksiyonlarının her ikisi de *tek fonksiyonlar* (Bölüm 1.4). Bu nedenle, $f(\theta) = (\sin \theta)/\theta$ fonksiyonu, grafiği y -eksenine göre simetrik olan bir çift fonksiyondur (Şekil 2.29'a bakın). Bu simetri, 0 da soldan limitin var olduğunu ve sağdan limitle aynı olduğunu gösterir:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta}$$

Şu halde Teorem 6'ya göre $\lim_{\theta \rightarrow 0} (\sin \theta)/\theta = 1$ dir. ■

ÖRNEK 5 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ limitini kullanarak

$$(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 \quad \text{ve} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

olduğunu gösterin.

Çözüm

(a) $\cos h = 1 - 2 \sin^2 (h/2)$ yarım açılı formülünü kullanarak

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} - \frac{2 \sin^2 (h/2)}{h}$$

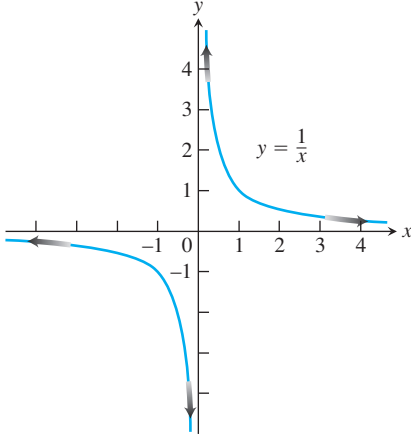
$$= - \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \sin \theta$$

$$= -(1)(0) = 0.$$

$\theta = h/2$ olsun

- (b) (1) denklemi orijinal fonksiyona uygulanamaz. Paydada $5x$ 'e değil bir $2x$ 'e ihtiyacımız vardır. Pay ve paydayı $2/5$ ile çarparak bunu oluştururuz:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2/5) \cdot \sin 2x}{(2/5) \cdot 5x} \\ &= \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \quad \text{Şimdi, } \theta = 2x \text{ ile (1) denklemini uyguluyoruz.} \\ &= \frac{2}{5} (1) = \frac{2}{5}\end{aligned}$$



ŞEKİL 2.31 $y = 1/x$ 'in grafiği

$x \rightarrow \pm \infty$ iken Sonlu Limitler

Sonsuzluk için kullanılan (∞) sembolü bir reel sayı göstermez. ∞ sembolünü bir fonksiyonun tanım kümesindeki veya değer kümesindeki değerler her sonlu sınırı aştığındaki davranışını tanımlamak için kullanırız. Örneğin, $f(x) = 1/x$ fonksiyonu her $x \neq 0$ için tanımlıdır (Şekil 2.31). x pozitif olarak giderek büyürken, $1/x$ giderek küçülür. x negatif iken büyüklüğü giderek artarken, $1/x$ yine giderek küçülür. Bu gözlemleri, $x \rightarrow \pm \infty$ iken $f(x) = 1/x$ 'in limiti 0'dır veya $f(x) = 1/x$ 'in sonsuzda ve negatif sonsuzda limiti 0'dır diyerek özetleriz. Aşağıda kesin tanım verilmektedir.

TANIMLAR $x \rightarrow \infty$ veya $x \rightarrow -\infty$ iken Limitler

1. Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık,

$$x > M \text{ eşitsizliğini sağlayan bütün } x\text{'ler için } |f(x) - L| < \epsilon$$

olacak şekilde bir M sayısı bulunabilirse x **sonsuzda giderken** $f(x)$ fonksiyonunun **limiti** L dir deriz ve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

yazarız.

2. Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık,

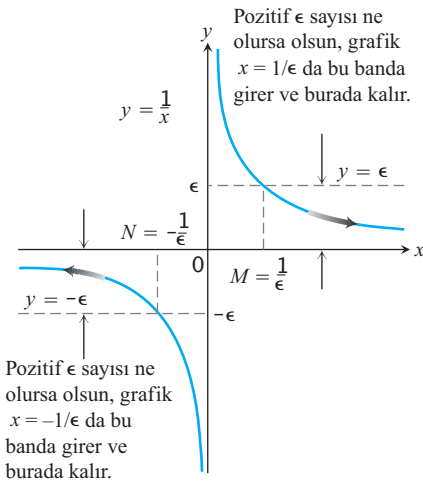
$$x < N \text{ eşitsizliğini sağlayan bütün } x\text{'ler için } |f(x) - L| < \epsilon$$

olacak şekilde bir N sayısı bulunabilirse x **eksi sonsuzda giderken** $f(x)$ fonksiyonunun **limiti** L dir deriz ve

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

yazarız.

Sezgisel olarak, x pozitif yönde orijinden giderek uzaklaşırken, $f(x)$ istenilen ölçüde L 'ye yaklaşıyorsa $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ dir. Benzer şekilde, x negatif yönde orijinden giderek uzaklaşırken, $f(x)$ istenilen ölçüde L 'ye yaklaşıyorsa $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ dir. $x \rightarrow \pm \infty$ iken limit hesaplama stratejisi, Bölüm 2.2 deki sonlu limitlerdeki benzerdir. Orada önce $y = k$ sabit ve $y = x$ birim fonksiyonların limitlerini bulduk. Sonra bu sonuçları, cebirsel kombinasyonlarla ilgili bir teorem uygulayarak, diğer fonksiyonlara genişlettik. Burada da, başlangıç fonksiyonlarının $y = k$ ve $y = x$ yerine $y = k$ ve $y = 1/x$ olması dışında, aynı şeyi yapacağız.



ŞEKİL 2.32 Örnek 6'daki tartışmanın arkasındaki geometri.

Esas tanımı uygulayarak gerçekleşmesi gereken temel şeyler:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} k = k \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad (3)$$

dir.

İkinciyi burada ispatlayacak ve birincisini Alıştırma 71 ve 72'ye bırakacağız.

ÖRNEK 6 $f(x) = \frac{1}{x}$ için Sonsuzda Limit

Şunları gösterin

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Çözüm

(a) $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x > M \quad \text{oldukça} \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon$$

olacak şekilde bir M sayısı bulmamız gerekmektedir. $M = 1/\epsilon$ veya daha büyük herhangi bir pozitif sayı için bu önerme geçerlidir (Şekil 2.32). Bu da, $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x) = 0$

(b) $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x < N \quad \text{oldukça} \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon$$

olacak şekilde bir N sayısı bulmamız gerekmektedir. $N = -1/\epsilon$ veya $-1/\epsilon$ 'dan daha küçük herhangi bir negatif sayı için bu önerme geçerlidir (Şekil 2.32). Bu da, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x) = 0$ olduğunu ispatlar. ■

Sonsuzda limitlerin sonlu limitlere benzer özellikleri vardır.

TEOREM 8 $x \rightarrow \pm\infty$ Durumunda Limit Kuralları

L , M ve k reel sayılar ve

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = M \quad \text{ise}$$

1. **Toplama Kuralı:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) + g(x)) = L + M$

2. **Fark Kuralı:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = L - M$

3. **Çarpım Kuralı:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

4. **Sabitli Çarpım Kuralı:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

5. **Bölüm Kuralı:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$

6. **Kuvvet Kuralı:** r ve s ortak çarpanı bulunmayan tamsayılar ve $s \neq 0$ ise $L^{r/s}$ 'nin bir reel sayı olması koşuluyla

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

dir. (s çift ise $L > 0$ olduğunu varsayıyoruz.)

Bu özellikler Bölüm 2.2'deki Teorem 1 ile aynıdır ve bunları aynı şekilde kullanınız.

ÖRNEK 7 Teorem 8'i Kullanma

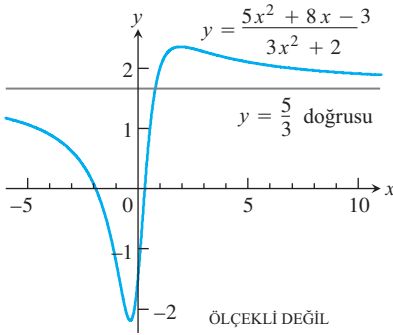
$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \quad \text{Toplama Kuralı}$$

$$= 5 + 0 = 5 \quad \text{Bilinen limitler}$$

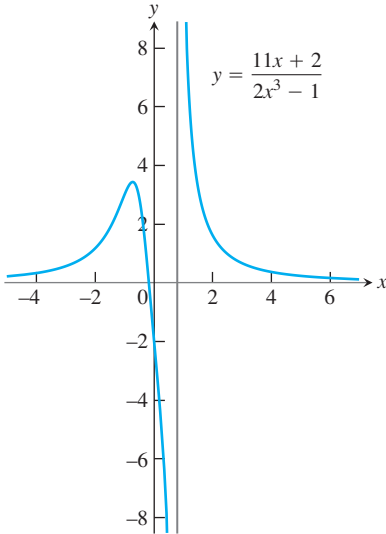
$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \quad \text{Çarpma Kuralı}$$

$$= \pi\sqrt{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0 \quad \text{Bilinen limitler}$$



ŞEKİL 2.33 Örnek 8'deki fonksiyonun grafiği. $|x|$ arttıkça grafik $y = 5/3$ doğrusuna yaklaşır.



ŞEKİL 2.34 Örnek 9'deki fonksiyonun grafiği. $|x|$ arttıkça, grafik x -eksenine yaklaşır.

Rasyonel Fonksiyonların Sonsuzdaki Limitleri

$x \rightarrow \pm\infty$ iken bir rasyonel fonksiyonun limitini belirlemek için, pay ve paydayı paydadaki en büyük x kuvvetiyle böleriz. Bundan sonra ne olacağı polinomların derecesine bağlıdır.

ÖRNEK 8 Pay ve payda aynı derecede

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + (8/x) - (3/x^2)}{3 + (2/x^2)} \quad \text{Pay ve paydayı } x^2 \text{ ile bölün.}$$

$$= \frac{5 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{5}{3}$$

Şekil 2.33'e bakın ■

ÖRNEK 9 Payın derecesi paydanın derecesinden küçük

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11x + 2}{2x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(11/x^2) + (2/x^3)}{2 - (1/x^3)}$$

$$= \frac{0 + 0}{2 - 0} = 0$$

Şekil 2.34'e bakın. ■

Payın derecesinin paydanın derecesinden büyük olması durumuna ait bir örneği bundan sonraki bölümde vereceğiz (Bölüm 2.5 Alıştırma 8).

Yatay Asimptotlar

Bir fonksiyonun grafiği ile belirli bir doğru arasındaki uzaklık, grafik üzerindeki bir nokta orijinden çok fazla uzaklaştığında, sıfıra yaklaşıyorsa, grafik doğruya asimptotik olarak yaklaşıyor ve doğru grafiğin bir asimptotudur deriz.

$f(x) = 1/x$ 'e bakarak (Şekil 2.31'e bakın)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

olduğundan sağ tarafta

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

ve $f(x) = 1/x$ olduğundan sol tarafta, x -ekseni eğrinin asimptotu dur.

x -ekseni $f(x) = 1/x$ 'in grafiğinin bir yatay asimptotudur deriz.

TANIM Yatay Asimptot

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad \text{veya} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

ise, $y = b$ doğrusu $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin bir **yatay asimptotudur**.

$$f(x) = \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{5}{3}$ ve $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{5}{3}$ olduğundan $y = 5/3$ doğrusu, grafiği Şekil 2.33'te çizilen (Örnek 8)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{5}{3} \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{5}{3}$$

ÖRNEK 10 Yeni Bir Değişkene Dönüşüm

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(1/x)$ limitini bulun.

Çözüm Yeni değişken $t = 1/x$ 'i tanımlayalım. Örnek 6'dan $x \rightarrow \infty$ iken $t \rightarrow 0^+$ olduğunu biliyoruz (Şekil 2.31'e bakın). Bu nedenle,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sin t = 0$$

dır. Benzer şekilde, $x \rightarrow \pm \infty$ iken $f(x)$ 'i inceleyerek $x \rightarrow 0$ iken $y = f(1/x)$ 'in davranışını araştırabiliriz.

Sandöviç Teoremine Tekrar Bir Bakış

Sandöviç Teoremi $x \rightarrow \pm \infty$ iken ki limitler için de geçerlidir.

ÖRNEK 11 Bir Eğri Yatay Asimptotunu Kesebilir

Sandöviç Teoremini kullanarak

$$y = 2 + \frac{\sin x}{x}$$

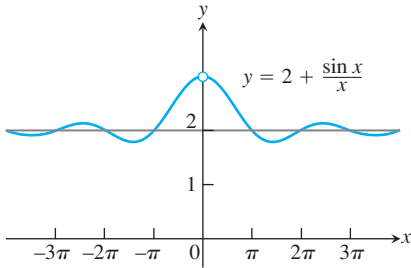
eğrisinin yatay asimptotunu bulun.

Çözüm $x \rightarrow \pm \infty$ iken ki davranışlarla ilgileniyoruz.

$$0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right|$$

ve $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} |1/x| = 0$ olduğu için, Sandöviç Teoremine göre $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (\sin x)/x = 0$ olur. Dolayısıyla,

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(2 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2 + 0 = 2,$$



ŞEKİL 2.35 Bir eğri, asimptotlarından birini sonsuz defa kesebilir (Örnek 11).

olur ve $y = 2$ doğrusu eğrinin hem sağdan hem de soldan asimptotudur (Şekil 2.35).

Bu örnek, bir eğrinin yatay asimptotlarından birini bir çok defa kesebileceğini gösterir. ■

Eğik Asimptotlar

Rasyonel bir fonksiyonun payının derecesi paydasının derecesinden bir fazla ise, grafiğinin **bir eğik asimptotu** vardır. f 'yi bir lineer fonksiyon ile $x \rightarrow \pm\infty$ iken sıfıra giden bir kalanın toplamı olarak yazmak için payı paydaya bölerek asimptot için bir denklem buluruz. İşte bir örnek.

ÖRNEK 12 Bir Eğik Asimptot Bulmak

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4}$$

fonksiyonunun Şekil 2.36 daki grafiği için eğik asimptot bulunuz.

Çözüm Uzun bir bölme işlemiyle

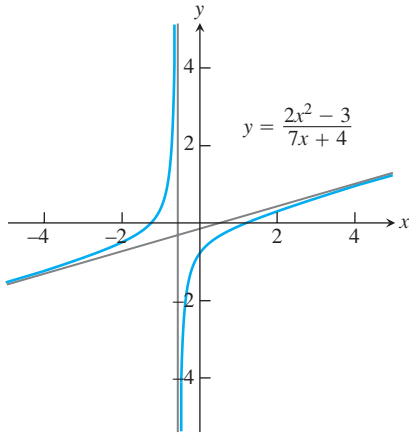
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2 - 3}{7x + 4} \\ &= \left(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49} \right) + \frac{-115}{49(7x + 4)} \end{aligned}$$

lineer fonksiyon $g(x)$ kalan
linear function $g(x)$ remainder

buluruz. $x \rightarrow \pm\infty$ iken, büyüklüğü f ve g 'nin grafikleri arasındaki dikey uzaklığı veren kalan, sıfıra gider ve

$$g(x) = \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}$$

eğimli doğrusu f 'nin grafiğinin bir asimptotu olur (Şekil 2.36). $y = g(x)$ doğrusu hem sağdan hem de soldan asimptottur. Gelecek bölümde, x paydanın sıfır olduğu $-4/7$ 'ye yaklaşırken $f(x)$ 'in mutlak değerce sınırsız arttığını göreceksiniz (Şekil 2.36). ■

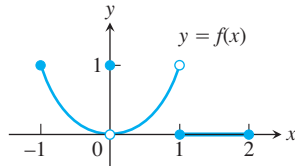


ŞEKİL 2.36 Örnek 12'deki fonksiyonun bir eğik asimptotu vardır.

ALİŞTIRMALAR 2.4

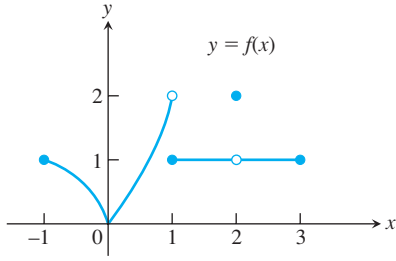
Limitleri Grafikten Bulma

1. Aşağıda grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu hakkında söylenenlerden hangileri doğru, hangileri yanlıştır?



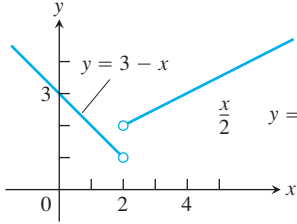
- | | |
|---|--|
| a. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$ | b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ |
| c. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ | d. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ |
| e. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ vardır. | f. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ |
| g. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ | h. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ |
| i. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ | j. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$ |
| k. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ yoktur. | l. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$ |

2. Aşağıda grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu hakkında söylenenlerden hangileri doğru, hangileri yanlıştır?



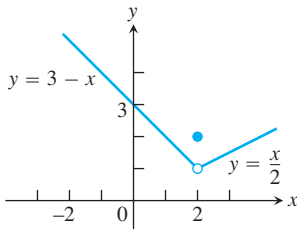
- a. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$ b. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ yoktur.
c. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ d. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$
e. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ f. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ yoktur.
g. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
h. $(-1, 1)$ aralığındaki her c noktasında $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$
i. $(1, 3)$ aralığındaki her c noktasında $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$
j. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$ k. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ yoktur.

3. $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ \frac{x}{2} + 1, & x > 2 \end{cases}$ olsun.



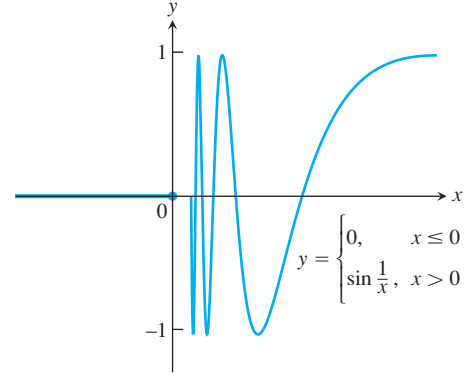
- a. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ 'i bulun.
b. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?
c. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ 'i bulun.
d. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?

4. $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ \frac{x}{2}, & x > 2 \end{cases}$ olsun.

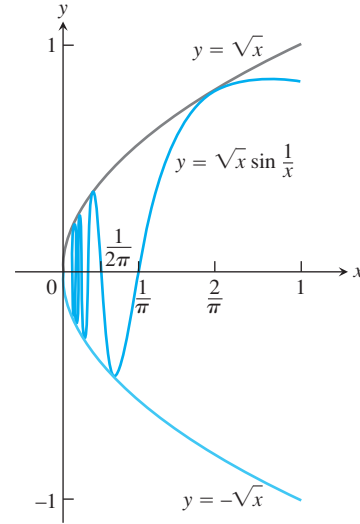


- a. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ ve $f(2)$ 'yi bulun.
b. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?
c. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ 'i bulun.
d. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?

5. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ olsun.



- a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?
b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?
c. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?
6. $g(x) = \sqrt{x} \sin(1/x)$ olsun.



- a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?
b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?
c. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?

7. a. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ 'in grafiğini çizin.
 b. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 'i bulun.
 c. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?
8. a. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ 'in grafiğini çizin.
 b. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 'i bulun.
 c. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?

9 ve 10 alıştırmalarında verilen fonksiyonların grafiklerini çizin ve aşağıdaki soruları yanıtlayın.

- a. f 'nin tanım ve değer aralıkları nelerdir?
 b. Eğer varsa $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ hangi c noktalarında vardır?
 c. Hangi noktalarda sadece soldan-limit vardır?
 d. Hangi noktalarda sadece sağdan-limit vardır?

9. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$
10. $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0 \text{ veya } 0 < x \leq 1 \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x < -1 \text{ veya } x > 1 \end{cases}$

Tek Taraflı Limitleri Cebirsel Olarak Bulma

11–18 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

11. $\lim_{x \rightarrow -0.5^-} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$ 12. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$
13. $\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x}{x+1} \right) \left(\frac{2x+5}{x^2+x} \right)$
14. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x+1} \right) \left(\frac{x+6}{x} \right) \left(\frac{3-x}{7} \right)$
15. $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h^2 + 4h + 5} - \sqrt{5}}{h}$
16. $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5h^2 + 11h + 6}}{h}$
17. a. $\lim_{x \rightarrow -2^+} (x+3) \frac{|x+2|}{x+2}$ b. $\lim_{x \rightarrow -2^-} (x+3) \frac{|x+2|}{x+2}$
18. a. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x(x-1)}}{|x-1|}$ b. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{2x(x-1)}}{|x-1|}$

Alıştırma 19 ve 20'deki limitleri bulmak için en büyük tamsayı fonksiyonu $y = \lfloor x \rfloor$ 'in grafiğini kullanın Bölüm 1.3 Şekil 1.31.

19. a. $\lim_{\theta \rightarrow 3^+} \frac{\lfloor \theta \rfloor}{\theta}$ b. $\lim_{\theta \rightarrow 3^-} \frac{\lfloor \theta \rfloor}{\theta}$
20. a. $\lim_{t \rightarrow 4^+} (t - \lfloor t \rfloor)$ b. $\lim_{t \rightarrow 4^-} (t - \lfloor t \rfloor)$

$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ 'i kullanmak

21–36 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

21. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{2\theta}}{\sqrt{2\theta}}$ 22. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin kt}{t}$ (k bir sabit)
23. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 3y}{4y}$ 24. $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{\sin 3h}$
25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x}$ 26. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{\tan t}$
27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \csc 2x}{\cos 5x}$ 28. $\lim_{x \rightarrow 0} 6x^2 (\cot x) (\csc 2x)$
29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x \cos x}{\sin x \cos x}$ 30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x + \sin x}{2x}$
31. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos t)}{1 - \cos t}$ 32. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin h)}{\sin h}$
33. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\sin 2\theta}$ 34. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$
35. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 8x}$ 36. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 3y \cot 5y}{y \cot 4y}$

$x \rightarrow \pm \infty$ İken Limit Hesaplama

37–42 alıştırmalarında verilen her fonksiyonun (a) $x \rightarrow \infty$ iken ve (b) $x \rightarrow -\infty$ iken limitini bulun. (Yanıtınızı bir grafik programı veya bilgisayar kullanarak doğrulayabilirsiniz.)

37. $f(x) = \frac{2}{x} - 3$ 38. $f(x) = \pi - \frac{2}{x^2}$
39. $g(x) = \frac{1}{2 + (1/x)}$ 40. $g(x) = \frac{1}{8 - (5/x^2)}$
41. $h(x) = \frac{-5 + (7/x)}{3 - (1/x^2)}$ 42. $h(x) = \frac{3 - (2/x)}{4 + (\sqrt{2}/x^2)}$

43–46 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

43. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x}$ 44. $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \frac{\cos \theta}{3\theta}$
45. $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2 - t + \sin t}{t + \cos t}$ 46. $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r + \sin r}{2r + 7 - 5 \sin r}$

Rasyonel Fonksiyonların Limitleri

47–56 alıştırmalarında her rasyonel fonksiyonun (a) $x \rightarrow \infty$ iken ve (b) $x \rightarrow -\infty$ iken limitini bulun.

47. $f(x) = \frac{2x+3}{5x+7}$ 48. $f(x) = \frac{2x^3+7}{x^3-x^2+x+7}$
49. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$ 50. $f(x) = \frac{3x+7}{x^2-2}$
51. $h(x) = \frac{7x^3}{x^3-3x^2+6x}$ 52. $g(x) = \frac{1}{x^3-4x+1}$

$$53. g(x) = \frac{10x^5 + x^4 + 31}{x^6}$$

$$54. h(x) = \frac{9x^4 + x}{2x^4 + 5x^2 - x + 6}$$

$$55. h(x) = \frac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x}$$

$$56. h(x) = \frac{-x^4}{x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 9}$$

Tamsayı Olmayan veya Negatif Kuvvetlerin Limitleri

Rasyonel fonksiyonların limitlerini belirlemede kullandığımız yöntemleri x 'in tamsayı olmayan veya negatif kuvvetlerini içeren oranlar için de kullanabiliriz. Pay ve paydayı paydadaki en büyük x kuvveti ile bölün ve işlemlere devam edin. 57–62 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

$$57. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7}$$

$$58. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$$

$$59. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$$

$$60. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-1} + x^{-4}}{x^{-2} - x^{-3}}$$

$$61. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{5/3} - x^{1/3} + 7}{x^{8/5} + 3x + \sqrt{x}}$$

$$62. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + x^{2/3} - 4}$$

Theori ve Örnekler

63. f 'nin tanım aralığının içinde bir noktada $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 'i biliyorsanız, bu $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 'i de biliyorsunuz demek midir? Yanıtınızın nedenlerini açıklayın.
64. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ 'in var olduğunu biliyorsanız, $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ 'i hesaplayarak değerini bulabilir misiniz? Yanıtınızın nedenlerini açıklayın.
65. f 'nin x 'in bir tek fonksiyonu olduğunu varsayın. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$ olduğunu bilmeniz size $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ hakkında bir şey söyler mi? Yanıtınızın nedenini açıklayın.
66. f 'nin x 'in bir çift fonksiyonu olduğunu varsayın. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 7$ olduğunu bilmeniz size $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ veya $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ hakkında bir şey söyler mi? Yanıtınızın nedenini açıklayın.
67. $f(x)$ ve $g(x)$ 'in x 'in polinomları olduklarını ve $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)/g(x)) = 2$ olduğunu varsayın. $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)/g(x))$ hakkında bir şey söyleyebilir misiniz? Yanıtınızın nedenini açıklayın.
68. $f(x)$ ve $g(x)$ 'in x 'in polinomları olduklarını varsayın. $g(x)$ hiç bir zaman sıfır olmuyorsa $f(x)/g(x)$ 'in grafiğinin bir asimptotu olabilir mi? Yanıtınızın nedenini açıklayın.
69. Verilen bir rasyonel fonksiyonun grafiğinin kaç tane yatay asimptotu olabilir? Yanıtınızın nedenini açıklayın.
70. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$ limitini bulun.

71 ve 72 Alıştırmalarındaki limitleri doğrulamak için $x \rightarrow \pm \infty$ limitin kesin tanımını kullanın.

71. $f(x) = k$, sabit fonksiyon ise $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$ dır.
72. $f(x) = k$, sabit fonksiyon ise $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$ dır.

Tek Taraflı Limitlerin Kesin Tanımı

73. $\epsilon > 0$ verilmişse, öyle bir $I = (5, 5 + \delta)$, $\delta > 0$ aralığı bulun ki, x I 'nin içindeyse, $\sqrt{x} - 5 < \epsilon$ olsun. Hangi limit doğrulanmaktadır ve değeri nedir?
74. $\epsilon > 0$ verilmişse, öyle bir $I = (4 - \delta, 4)$, $\delta > 0$ aralığı bulun ki, x I 'nin içindeyse, $\sqrt{4 - x} < \epsilon$ olsun. Hangi limit doğrulanmaktadır ve değeri nedir?

Sağdan ve soldan-limitlerin tanımlarını kullanarak 75 ve 76 alıştırmalarındaki ifadeleri ispatlayın.

75. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = -1$
76. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{|x - 2|} = 1$
77. **En büyük tam sayı fonksiyonu** (a) $\lim_{x \rightarrow 400^+} \lfloor x \rfloor$ ve (b) $\lim_{x \rightarrow 400^-} \lfloor x \rfloor$ 'i bulun ve limit tanımlarını kullanarak bulduklarınızı doğrulayın. (c) (a) ve (b)'de bulduklarınıza dayanarak $\lim_{x \rightarrow 400} \lfloor x \rfloor$ hakkında bir şey söyleyebilir misiniz? Yanıtınızı açıklayın.

78. **Tek taraflı limitler** $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$ olsun.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ve (b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 'i bulun ve limit tanımlarını kullanarak bulduklarınızı doğrulayın. (c) (a) ve (b)'de bulduklarınıza dayanarak $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ için bir şey söyleyebilir misiniz? Yanıtınızı açıklayın.

Grafik Araştırmaları - Sonsuzdaki Limitleri “Görmek”

Bazen, bir değişken dönüşümü yapmak tanıdık olmayan bir ifadeyi limitini bulmayı bildiğimiz bir ifadeye dönüştürebilir.

Örneğin,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \sin \theta \quad \theta = 1/x \text{ dönüşümü yapın}$$

$$= 0.$$

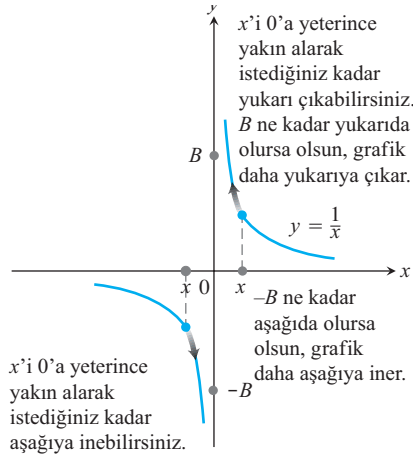
Bu, sonsuzdaki limitleri “görmek” için yaratıcı bir yol önerir. Prosedürü açıklayın ve bunu 79–84 alıştırmalarındaki limitleri belirlemek için kullanın.

79. $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x \sin \frac{1}{x}$
80. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(1/x)}{1 + (1/x)}$
81. $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{3x + 4}{2x - 5}$
82. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{1/x}$
83. $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(3 + \frac{2}{x} \right) \left(\cos \frac{1}{x} \right)$
84. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x^2} - \cos \frac{1}{x} \right) \left(1 + \sin \frac{1}{x} \right)$

2.5

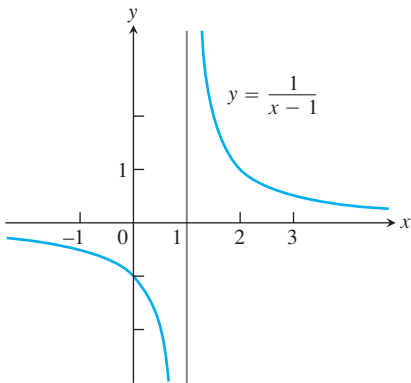
Sonsuz Limitler ve Dikey Asimptotlar

Bu bölümde limit kavramını, limit teriminin öncekiler gibi olmayan biraz farklı olarak tamamen yeni bir kullanımı, sonsuz limitlere genişletiyoruz. Sonsuz limitler, değerleri pozitif veya negatif keyfi olarak büyüyen fonksiyonların davranışlarını tanımlamada, kullanışlı semboller ve lisan sağlar. x 'in sayısal olarak büyük değerleri için, dikey asimptotlar ve baskın terimleri kullanarak, son bölümden rasyonel fonksiyonların grafiklerinin analizine devam ediyoruz.



ŞEKİL 2.37 Tek taraflı sonsuz limitler:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



ŞEKİL 2.38 $x = 1$ civarında, $y = 1/(x-1)$ fonksiyonu, $y = 1/x$ fonksiyonunun $x = 0$ civarında davrandığı gibi davranır. Grafiği, $y = 1/x$ grafiğinin sağa doğru bir birim kaydırılmış halidir (Örnek 1).

Sonsuz Limitler

$f(x) = 1/x$ fonksiyonuna yeniden bakalım. $x \rightarrow 0^+$ iken f 'nin değerleri, her pozitif reel sayıya ulaşarak aşacak şekilde, sınırsız artar. Yani, ne kadar büyük olursa olsun herhangi bir B pozitif reel sayısı verilmişse, f 'nin değerleri büyümeye devam eder ve B 'yi aşar (Şekil 2.37). Dolayısıyla, $x \rightarrow 0^+$ iken, f 'nin bir limiti yoktur. Buna rağmen, f 'nin davranışını $x \rightarrow 0^+$ iken $f(x) \rightarrow \infty$ 'a yaklaşıyor diyerek tanımlamak uygundur. Bunu

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

olarak yazarız. Bunu yazarken limitin *var olduğunu* söylemiyoruz. Bir ∞ reel sayısı olduğunu da söylemiyoruz, çünkü böyle bir sayı yok. Bunun yerine, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/x)$ 'in bulunmadığını, çünkü $x \rightarrow 0^+$ iken $1/x$ 'in pozitif yönde çok fazla arttığını söylüyoruz.

$x \rightarrow 0^-$ iken $f(x) = 1/x$ 'in değerleri negatif yönde çok fazla artar. Herhangi bir negatif $-B$ sayısı verilmişse, f 'nin değerleri eninde sonunda $-B$ 'nin altında kalır (Şekil 2.37'a bakın). Bunu

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

olarak yazarız. Yine, limitin *var olduğunu* veya $-\infty$ sayısına eşit olduğunu söylemiyoruz. Bir $-\infty$ reel sayısı yoktur. $x \rightarrow 0^-$ iken *değerleri negatif yönde çok fazla büyüdüğü için limiti olmayan* bir fonksiyonun davranışını tanımlıyoruz.

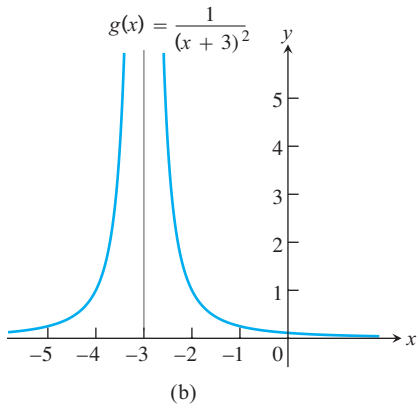
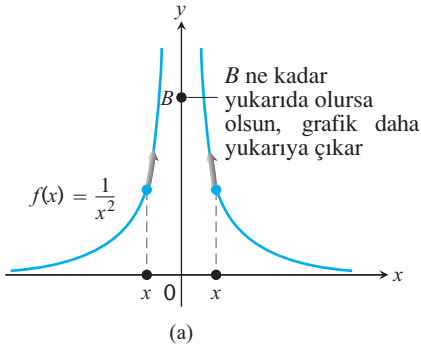
ÖRNEK 1 Tek taraflı sonsuz limitler

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} \quad \text{limitlerini bulun.}$$

Geometrik Çözüm $y = 1/(x-1)$ 'in grafiği $y = 1/x$ grafiğinin sağa doğru bir birim kaydırılmış halidir (Şekil 2.38). Dolayısıyla, $y = 1/(x-1)$ 1 civarında aynen $y = 1/x$ 'in 0 civarında davrandığı gibi davranır:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Analitik Çözüm $x-1$ sayısı ve çarpmaya göre tersini düşünün. $x \rightarrow 1^+$ iken, $(x-1) \rightarrow 0^+$ ve $1/(x-1) \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 1^-$ iken, $(x-1) \rightarrow 0^-$ ve $1/(x-1) \rightarrow -\infty$. ■



ŞEKİL 2.39 Örnek 2'deki fonksiyonların grafikleri. (a) $x \rightarrow 0$ iken $f(x)$ sonsuza yaklaşır. (b) $x \rightarrow -3$ iken $g(x)$ sonsuza yaklaşır.

ÖRNEK 2 İki taraflı sonsuz limitler

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 'nin $x = 0$ civarında ve

(b) $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ 'nin $x = -3$ civarındaki

davranışlarını açıklayın.

Çözüm

(a) x sıfıra iki taraftan da yaklaşırken, $1/x^2$ 'nin değerleri pozitiftir ve çok fazla büyürler (Şekil 2.39a):

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

(b) $g(x) = 1/(x+3)^2$ 'nin grafiği $f(x) = 1/x^2$ grafiğinin sola doğru 3 birim kaydırılmış şeklidir (Şekil 2.39b). Dolayısıyla, g fonksiyonu -3 civarında aynen f 'nin 0 civarında davrandığı gibi davranır.

$$\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x+3)^2} = \infty.$$

$y = 1/x$ fonksiyonu, $x \rightarrow 0$ iken tutarlı bir davranış göstermez. $x \rightarrow 0^+$ ise $1/x \rightarrow \infty$ 'dur, ancak $x \rightarrow 0^-$ ise $1/x \rightarrow -\infty$ olur. $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x)$ için söyleyebileceğimiz tek şey varolmadığıdır. $y = 1/x^2$ fonksiyonu farklıdır. x sıfıra iki taraftan da yaklaşırken değerleri sonsuza gider, bu yüzden $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x^2) = \infty$ olduğunu söyleyebiliriz.

ÖRNEK 3 Rasyonel fonksiyonlar paydalarının sıfırlarının civarında farklı davranabilirler.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = 0$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty$

x 2 civarında olmak üzere, değerler $x > 2$ için negatiftir.

(d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty$

x 2 civarında olmak üzere, $x < 2$ için değerler pozitiftir.

(e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)}$ yoktur.

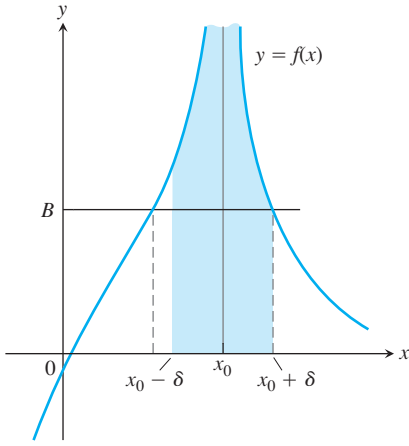
(c) ve (d)'ye bakın.

(f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$

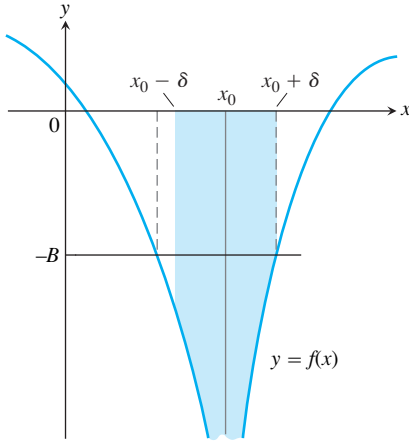
(a) ve (b) şıklarında, $x = 2$ 'de paydadaki sıfırın etkisi pay'ın da orada sıfır olması nedeniyle sadeleşir. Böylece sonlu bir limit bulunur. Aynı şey, sadeleştirmenin paydada hala bir sıfır bıraktığı (f) şıkında geçerli değildir.

Sonsuz Limitlerin Kesin Tanımı

Sonsuz limitlerin tanımları, x_0 'a yeterince yakın bütün x 'ler için $f(x)$ 'in sonlu bir L sayısına keyfi olarak yakın olmasını gerektirmek yerine, $f(x)$ 'in orijinden keyfi olarak



ŞEKİL 2.40 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ için $f(x)$ 'in grafiği $y = B$ doğrusunun üst tarafında kalır.



ŞEKİL 2.41 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ için $f(x)$ 'in grafiği $y = -B$ doğrusunun üst tarafında kalır.

uzak olmasını gerektirir. Bu değişiklik dışında, kullanılan dil daha önce gördüklerimizle aynıdır. Şekil 2.40 ve 2.41 bu tanımları açıklamaktadır.

TANIM Limit Olarak Sonsuz ve Negatif Sonsuz

1. Her pozitif B reel sayısına karşılık

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{iken} \quad f(x) > B$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, x x_0 'a yaklaşırken $f(x)$ sonsuza yaklaşıyor der ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

yazarız.

2. Her negatif $-B$ reel sayısına karşılık

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{iken} \quad f(x) < -B$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, x x_0 'a yaklaşırken $f(x)$ eksi sonsuza yaklaşıyor der ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

yazarız.

x_0 'daki tek taraflı sonsuz limitlerin kesin tanımları da benzerdir ve alıştırmalarda verilmektedir.

ÖRNEK 4 Sonsuz Limitlerin Tanımını Kullanarak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty \quad \text{olduğunu ispat edin.}$$

Çözüm $B > 0$ verilsin,

$$0 < |x - 0| < \delta \quad \text{iken} \quad \frac{1}{x^2} > B$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulmak istiyoruz.

Şimdi,

$$\text{Ancak ve yalnız } x^2 < \frac{1}{B} \quad \text{veya buna denk olarak } |x| < \frac{1}{\sqrt{B}} \quad \text{ise } \frac{1}{x^2} > B \text{ dir.}$$

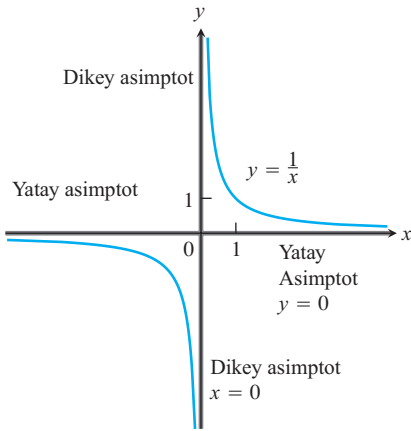
Böylece, $\delta = 1/\sqrt{B}$ (veya daha küçük bir pozitif sayı) seçersek

$$|x| < \delta \quad \text{olmasının} \quad \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} \geq B \quad \text{'yi gerektirdiğini görürüz.}$$

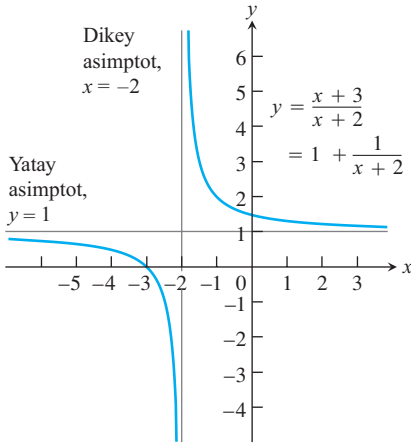
Bu nedenle, tanıma göre

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

dir.



ŞEKİL 2.42 Koordinat eksenleri $y = 1/x$ hiperbolünün her iki kolunun asimptotlarıdır.



ŞEKİL 2.43 $y = 1$ ve $x = -2$ doğruları $y = (x+3)/(x+2)$ eğrisinin asimptotlarıdır (Örnek 5).

Dikey Asimptotlar

$y = 1/x$ fonksiyonunun grafiğinin üstündeki bir nokta ile y -ekseni arasındaki uzaklık, nokta grafik üzerinde dikey olarak orijinden uzaklaştıkça, sıfıra yaklaşır (Şekil 2.42). Bu davranış meydana gelir çünkü

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

dir. $x = 0$ doğrusunun (y -ekseni), $y = 1/x$ 'in grafiğinin bir *dikey asimptotu* olduğunu söyleriz. Paydanın $x = 0$ da sıfır olduğuna ve fonksiyonun burada tanımlı olmadığına dikkat edin.

TANIM Dikey Asimptot

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ veya $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$.
ise, $x = a$ doğrusu $y = f(x)$ fonksiyonunun bir dikey asimptotudur.

ÖRNEK 5 Asimptot Bulmak

Aşağıdaki eğrinin asimptotlarını bulun.

$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

Çözüm $x \rightarrow \pm\infty$ iken ve paydanın sıfır olduğu $x \rightarrow -2$ 'deki davranışla ilgileniyoruz.

Rasyonel fonksiyonu $(x+3)$ 'ü $(x+2)$ 'ye bölerek elde edilecek kalanlı bir rasyonel fonksiyon olarak yazarsak, asimptotlar daha kolay bulunur:

$$\begin{array}{r} 1 \\ x+2 \overline{) x+3} \\ \underline{x+2} \\ 1 \end{array}$$

Bu y 'yi yeniden yazmamızı sağlar:

$$y = 1 + \frac{1}{x+2}$$

Bundan, sorudaki eğrinin $y = 1/x$ eğrisinin 1 birim yukarı ve 2 birim sola kaydırılmış hali olduğu anlaşılır (Şekil 2.43). Asimptotlar, koordinat eksenleri yerine, artık $y = 1$ ve $x = -2$ doğrularıdır.

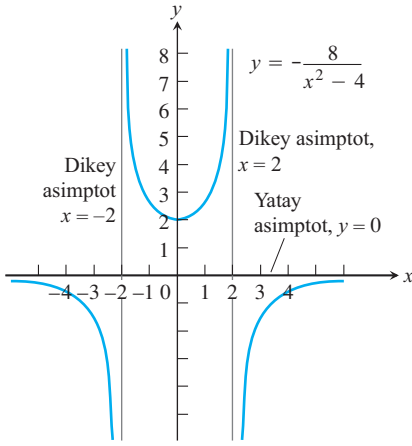
ÖRNEK 6 Asimptotlar İki Taraflı Olmak Zorunda Değildirler

Aşağıdaki eğrinin yatay ve dikey asimptotlarını bulun.

$$f(x) = -\frac{8}{x^2 - 4}$$

Çözüm $x \rightarrow \pm\infty$ ve paydanın sıfır olduğu $x = \pm 2$ iken ki davranışlarla ilgileniyoruz. f 'nin bir çift fonksiyon olduğuna ve dolayısıyla grafiğinin y -eksenine göre simetrik olduğuna dikkat edin.

(a) $x \rightarrow \pm\infty$ iken davranış. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, olduğu için, $y = 0$ doğrusu grafiğin sağ taraftan bir asimptotudur. Simetriden dolayı, aynı zamanda soldan da asimptottur



ŞEKİL 2.44 $y = -8/(x^2 - 4)$ 'nin grafiği. Eğrinin x -eksenine yalnız bir taraftan yaklaştığına dikkat edin. Asimptotlar iki taraflı olmak zorunda değildirler (Örnek 6).

(Şekil 2.44). Eğrinin, x -eksenine yalnız negatif taraftan (veya attan) yaklaştığına dikkat edin.

(b) $x \rightarrow \pm 2$ iken davranış.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty$$

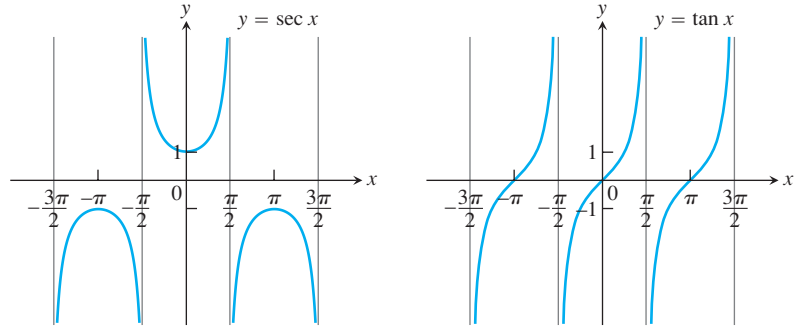
olduğu için $x = 2$ doğrusu hem soldan hem de sağdan bir asimptottur. Simetri dolayısıyla, aynı $x = -2$ için de geçerlidir.

f 'nin başka her noktada sonlu bir limiti olduğu için, başka asimptotu yoktur. ■

ÖRNEK 7 Sonsuz Sayıda Asimptotu Olan Eğriler

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{ve} \quad y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

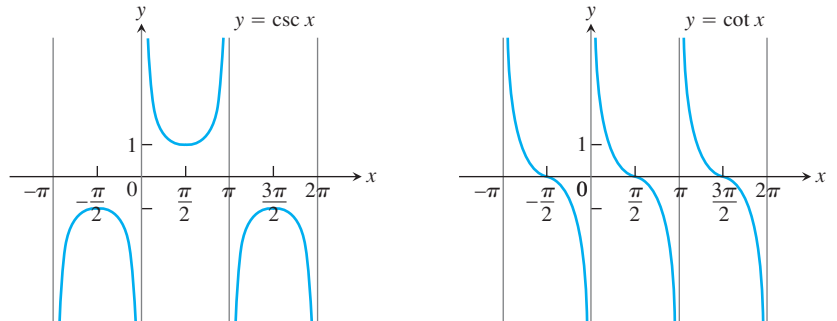
eğrilerinin grafiklerinin ikisinin de $\cos x = 0$ olduğu $\pi/2$ 'nin tek-tamsayı katlarında dikey asimptotları vardır (Şekil 2.45).



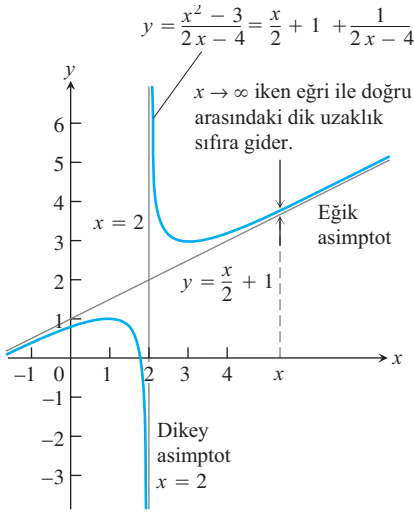
ŞEKİL 2.45 $\sec x$ ve $\tan x$ fonksiyonlarının grafiklerinin sonsuz sayıda dikey asimptotları vardır (Örnek 7).

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x} \quad \text{ve} \quad y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

eğrilerinin ikisinin de $\sin x = 0$ olduğu π 'nin tamsayı katlarında dikey asimptotları vardır (Şekil 2.46).



ŞEKİL 2.46 $\csc x$ ve $\cot x$ fonksiyonlarının grafikleri (Örnek 7). ■



ŞEKİL 2.47 $f(x) = (x^2 - 3)/(2x - 4)$ fonksiyonunun grafiğinin bir dikey asimptotu ve bir yatay asimptotu vardır (Örnek 8).

ÖRNEK 8 Payının Derecesi Paydasının Derecesinden Büyük Olan Bir Rasyonel Fonksiyon

Aşağıdaki fonksiyonun asimptotlarını bulun.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

Çözüm $x \rightarrow \pm\infty$ ve paydanın sıfır olduğu $x \rightarrow 2$ iken ki davranışlarla ilgileniyoruz. Önce $(x^2 - 3)$ 'ü $(2x - 4)$ 'e böleriz:

$$\begin{array}{r} \frac{x}{2} + 1 \\ 2x - 4 \overline{) x^2 - 3} \\ \underline{x^2 - 2x} \\ 2x - 3 \\ \underline{2x - 4} \\ 1 \end{array}$$

Bu bize

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \underbrace{\frac{x}{2} + 1}_{\text{lineer}} + \underbrace{\frac{1}{2x - 4}}_{\text{kalan}}$$

olduğunu söyler. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$ ve $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ olduğu için $x = 2$ doğrusu iki taraflı bir asimptottur. $x \rightarrow \pm\infty$ iken, kalan 0'a yaklaşır ve $f(x) \rightarrow (x/2) + 1$ olur. $y = (x/2) + 1$ doğrusu hem sağdan hem de soldan bir eğik asimptottur (Şekil 2.47).

Örnek 8 de şuna dikkat edin, bir rasyonel fonksiyonun payının derecesi paydasının derecesinden büyük ise, $|x|$ büyürken limit, pay ve paydasının işaretlerine bağlı olarak, $+\infty$ veya $-\infty$ dur.

Baskın Terimler

Örnek 8'deki

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

fonksiyonu hakkında çabucak yapabileceğimiz bütün gözlemlerden muhtemelen en yararlısı

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x - 4}$$

olduğudur. Bu bize derhal

$$f(x) \approx \frac{x}{2} + 1 \quad \text{Büyük } x\text{'ler için}$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2x - 4} \quad \text{2'ye yakın } x\text{'ler için}$$

olduğunu söyler. f 'nin nasıl davrandığını bilmek istiyorsak, bu şekilde bulabiliriz. x sayısal olarak büyük olduğunda, $y = (x/2) + 1$ gibi davranır ve $1/(2x - 4)$ 'ün f 'nin

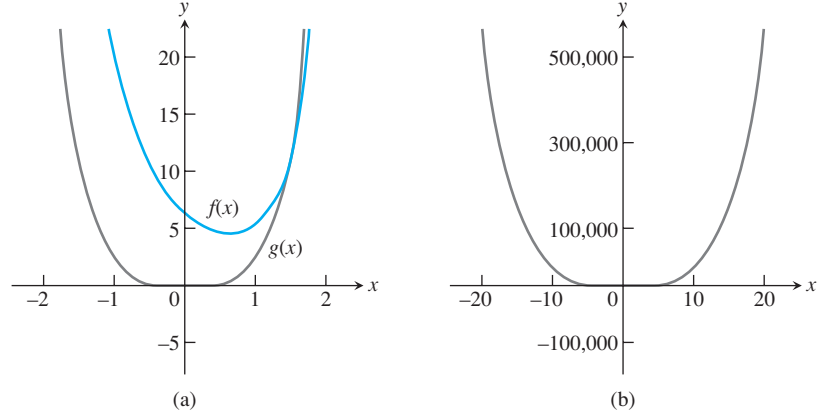
toplam değerine katkısı önemsizdir. x 2'ye yakın olduğundaysa, $1/(2x - 4)$ gibi davranır, yani baskın katkı $1/(2x - 4)$ 'den gelir.

x sayısal olarak büyük olduğunda $(x/2) + 1$ baskın çıkar ve x 2 civarındayken $1/(2x - 4)$ baskın çıkar deriz. Bunlar gibi baskın terimler bir fonksiyonun davranışını kestirmenin anahtarıdır. İşte bir başka örnek.

ÖRNEK 9 Büyük Ölçek Üzerinde Aynı Gibi Gözüken İki Grafik

$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6$ ve $g(x) = 3x^4$ olsun. x 'in sayısal olarak küçük değerlerinde f ve g oldukça farklı olsalar da, çok büyük $|x|$ değerlerinde neredeyse aynı olduklarını gösterin.

Çözüm f ve g 'nin grafikleri orijin yakınında oldukça farklı davranırlar (Şekil 2.48a), fakat büyük ölçekte neredeyse aynı gibi gözükürler (Şekil 2.48b).



ŞEKİL 2.48 f ve g 'nin grafikleri, (a) küçük $|x|$ değerlerinde farklıdırlar ve büyük $|x|$ değerlerinde neredeyse aynıdırlar (Örnek 9).

Grafik olarak g ile temsil edilen, f 'deki $3x^4$ teriminin, x 'in sayısal olarak büyük değerleri için f polinomuna baskın olduğunu, $x \rightarrow \pm\infty$ iken iki fonksiyonun oranlarını inceleyerek test edebiliriz.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6}{3x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{3x^3} + \frac{2}{x^4} \right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

olduğunu ve dolayısıyla büyük $|x|$ değerlerinde f ve g 'nin neredeyse aynı olduklarını buluruz. ■

ALİŞTIRMALAR 2.5

Sonsuz Limitler

1–12 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5}{2x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2}$
4. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3}$
5. $\lim_{x \rightarrow -8^+} \frac{2x}{x+8}$
6. $\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{3x}{2x+10}$
7. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{4}{(x-7)^2}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2(x+1)}$
9. a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{3x^{1/3}}$
- b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{3x^{1/3}}$
10. a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^{1/5}}$
- b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x^{1/5}}$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x^{2/5}}$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2/3}}$

13–16 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

13. $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x$
14. $\lim_{x \rightarrow (-\pi/2)^+} \sec x$
15. $\lim_{\theta \rightarrow 0^-} (1 + \csc \theta)$
16. $\lim_{\theta \rightarrow 0} (2 - \cot \theta)$

Ek Hesaplamalar

17–22 alıştırmalarındaki limitleri verilen durumlarda bulun.

17. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4}$
 - a. $x \rightarrow 2^+$
 - b. $x \rightarrow 2^-$
 - c. $x \rightarrow -2^+$
 - d. $x \rightarrow -2^-$
18. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 1}$
 - a. $x \rightarrow 1^+$
 - b. $x \rightarrow 1^-$
 - c. $x \rightarrow -1^+$
 - d. $x \rightarrow -1^-$
19. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} \right)$
 - a. $x \rightarrow 0^+$
 - b. $x \rightarrow 0^-$
 - c. $x \rightarrow \sqrt[3]{2}$
 - d. $x \rightarrow -1$
20. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 1}{2x + 4}$
 - a. $x \rightarrow -2^+$
 - b. $x \rightarrow -2^-$
 - c. $x \rightarrow 1^+$
 - d. $x \rightarrow 0^-$

21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2}$
 - a. $x \rightarrow 0^+$
 - b. $x \rightarrow 2^+$
 - c. $x \rightarrow 2^-$
 - d. $x \rightarrow 2$
 - e. $x \rightarrow 0$ iken ki limit hakkında bir şey söylenebilir mi?
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x}$
 - a. $x \rightarrow 2^+$
 - b. $x \rightarrow -2^+$
 - c. $x \rightarrow 0^-$
 - d. $x \rightarrow 1^+$
 - e. $x \rightarrow 0$ iken ki limit hakkında bir şey söylenebilir mi?

23–26 alıştırmalarındaki limitleri verilen durumlarda bulun.

23. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(2 - \frac{3}{t^{1/3}} \right)$
 - a. $t \rightarrow 0^+$
 - b. $t \rightarrow 0^-$
24. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t^{3/5}} + 7 \right)$
 - a. $t \rightarrow 0^+$
 - b. $t \rightarrow 0^-$
25. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^{2/3}} + \frac{2}{(x-1)^{2/3}} \right)$
 - a. $x \rightarrow 0^+$
 - b. $x \rightarrow 0^-$
 - c. $x \rightarrow 1^+$
 - d. $x \rightarrow 1^-$
26. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}} \right)$
 - a. $x \rightarrow 0^+$
 - b. $x \rightarrow 0^-$
 - c. $x \rightarrow 1^+$
 - d. $x \rightarrow 1^-$

Rasyonel Fonksiyonların Grafiklerini Çizmek

27–38 alıştırmalarındaki rasyonel fonksiyonların grafiklerini çizin. Asimptot ve baskın terimlerin grafikleri ve denklemlerini de ekleyin.

27. $y = \frac{1}{x-1}$
28. $y = \frac{1}{x+1}$
29. $y = \frac{1}{2x+4}$
30. $y = \frac{-3}{x-3}$
31. $y = \frac{x+3}{x+2}$
32. $y = \frac{2x}{x+1}$
33. $y = \frac{x^2}{x-1}$
34. $y = \frac{x^2+1}{x-1}$
35. $y = \frac{x^2-4}{x-1}$
36. $y = \frac{x^2-1}{2x+4}$
37. $y = \frac{x^2-1}{x}$
38. $y = \frac{x^3+1}{x^2}$

Değerler ve Limitlerden Grafik Yaratmak

39–42 alıştırmaalarında, verilen koşulları sağlayan bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizin. Formül gerekmemektedir – sadece koordinat eksenlerine isim verin ve uygun bir grafik çizin (Yanıtlar tek değildir, dolayısıyla grafikleriniz cevaplar bölümündekilerle aynı olmayabilir).

39. $f(0) = 0, f(1) = 2, f(-1) = -2, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

40. $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$, ve $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$

41. $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ ve $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$

42. $f(2) = 1, f(-1) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ ve $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

Fonksiyon Yaratmak

43–46 alıştırmaalarında, verilen koşulları sağlayan bir fonksiyon bulun ve grafiğini çizin (Yanıtlar tek değildir. Koşulları sağlayan herhangi bir fonksiyon kabul edilebilir. Yardımcı olacaksa parçalı olarak tanımlanmış fonksiyonlar kullanabilirsiniz).

43. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty$ ve $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$

44. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = -\infty$ ve $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \infty$

45. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1, \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -1$, ve $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1$

46. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} k(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = \infty$ ve $\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = -\infty$

Sonsuz Limitlerin Esas Tanımı

47–50 alıştırmaalarında limitleri ispatlamak için tanımları kullanın.

47. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$

48. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty$

49. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2}{(x-3)^2} = -\infty$

50. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{1}{(x+5)^2} = \infty$

Tek Taraflı Sonsuz Limitlerin Esas Tanımı

51. Aşağıda sağdan sonsuz-limit tanımı bulunmaktadır.

Pozitif her B reel sayısına karşılık,

$$x_0 < x < x_0 + \delta \text{ iken } f(x) > B$$

olmasını sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, x x_0 'a sağdan yaklaşırken $f(x)$ sonsuza gider deriz ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$$

yazarız.

Tanımı aşağıdaki durumları kapsayacak şekilde değiştirin.

a. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$

b. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$

c. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$

Alıştırma 51'deki esas tanımları kullanarak 52–56 alıştırmalarındaki ifadeleri ispatlayın.

52. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

53. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

54. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$

55. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$

56. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \infty$

Terimlerin Grafiklerini Çizmek

57–60 alıştırmalarındaki fonksiyonlardan her biri iki terimin toplamı veya farkı olarak verilmektedir. Önce terimlerin grafiğini çizin (aynı eksen takımında). Sonra bu grafikleri rehber olarak kullanarak, fonksiyonun grafiğini çizin.

57. $y = \sec x + \frac{1}{x}, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

58. $y = \sec x - \frac{1}{x^2}, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

59. $y = \tan x + \frac{1}{x^2}, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

60. $y = \frac{1}{x} - \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Grafikleri Formüllerle Karşılaştırma

61–64 alıştırmalarındaki eğrileri çizin ve eğrinin formülüyle gördükleriniz arasındaki ilişkiyi açıklayın.

61. $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

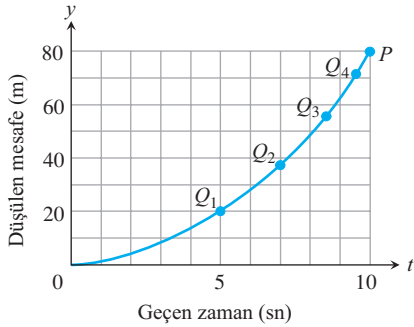
62. $y = \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$

63. $y = x^{2/3} + \frac{1}{x^{1/3}}$

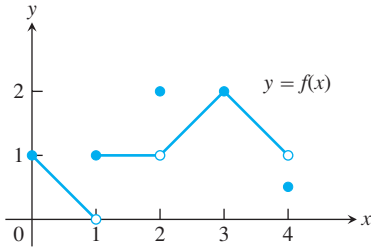
64. $y = \sin\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right)$

2.6

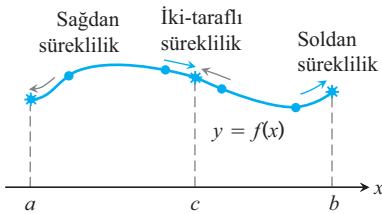
Süreklilik



ŞEKİL 2.49 Serbest düşen bir cismin, çizilen deneysel $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ veri noktalarını kesiksiz bir eğri ile birleştirmek.



ŞEKİL 2.50 Fonksiyon, $[0, 4]$ üzerinde $x = 1, x = 2$ ve $x = 4$ dışındaki noktalarda süreklidir (Örnek 1)



ŞEKİL 2.51 a, b , ve c noktalarında süreklilik.

Laboratuvarıda üretilen veya doğadan toplanan fonksiyon değerlerini işaretlerken, işaretlenen noktaları genellikle, ölçüm yapmadığımız zamanlarda fonksiyonun değerlerinin neler olabileceğini göstermek amacıyla, kesiksiz bir eğriyle birleştiririz (Şekil 2.49). Bunu yaparken, *süreklili bir fonksiyonla*, yani değerleri verilerle sürekli olarak değişen ve aradaki değerleri almadan bir değerden diğerine atlamayan bir fonksiyonla çalıştığımızı varsayarız. Sürekli bir fonksiyonun, x bir c ye yaklaşırkenki limiti basitçe fonksiyonun c deki değeri hesaplanarak bulunabilir. (Bunun, polinomlar için doğru olduğunu Bölüm 2.2 de gördük.)

Tanım kümesi üzerinde grafiği, kalemi kaldırmadan tek bir sürekli hareketle çizilebilen herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyona bir örnektir. Bu bölümde bir fonksiyonun sürekli olmasının ne anlama geldiğini daha kesin olarak inceleyeceğiz. Ayrıca, sürekli fonksiyonların özelliklerini çalışacağız ve Bölüm 1.2 de gösterilen fonksiyon tiplerinin bir çoğunun sürekli olduklarını göreceğiz.

Bir Noktada Süreklilik

Sürekliliği anlamak için, Bölüm 2.4 Örnek 2 de limitlerini incelediğimiz Şekil 2.50 deki gibi bir fonksiyonu göz önüne almamız gerekir.

ÖRNEK 1 Sürekliliği Araştırmak

Şekil 2.50 deki f fonksiyonunun sürekli olduğu noktaları ve süreksiz olduğu noktaları bulun.

Çözüm f fonksiyonu $[0, 4]$ tanım kümesi içinde, $x = 1, x = 2$ ve $x = 4$ dışındaki her noktada süreklidir. Bu noktalarda grafikte kopukluklar vardır. Tanım kümesi içindeki her noktada f 'nin limiti ile f 'nin değeri arasındaki ilişkiyi düşünün.

f 'nin sürekli olduğu noktalar:

$$\begin{aligned} x = 0 \text{'da} & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0). \\ x = 3 \text{'de} & \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3). \\ 0 < c < 4, c \neq 1, 2 \text{'de}, & \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c). \end{aligned}$$

f 'nin süreksiz olduğu noktalar:

$$\begin{aligned} x = 1 \text{'de}, & \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ yoktur.} \\ x = 2 \text{'de}, & \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 \text{ fakat } 1 \neq f(2). \\ x = 4 \text{'te}, & \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1, \text{ fakat } 1 \neq f(4). \\ c < 0, c > 4 \text{'te}, & \quad \text{bu noktalar } f \text{'nin tanım kümesinde değildir.} \end{aligned}$$

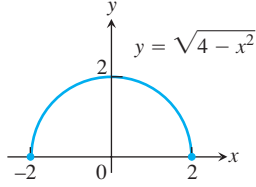
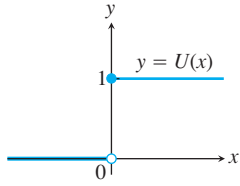
Bir fonksiyonun tanım kümesinde bir noktadaki sürekliliği tanımlamak için, bir iç noktadaki (iki-tarafli limit gerektiren) ve bir uç noktadaki (tek tarafli bir limit gerektiren) sürekliliği tanımlamamız gerekir (Şekil 2.51).

TANIM Bir Noktada Sürekli*İç nokta :*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

ise, $y = f(x)$ fonksiyonu tanım kümesinin c **iç noktasında sürekli**dir.*Uç nokta:*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{veya} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

ise, $y = f(x)$ fonksiyonu tanım kümesinin sırasıyla, a **sol uç noktasında sürekli**dir veya b **sağ uç noktasında sürekli**dir.**ŞEKİL 2.52** Tanım kümesinin her noktasında sürekli olan bir fonksiyon (Örnek 2).**ŞEKİL 2.53** Orijinde sağdan sürekli fakat soldan sürekli olmayan bir fonksiyon. Burada bir sıçramalı süreksizliği vardır (Örnek 3).

Bir f fonksiyonu bir c noktasında sürekli değilse, f fonksiyonu c 'de **süreksizdir** ve c noktası f 'nin **bir süreksizlik noktasıdır** deriz. c 'nin f fonksiyonunun tanım kümesinde olması gerekmediğine dikkat edin.

Bir f fonksiyonu için, $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$ ise, fonksiyon tanım aralığının $x = c$ noktasında **sağdan-sürekli**, $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$ ise, fonksiyon c noktasında **soldan sürekli**dir. Yani bir fonksiyon, a noktasında sağdan sürekliyse, tanım kümesinin sol uç noktası a 'da sürekli, b noktasında soldan sürekliyse, b sağ uç noktasında sürekli. Tanım aralığının bir c iç noktasında sürekli olabilmesi için, c 'de hem sağdan hem de soldan sürekli olması gerekir (Şekil 2.51).

ÖRNEK 2 Tanım Kümesinin Tamamında Sürekli Bir Fonksiyon

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ fonksiyonu $[-2, 2]$ tanım aralığının her noktasında sürekli (Şekil 2.52). Bu, f 'nin sağdan sürekli olduğu $x = -2$ ve soldan sürekli olduğu $x = 2$ noktalarını da içerir. ■

ÖRNEK 3 Birim Adım Fonksiyonunun Sıçramalı Süreksizliği Vardır

Şekil 2.53'te gösterilen $U(x)$ basamak fonksiyonu $x = 0$ 'da sağdan sürekli, ancak o noktada soldan sürekli veya sürekli değildir. $x = 0$ 'da sıçramalı süreksizliği vardır. ■

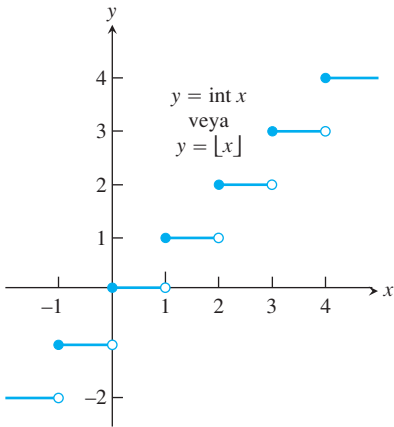
Sürekliliği bir test şeklinde özetleyebiliriz.

Süreklilik Testi

Bir $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki üç koşulu da sağlıyorsa, $x = c$ noktasında sürekli:

1. $f(c)$ vardır (c f 'nin tanım kümesindedir)
2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ vardır ($x \rightarrow c$ iken f 'nin limiti vardır)
3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ (limit fonksiyon değerine eşittir)

Tek taraflı süreklilik ve bir uç noktada süreklilik için, testin 2. ve 3. kısımlarındaki limitler uygun tek taraflı limitlerle değiştirilmelidir.



ŞEKİL 2.54 En büyük tamsayı fonksiyonu, tamsayı olmayan her noktada süreklidir. Her tamsayı sağdan sürekli fakat soldan sürekli değildir (Örnek 4).

ÖRNEK 4 En Büyük Tamsayı Fonksiyonu

Bölüm 1'de tanıtilen $y = \lfloor x \rfloor$ veya $y = \text{int } x$, fonksiyonunun grafiği Şekil 2.54'te çizilmiştir. Her tamsayıda süreksizdir çünkü herhangi bir n tamsayısında limit yoktur:

$$\lim_{x \rightarrow n^-} \text{int } x = n - 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow n^+} \text{int } x = n$$

dir, dolayısıyla $x \rightarrow n$ iken soldan ve sağdan limitler eşit değildir. $\text{int } n = n$ olduğundan en büyük tamsayı fonksiyonu her tamsayıda sağdan süreklidir (fakat soldan sürekli değildir).

En büyük tamsayı fonksiyonu, tamsayılardan farklı her reel sayıda süreklidir. Örneğin,

$$\lim_{x \rightarrow 1.5} \text{int } x = 1 = \text{int } 1.5$$

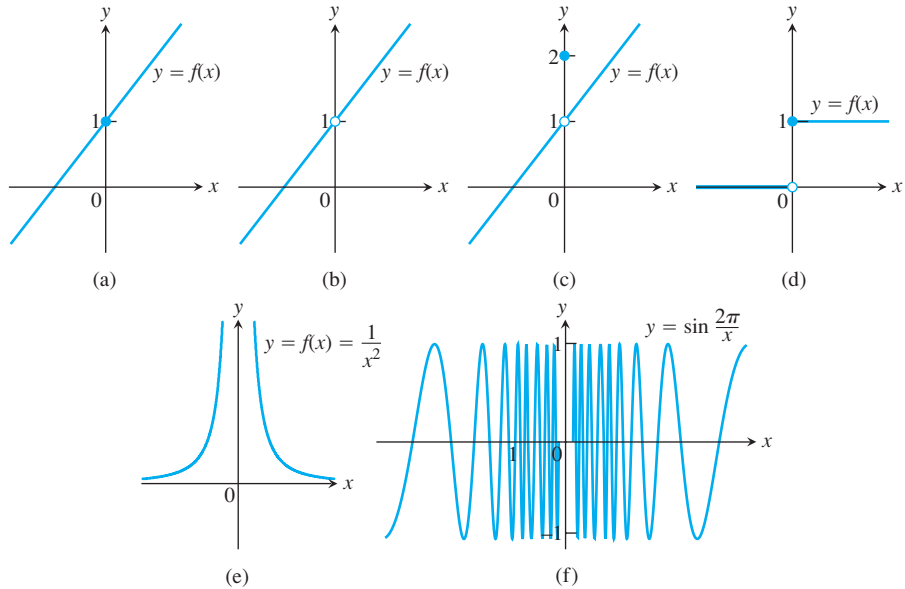
dir. Genel olarak, n bir tamsayı olmak üzere $n - 1 < c < n$ ise

$$\lim_{x \rightarrow c} \text{int } x = n - 1 = \text{int } c$$

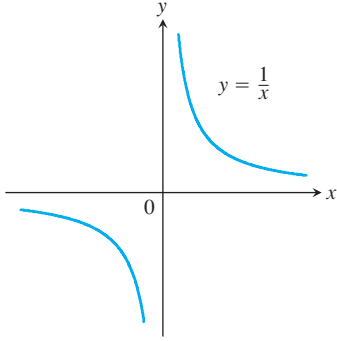
dir.

Şekil 2.55 süreksizlik tiplerinin bir kataloğudur. Şekil 2.55a'daki fonksiyon $x = 0$ da süreklidir. Şekil 2.55b'deki fonksiyon için $f(0) = 1$ olsaydı fonksiyon sürekli olurdu. Şekil 2.55c'deki fonksiyon için $f(0) = 2$ yerine $f(0) = 1$ olsaydı fonksiyon sürekli olurdu. Şekil 2.55b ve Şekil 2.55c'deki süreksizlikler **kaldırılabilir** süreksizliklerdir. Her fonksiyonun $x \rightarrow 0$ iken bir limiti vardır ve $f(0)$ 'ı bu limite eşit olarak tanımlamakla süreksizliği kaldırabiliriz.

Şekil 2.55d'den f' 'ye kadar olan süreksizlikler daha ciddidir: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ bulunmamaktadır ve f' 'yi 0 da değiştirerek durumu geliştirmenin bir yolu yoktur. Şekil 2.55d'deki birim adım fonksiyonunun bir **sıçramalı süreksizliği** vardır: tek taraflı limitler vardır fakat değerleri farklıdır. Şekil 2.55e'deki $f(x) = 1/x^2$ fonksiyonunun bir **sonsuz süreksizliği** vardır. Şekil 2.55f'deki fonksiyonun bir **salınan süreksizliği** vardır: fonksiyon çok fazla salınmaktadır, dolayısıyla $x \rightarrow 0$ iken limiti yoktur.



ŞEKİL 2.55 (a) daki fonksiyon $x = 0$ da süreklidir; (b) den (f) ye kadar olanlar değildir.



ŞEKİL 2.56 $y = 1/x$ fonksiyonu $x = 0$ dışındaki her değerde süreklidir. $x = 0$ da bir süreksizlik noktası vardır. (Örnek 5).

Süreklili Fonksiyonlar

Bir fonksiyon, ancak ve yalnız bir aralığın her noktasında sürekli ise **bu aralık üzerinde süreklidir**. Örneğin, Şekil 2.52 de çizilen yarım çember fonksiyonu, tanım kümesi olan $[-2, 2]$ aralığının her noktasında süreklidir. Tanım kümesinin her noktasında sürekli olan bir fonksiyon **süreklili fonksiyondur**. Bir sürekli fonksiyon her aralıkta sürekli olmak zorunda değildir. Örneğin, $y = 1/x$ fonksiyonu $[-1, 1]$ üzerinde sürekli değildir (Şekil 2.56), fakat $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ tanım kümesi zerinde süreklidir.

ÖRNEK 5 Süreklili Fonksiyonları Belirlemek

- (a) $y = 1/x$ fonksiyonu (Şekil 2.56), tanım kümesinin her noktasında sürekli olduğundan, sürekli bir fonksiyondur. $x = 0$ da bir süreksizlik noktası vardır, ancak, orada tanımlı değildir;
- (b) Bölüm 2.3 Örnek 3'e göre $f(x) = x$ birim fonksiyonu ve sabit fonksiyonlar her yerde süreklidirler. ■

Süreklili fonksiyonların cebirsel kombinasyonları tanımlı oldukları her yerde süreklidirler.

TEOREM 9 Süreklili Fonksiyonların Özellikleri

f ve g fonksiyonları $x = c$ de sürekli ise, aşağıdaki kombinasyonları da $x = c$ de süreklidir.

1. *Toplamlar:* $f + g$
2. *Farkları:* $f - g$
3. *Çarpımlar:* $f \cdot g$
4. *Sabite Çarpım:* $k \cdot f$ herhangi bir k için
5. *Bölümler:* f/g , $g(c) \neq 0$ olmak koşuluyla
6. *Kuvvetler:* $f^{r/s}$, r ve s tam sayılar olmak üzere, c 'yi içeren bir açık aralıkta tanımlı olması koşuluyla.

Teorem 9'daki sonuçların çoğu Bölüm 2.2 Teorem 1 deki limit kurallarıyla kolayca ispatlanır. Örneğin, toplam kuralı için

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow c} (f + g)(x) &= \lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) \\
 &= \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x), \quad \text{Toplam kuralı, Teorem 1} \\
 &= f(c) + g(c) \quad \text{\textit{f ve g'nin c deki sürekliliği}} \\
 &= (f + g)(c).
 \end{aligned}$$

Bu, $f + g$ 'nin sürekli olduğunu gösterir.

ÖRNEK 6 Polinomlar ve Rasyonel Fonksiyonlar Süreklidirler

- (a) Her $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ polinomu süreklidir çünkü: Bölüm 2.2 Teorem 2'ye $\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c)$.

(b) $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlar ise Teorem 9'daki Bölüm Kuralına göre $P(x) / Q(x)$ rasyonel fonksiyonu tanımlı olduğu her yerde süreklidir ($Q(c) \neq 0$).

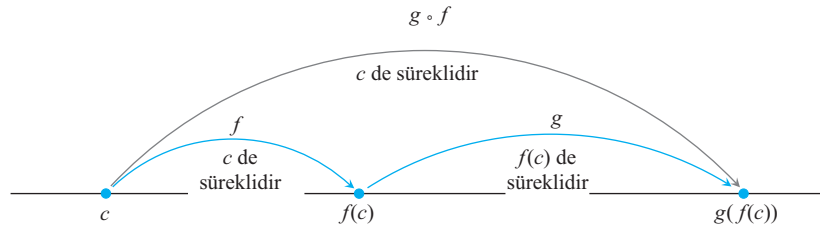
ÖRNEK 7 Mutlak Değer Fonksiyonunun Sürekliliği

$f(x) = |x|$ fonksiyonu x 'in her değerinde süreklidir. $x > 0$ ise, $f(x) = x$ bir polinomdur. $x < 0$ ise, $f(x) = -x$ başka bir polinomdur. Son olarak, orijinde $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|$ olur. ■

Bölüm 2.2 Örnek 6'ya göre $y = \sin x$ ve $y = \cos x$ fonksiyonları $x = 0$ da süreklidirler. Aslında, her iki fonksiyon da her yerde süreklidir (bkz. Alıştırma 62). Buna göre, Teorem 9'dan, altı trigonometrik fonksiyonun hepsinin, tanımlı oldukları her yerde sürekli oldukları sonucu çıkar. Örneğin, $y = \tan x$ fonksiyonu $\cdots \cup (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2) \cup \cdots$ üzerinde süreklidir.

Bileşkeler

Sürekli fonksiyonların bütün bileşkeleri süreklidir. Fikir şudur: $f(x)$ $x = c$ de sürekli ise ve $g(x)$ $x = f(c)$ de sürekli ise, $g \circ f$ $x = c$ de süreklidir (Şekil 2.57). Bu durumda $x \rightarrow c$ iken limit $g(f(c))$ dir.



ŞEKİL 2.57 Sürekli fonksiyonların bileşkeleri süreklidir.

TEOREM 10 Sürekli Fonksiyonların Bileşkesi

f c 'de sürekli ise ve g $f(c)$ 'de sürekli ise, $g \circ f$ bileşkesi c 'de süreklidir.

Sezgisel olarak, Teorem 10 anlamlıdır çünkü x c 'ye yakın ise $f(x)$ te $f(c)$ 'ye yakındır ve g $f(c)$ 'de sürekli olduğundan $g(f(x))$ $g(f(c))$ 'ye yakındır sonucu çıkar.

Bileşkelerin sürekliliği herhangi sonlu sayıda fonksiyon için geçerlidir. Tek istenen, her fonksiyonun uygulandığı noktada sürekli olmasıdır. Teorem 10'un ispatı için Ek 2'deki Alıştırma 6'ya bakın.

ÖRNEK 8 Teorem 9 ve 10 u uygulamak

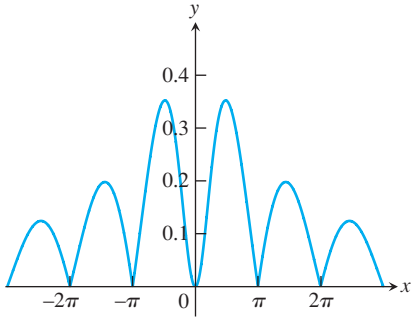
Aşağıdaki fonksiyonların kendi tanım aralıklarında sürekli olduklarını gösterin.

(a) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$

(b) $y = \frac{x^{2/3}}{1 + x^4}$

(c) $y = \left| \frac{x-2}{x^2-2} \right|$

(d) $y = \left| \frac{x \sin x}{x^2 + 2} \right|$



ŞEKİL 2.58 $y = |(x \sin x)/(x^2 + 2)|$ fonksiyonunun sürekliliğini düşündürmektedir (Örnek 8d).

Çözüm

- (a) Karekök fonksiyonu üzerinde sürekli olduğu için $[0, \infty)$ sürekli birim $f(x) = x$ fonksiyonunun bir rasyonel kuvvetidir (Teorem 9 Bölüm 6). Verilen fonksiyon $f(x) = x^2 - 2x - 5$ da polinomu ile $g(t) = \sqrt{t}$ karekök fonksiyonunun bileşkesidir.
- (b) Pay, birim fonksiyonun bir rasyonel kuvvetidir; payda her yerde pozitif bir polinomdur. Bu nedenle, bölüm sürekli dir.
- (c) $(x - 2)/(x^2 - 2)$ oranı her $x \neq \pm\sqrt{2}$ için sürekli dir ve verilen fonksiyon bu oranla sürekli olan mutlak değ er fonksiyonunun bileşkesidir (Örnek 7).
- (d) Sinüs fonksiyonu her yerde sürekli olduğ undan (Alıştırma 62), pay'daki terimi $x \sin x$ sürekli fonksiyonların çarpımıdır ve paydadaki $x^2 + 2$ terimi her yerde pozitif olan bir polinomdur. Verilen fonksiyon, sürekli fonksiyonların bir oranı ile sürekli olan mutlak değ er fonksiyonunun bileşkesidir (Şekil 2.58).

Bir Noktaya Sürekli Genişlemeler

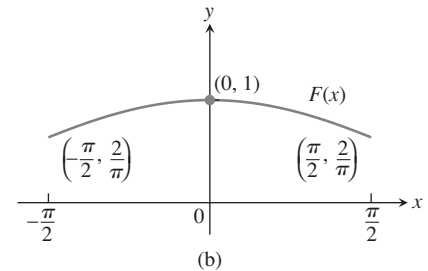
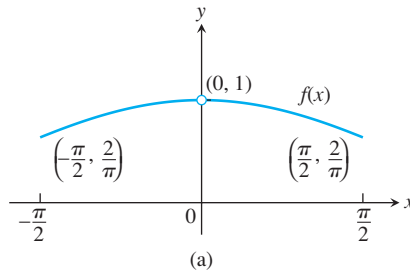
$y = (\sin x)/x$ fonksiyonu $x = 0$ dışındaki her noktada sürekli dir. Bu anlamda $y = 1/x$ fonksiyonu gibidir. Fakat, $x \rightarrow 0$ iken $y = (\sin x)/x$ 'in sonlu bir limiti var olduğ undan (Teorem 7) bu anlamda $y = 1/x$ 'ten farklıdır. Bu nedenle, fonksiyonun tanım kümesi, genişletilmiş fonksiyon $x = 0$ da sürekli olacak biçimde, $x = 0$ noktasını iç erecek şekilde genişletilebilir.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

fonskiyonu $F(x)$ da sürekli dir $x = 0$ çünkü

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = F(0)$$

dır (Şekil 2.59).



ŞEKİL 2.59 $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ için $f(x) = (\sin x)/x$ 'in grafiğ i $(0, 1)$ noktasını iç ermez çünkü fonksiyon $x = 0$ da tanımlı değ ilidir. (b) yeni $F(x)$ fonksiyonunu $F(0) = 1$ ve başka her yerde $F(x) = f(x)$ olacak şekilde tanımlayarak grafikteki süreksizliğ i kaldırabiliriz. Şuna dikkat edin, $F(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Daha genel olarak, bir fonksiyonun (bir rasyonel fonksiyon gibi) tanımlı olmadığı bir noktada bile limiti olabilir. $f(c)$ tanımlı değil, fakat $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ varsa,

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ } f\text{'nin tanım aralığıysa} \\ L, & x = c \end{cases}$$

kuralıyla yeni bir fonksiyon tanımlayabiliriz. F fonksiyonu $x = c$ 'de süreklidir. $F(x)$ fonksiyonuna f 'nin c 'ye **süreklili genişlemesi** denir. f rasyonel fonksiyonları için, sürekli genişlemeler genellikle ortak çarpanlar sadeleştirilerek bulunur.

ÖRNEK 9 Bir Sürekli Genişleme

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

fonksiyonunun $x = 2$ 'ye sürekli bir genişlemesi olduğunu gösterin ve bu genişlemeyi bulun.

Çözüm $f(2)$ tanımlı olmadığı halde, $x \neq 2$ ise

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x + 3}{x + 2}$$

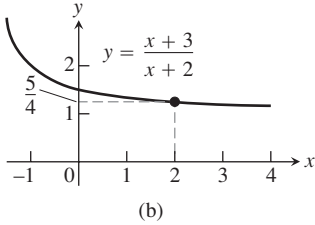
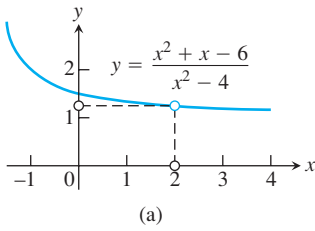
buluruz.

$$F(x) = \frac{x + 3}{x + 2}$$

fonksiyonu $x \neq 2$ için $f(x)$ 'e eşittir, fakat aynı zamanda $x = 2$ 'de süreklidir ve değeri $5/4$ 'tür. Yani F fonksiyonu f 'nin $x = 2$ 'ye sürekli genişlemesidir ve

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{5}{4}$$

bulunur. f 'nin grafiği Şekil 2.60'ta verilmektedir. F sürekli genişlemesinin grafiği bunun aynısıdır, fakat $(2, 5/4)$ 'te deliği yoktur. Aslında F fonksiyonu $x = 2$ 'deki süreksizlik noktası kaldırılmış f fonksiyonudur. ■



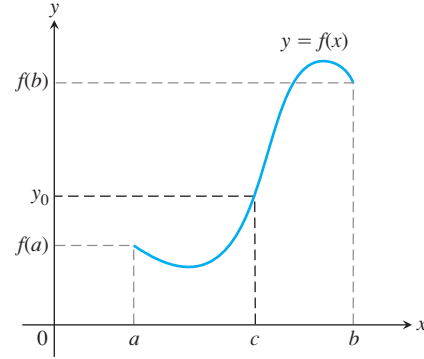
ŞEKİL 2.60 (a) $f(x)$ 'in grafiği ve (b) $F(x)$ 'in sürekli genişlemesi grafiği (Örnek 9).

Süreklili Fonksiyonlar için Ara Değer Teoremi

Aralıklarda sürekli olan fonksiyonların matematikte ve uygulamalarında özel bir yer tutmalarını sağlayan özellikleri vardır. Bunlardan biri *Ara Değer Özelliği*dir. Bir fonksiyon, aldığı iki değer arasındaki bütün değerleri alıyorsa fonksiyonun **Ara Değer Özelliği** vardır denir.

TEOREM 11 Süreklili Fonksiyonlar için Ara Değer Teoremi

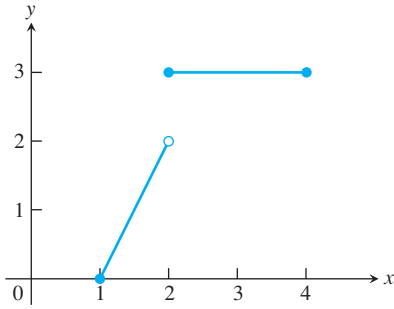
$[a, b]$ kapalı aralığında sürekli olan bir $f(x)$ fonksiyonu $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki her değeri alır. Başka bir deyişle, y_0 $f(a)$ ile $f(b)$ arasında herhangi bir değer ise, $[a, b]$ aralığındaki bir c için $f(c) = y_0$ dır.



Geometrik olarak, Ara Değer Teoremi şunu söylemektedir: y -eksenini $f(a)$ ile $f(b)$ sayıları arasında kesen herhangi bir $y = y_0$ yatay doğrusu $y = f(x)$ eğrisini $[a, b]$ aralığı üzerinde en az bir defa kesecektir.

Ara Değer Teoreminin ispatı reel sayı sisteminin bütünlük özelliğine dayanmaktadır ve daha ileri seviyedeki kitaplarda bulunabilir.

f 'nin aralık üzerindeki sürekliliği Teorem 11 için gereklidir. Şekil 2.61'deki fonksiyonda olduğu gibi, f fonksiyonu aralığın tek bir noktasında bile süreksizse, teoremin sonucu doğrulanmayabilir.



ŞEKİL 2.61

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & 1 \leq x < 2 \\ 3, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

fonksiyonu $f(1) = 0$ ve $f(4) = 3$ arasındaki her değeri almaz; 2 ile 3 arasındaki hiçbir değeri almaz.

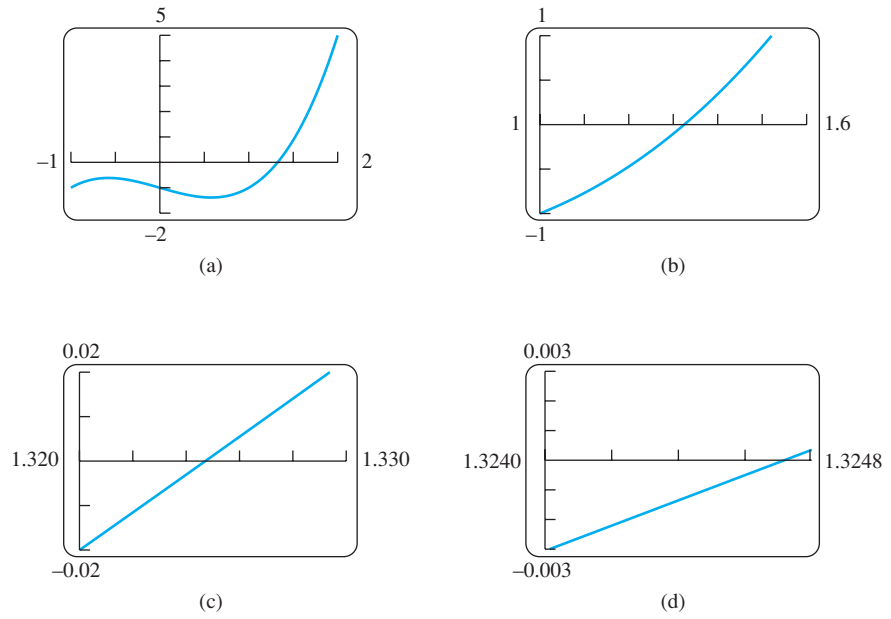
Grafikler İçin Bir Sonuç: Birleştirilebilirlik Bir aralık üzerinde sürekli bir fonksiyonun grafiğinin, aralık boyunca kesikli olamamasının nedeni Teorem 11'dir. Grafik, $\sin x$ 'in grafiği gibi **birleşik**, kesiksiz, tek bir eğri olacaktır. En büyük tamsayı fonksiyonu gibi (Şekil 2.54) sıçramaları veya $1/x$ gibi (Şekil 2.56) ayrı kolları olmayacaktır.

Kök Bulma İçin Bir Sonuç $f(x) = 0$ denkleminin çözümüne f fonksiyonunun bir **kökü** veya **sıfırı** deriz. Ara Değer Teoremi bize şunu söyler, f sürekliyse f 'nin üzerinde işaret değiştirdiği herhangi bir aralık fonksiyonun bir sıfırını içerir.

Özel olarak, bir bilgisayar ekranında bir sürekli fonksiyonun grafiğinin yatay eksenini geçtiğini gördüğümüzde bunun atlayarak geçme olmadığını biliriz. Orada fonksiyon değerinin sıfır olduğu bir nokta gerçekten vardır. Bu sonuç, grafiklerini çizebildiğimiz herhangi sürekli fonksiyonların sıfırlarını tahmin etme işlemine götürür:

1. Sıfırlarının kabaca nerede olduğunu görmek için fonksiyonun grafiğini geniş bir aralıkta çizin.
2. Sonra, x -koordinat değerini tahmin etmek için her sıfıra yaklaşın.

Grafik çizer hesap makinenizde veya bilgisayarınızda bu işlem üzerine pratik yapabilirsiniz. Şekil 2.62'de $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin grafik çözümündeki tipik adımlar görülmektedir.



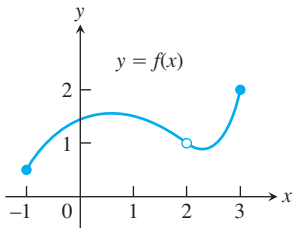
ŞEKİL 2.62 $f(x) = x^3 - x - 1$ fonksiyonunun bir sıfırına yaklaşmak. Kök $x = 1.3247$ yakınındadır.

ALİŞTIRMALAR 2.6

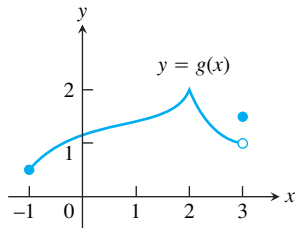
Grafiklerden Süreklilik

1-4 alıştırmalarında, verilen grafiğin $[-1, 3]$ aralığında sürekli olup olmadığını söyleyin. Değilse, nerede ve neden değildir?

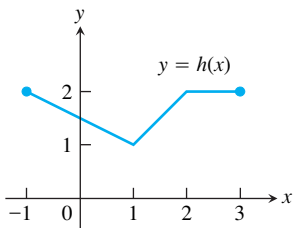
1.



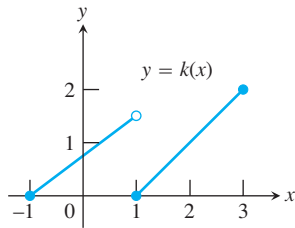
2.



3.



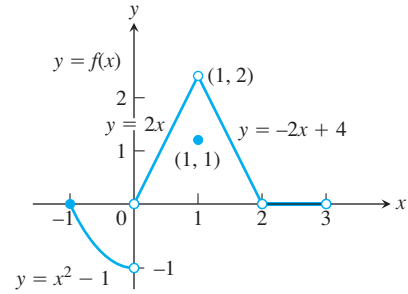
4.



5-10 Alıştırmaları aşağıdaki şekilde grafiği çizilen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \leq x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

funksiyonu hakkındadır.



5-10 Alıştırmalarındaki grafik

5. a. $f(-1)$ var mıdır?
b. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ var mıdır?
c. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$ midir?
d. $x = -1$ 'de f sürekli midir?
6. a. $f(1)$ var mıdır?
b. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ var mıdır?
c. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ midir?
d. $x = 1$ 'de f sürekli midir?
7. a. $x = 2$ 'de f tanımlı mıdır? (f 'nin tanımına bakın.)
b. $x = 2$ 'de f sürekli midir?
8. Hangi x değerlerinde f sürekli midir?
9. Genişlemiş fonksiyonun $x = 2$ 'de sürekli olması için $f(2)$ 'ye hangi değer verilmelidir?
10. Süreksizliği ortadan kaldırmak için $f(1)$ 'in yeni değeri ne olmalıdır?

Süreklilik Testini Uygulamak

Aşağıdaki alıştırmalarda fonksiyonlar hangi noktalarda sürekli değildirlir? Hangi noktalarda, mümkünse, süreksizlikler kaldırılabilir, hangilerinde kaldırılamaz? Açıklayın.

11. Bölüm 2.4, Alıştırma 1 12. Bölüm 2.4, Alıştırma 2

13-28 alıştırmalarındaki fonksiyonlar hangi noktalarda sürekli midir?

13. $y = \frac{1}{x-2} - 3x$
14. $y = \frac{1}{(x+2)^2} + 4$
15. $y = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$
16. $y = \frac{x+3}{x^2-3x-10}$
17. $y = |x-1| + \sin x$
18. $y = \frac{1}{|x|+1} - \frac{x^2}{2}$
19. $y = \frac{\cos x}{x}$
20. $y = \frac{x+2}{\cos x}$
21. $y = \csc 2x$
22. $y = \tan \frac{\pi x}{2}$
23. $y = \frac{x \tan x}{x^2+1}$
24. $y = \frac{\sqrt{x^4+1}}{1+\sin^2 x}$
25. $y = \sqrt{2x+3}$
26. $y = \sqrt[4]{3x-1}$
27. $y = (2x-1)^{1/3}$
28. $y = (2-x)^{1/5}$

Bileşke Fonksiyonlar

29-34 alıştırmalarındaki limitleri bulun. Fonksiyonlar yaklaşılan noktalarda sürekli midirler?

29. $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin(x - \sin x)$
30. $\lim_{t \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos(\tan t)\right)$
31. $\lim_{y \rightarrow 1} \sec(y \sec^2 y - \tan^2 y - 1)$
32. $\lim_{x \rightarrow 0} \tan\left(\frac{\pi}{4} \cos(\sin x^{1/3})\right)$

33. $\lim_{t \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{19-3 \sec 2t}}\right)$
34. $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \sqrt{\csc^2 x + 5\sqrt{3} \tan x}$

Sürekli Genişlemeler

35. $g(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ 'ün $x = 3$ 'te sürekli olmasını sağlayacak $g(3)$ değerini bulun.
36. $h(t) = (t^2 + 3t - 10)/(t - 2)$ 'nin $t = 2$ 'de sürekli olmasını sağlayacak $h(2)$ değerini bulun.
37. $f(s) = (s^3 - 1)/(s^2 - 1)$ 'in $s = 1$ 'de sürekli olmasını sağlayacak $f(1)$ değerini bulun.
38. $g(x) = (x^2 - 16)/(x^2 - 3x - 4)$ 'ün $x = 4$ 'te sürekli olmasını sağlayacak $g(4)$ değerini bulun.
39. a 'nın hangi değeri için

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

her x değerinde sürekli midir?

40. b 'nin hangi değeri için

$$g(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ bx^2, & x \geq -2 \end{cases}$$

her x değerinde sürekli midir?

T 41-44 alıştırmalarında, orijinde sürekli bir genişlemesi olup olmadığını görmek için f fonksiyonunu çizin. Varsa, $x = 0$ 'daki genişleme fonksiyonunun değerini bulun. Fonksiyonun sürekli bir genişlemesi yok gibiyse, orijinde sağdan veya soldan sürekli olacak bir genişleme bulunabilir mi? Bulunabilirse, genişleme fonksiyonunun değer(ler)inin ne olmasını beklersiniz?

41. $f(x) = \frac{10^x - 1}{x}$
42. $f(x) = \frac{10^{|x|} - 1}{x}$
43. $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$
44. $f(x) = (1 + 2x)^{1/x}$

Theori ve Örnekler

45. Sürekli bir $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ 'da negatif, $x = 1$ 'de pozitif olduğu biliniyor. $x = 0$ ile $x = 1$ arasında, $f(x) = 0$ denkleminin neden en az bir çözümü vardır? Çizerek gösterin.
46. $\cos x = x$ 'in neden en az bir çözümü olduğunu açıklayın.
47. **Bir kübiğin kökleri** $x^3 - 15x + 1 = 0$ denkleminin $[-4, 4]$ aralığında üç çözümünün olduğunu gösterin.
48. **Bir fonksiyon değer** $F(x) = (x-a)^2 \cdot (x-b)^2 + x$ fonksiyonunun x 'in bazı değerleri için $(a+b)/2$ değerlerini aldığını gösterin.
49. **Bir denklemi çözmek** $f(x) = x^3 - 8x + 10$ ise, $f(c)$ 'nin (a) π ; (b) $-\sqrt{3}$; (c) 5.000.000 değerlerine eşit olduğu c değerleri bulunduğunu gösterin.

50. Aşağıdaki beş ifadenin neden aynı bilgiyi gerektirdiklerini açıklayın.
- $f(x) = x^3 - 3x - 1$ 'in köklerini bulun.
 - $y = x^3$ eğrisinin $y = 3x + 1$ doğrusunu kestiği noktaların x koordinatlarını bulun.
 - $x^3 - 3x = 1$ olan bütün x değerlerini bulun.
 - $y = x^3 - 3x$ eğrisinin $y = 1$ doğrusunu kestiği noktaların x koordinatlarını bulun.
 - $x^3 - 3x - 1 = 0$ denklemini çözün.
51. **Kaldırılabilir süreksizlik** $x = 2$ noktasında kaldırılabilir bir süreksizliği bulunan ve bunun dışında her yerde sürekli olan bir $f(x)$ fonksiyonu bulun. f 'nin $x = 2$ 'de süreksiz olduğunu nasıl anladığınızı ve süreksizliğin neden kaldırılabilirliğini açıklayın.
52. **Kaldırılmaz süreksizlik** $x = -1$ noktasında kaldırılmaz bir süreksizliği olan ve bunun dışında her yerde sürekli olan bir $f(x)$ fonksiyonu bulun. f 'nin $x = -1$ 'de süreksiz olduğunu nasıl anladığınızı ve süreksizliğin neden kaldırılmayacağını açıklayın.
53. **Her noktada süreksiz olan bir fonksiyon**
- Boş olmayan her reel sayı aralığının hem rasyonel hem de irrasyonel sayılar içerdiği bilgisini kullanarak,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise} \\ 0, & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$
fonksiyonunun her noktada süreksiz olduğunu gösterin.
 - f herhangi bir noktada sağdan veya soldan sürekli midir?
54. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $0 \leq x \leq 1$ aralığında sürekliyse, $f(x)/g(x)$ $[0, 1]$ 'in herhangi bir noktasında süreksiz olabilir mi? Yanıtınızın nedenini açıklayın.
55. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ çarpım fonksiyonu $x = 0$ 'da sürekliyse, $f(x)$ ve $g(x)$ de $x = 0$ 'da sürekli olmak zorunda mıdır? Yanıtınızın nedenini açıklayın.
56. **Sürekli fonksiyonların süreksiz bileşkesi** $x = 0$ 'da bileşkeleri $f \circ g$ süreksiz, fakat kendileri sürekli olan f ve g fonksiyonlarına bir örnek verin. Bu Teorem 10'la çelişir mi? Yanıtınızı açıklayın.
57. **Daima sıfırdan farklı sürekli fonksiyonlar** Bir aralıkta sıfır değeri almayan sürekli bir fonksiyonun bu aralık üzerinde işaret değiştirmeyeceği doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.

58. **Bir lastik bandı germek** Bir lastik bandı bir taraftan sağa, diğer taraftan sola doğru gererken, banttaki bir noktanın yeniden eski konumuna geleceği doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.
59. **Sabit nokta teoremi** Bir f fonksiyonunun $[0, 1]$ kapalı aralığında sürekli olduğunu ve $[0, 1]$ 'deki her x için $0 \leq f(x) \leq 1$ olduğunu varsayın. $[0, 1]$ aralığında, $f(c) = c$ olacak şekilde bir c sayısı bulunması gerektiğini gösterin (c 'ye f 'nin **sabit noktası** denir).
60. **Sürekli fonksiyonların işaret koruma özelliği** f fonksiyonu (a, b) aralığında tanımlanmış olsun ve f 'nin sürekli olduğu bir c değeri için $f(c) \neq 0$ olsun. c civarında f 'nin $f(c)$ ile aynı işaretli olduğu bir $(c - \delta, c + \delta)$ aralığı bulunduğunu gösterin. Bu sonucun ne kadar önemli olduğuna dikkat edin. f fonksiyonu (a, b) 'de tanımlı olduğu halde, c dışındaki bir noktada sürekli olması gerekmemektedir. Bu ve $f(c) \neq 0$ olması f 'yi bütün aralık içinde (pozitif veya negatif) sıfırdan farklı yapmaya yeterlidir.
61. Ancak ve yalnız

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(c + h) = f(c).$$

ise f 'nin c 'de sürekli olduğunu gösterin.

62. $f(x) = \sin x$ ve $g(x) = \cos x$ 'in her $x = c$ noktasında sürekli olduklarını ispatlamak için Alıştırma 61'i ve

$$\sin(h + c) = \sin h \cos c + \cos h \sin c,$$

$$\cos(h + c) = \cos h \cos c - \sin h \sin c$$

özdeşliklerini kullanın

T Denklemleri Grafik Yöntemlerle Çözme

63-70 alıştırmalarındaki denklemleri çözmek için grafik çizen hesap makinesi veya bir grafik programı kullanın.

63. $x^3 - 3x - 1 = 0$

64. $2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

65. $x(x - 1)^2 = 1$ (tek kök)

66. $x^x = 2$

67. $\sqrt{x} + \sqrt{1 + x} = 4$

68. $x^3 - 15x + 1 = 0$ (üç kök)

69. $\cos x = x$ (tek kök) Radyan mod kullanmaya dikkat edin.

70. $2 \sin x = x$ (üç kök) Radyan mod kullanmaya dikkat edin.

2.7

Teğetler ve Türevler

Bu bölümde, Bölüm 2.1'de başlanan giriş ve teğet tartışmasına devam edilmektedir. Eğrilerin teğetlerini bulmak için girişlerin eğimlerinin limitlerini hesaplıyoruz.

Bir Eğrinin Teğeti Nedir?

Çemberler için teğet kavramı açıktır. Bir L doğrusu çemberin bir P noktasından P 'deki yarıçapa dik olarak geçiyorsa, L çembere P 'de teğettir (Şekil 2.63). Böyle bir doğru çembere sadece dokunur. Fakat bir L doğrusunun başka bir C eğrisine bir P noktasında teğet