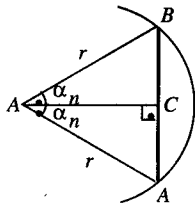
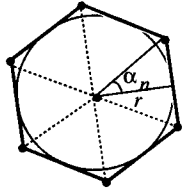
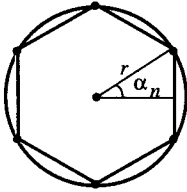
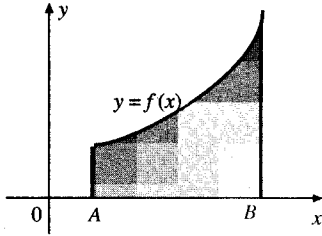


6

BELİRLİ İNTEGRALLER

6.1 GİRİŞ



Bu bölümde, mantığı M.Ö. 300 yıllarında Arşimet tarafından kurulan fakat Matematik dünyasına maloluşu 16. yüzyıl ortalarında Newton ve Leibnitz tarafından gerçekleştirilen, **belirli integral** adı verilen yeni bir integral kavramını vermeye çalışacağız. Daha sonra bu kavramla belirsiz integral arasındaki ilişkiler ortaya konacaktır.

Belirli integral kavramı, bir $y=f(x)$ eğrisi, Ox eksenini ile $x=a$ ve $x=b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplamak için geliştirilen bir kavram olmakla beraber, daha sonraları birçok alanda kullanılmaya başlanılmıştır.

Şimdi Arşimet tarafından ortaya konulan, bir bölgeye çokgensel bölgelerin alanları yardımıyla yaklaşma düşüncesine bir gözatalım.

Arşimet, r yarıçaplı bir dairenin alanını hesaplarırken o dairenin içine, köşeleri çember üzerinde bulunan, bir n -kenarlı düzgün çokgen ile kenarları çembere teğet olan n -kenarlı başka bir düzgün çokgen çizmiş; dairenin S alanının bu iki çokgenin alanları arasında bir sayı olduğunu söylemiştir. Çokgenlerin kenar sayısı arttırıldığında çokgenlerin alanlarının daire alanına yaklaşacağını ifade etmiştir.

İçteki çokgene P_n , dıştaki çokgene Q_n diyelim. Çokgenlerin bir kenarının yarısını gören merkez açının ölçüsü α_n derece olsun.

$$\alpha_n = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$$

olur.

Archimedes (M.Ö. 287 – 212) Yunan Matematikçisi

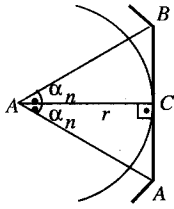
Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646 – 1716) Alman Matematikçisi

Isaac Newton (1642 – 1727) İngiliz Matematikçisi

$$\begin{aligned}
\text{Alan } (P_n) &= 2n \frac{1}{2} |OC| \cdot |CB| = n r \cos \alpha_n r \sin \alpha_n \\
&= \frac{n}{2} r^2 (2 \sin \alpha_n \cos \alpha_n) = \frac{n}{2} r^2 \sin 2\alpha_n \\
&= \frac{n}{2} r^2 \sin \left(2 \frac{180^\circ}{n} \right) = \frac{n}{2} r^2 \sin \left(\frac{360^\circ}{n} \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\text{Alan } (Q_n) &= 2n \frac{1}{2} |OM| \cdot |MN| = n \cdot r \cdot r \tan \alpha_n = n r^2 \tan \alpha_n \\
&= n r^2 \tan \left(\frac{180^\circ}{n} \right)
\end{aligned}$$



olacağından, dairenin S alanı

$$\frac{n}{2} r^2 \sin \left(\frac{360^\circ}{n} \right) < S < n r^2 \tan \left(\frac{180^\circ}{n} \right)$$

bağıntısını sağlar. Bu bağıntıda n yerine ne kadar büyük değerler verilirse, S için daha iyi yaklaşımlar elde edilir. Örneğin, trigonometrik cetveller yardımıyla

$n = 6$	için	$2,598000 r^2 < S < 3,464102 r^2$
$n = 12$	için	$3,000.000 r^2 < S < 3,215390 r^2$
$n = 24$	için	$3,105829 r^2 < S < 3,159660 r^2$
$n = 48$	için	$3,132629 r^2 < S < 3,146086 r^2$
$n = 96$	için	$3,139350 r^2 < S < 3,142715 r^2$
$n = 180$	için	$3,140955 r^2 < S < 3,141912 r^2$
$n = 360$	için	$3,1414133 r^2 < S < 3,141672 r^2$
$n = 720$	için	$3,141553 r^2 < S < 3,141613 r^2$

bağıntıları elde edilir. Bu değerler, bugün çok iyi bilinen $S = \pi r^2$ sayısına oldukça yakın sayılardır.

Bir eğri altında kalan bölgelerin alanlarına geçmeden önce bazı kavram ve sembolleri tanıtmaya çalışalım.

6.2 ARALIKLARIN PARÇALANMASI

İntegral teorisinin temel kavramlarından biri, parçalanma kavramıdır. Şimdi bu kavramı tanıyalım.

TANIM

$[a, b]$ aralığını

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$$

özellikli sağlayan $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ noktaları yardımıyla n tane alt aralığa bölelim. Uygunluğunu sağlamak için a sayısını x_0 , b sayısını da x_n ile gösterelim.

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

kümesine $[a, b]$ aralığının bir parçalanması veya bölüntüsü denir.

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

aralıklarına $[a, b]$ nin P parçalanmasına karşılık gelen kapalı alt aralıkları,

$$(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$$

aralıklarına da açık alt aralıkları adı verilir.

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

sayısına $[x_{k-1}, x_k]$ aralığının boyu veya ölçüsü denir. Alt aralıkların boylarının en büyüğüne P parçalanmasının normu veya maksimal çapı denir, $\|P\|$ ile gösterilir. Şu halde,

$$\|P\| = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n \}$$

dır. Eğer tüm alt aralıkların boyları birbirlerine eşit ise bu parçalanmaya düzgün parçalanma adı verilir.

Yukarıdaki tanımdan da anlaşılacağı gibi, bir $[a, b]$ aralığının sonsuz çoklukta parçalanması vardır. Bu parçalanmalardan bazılarını karşılaştırmak mümkündür.

TANIM

$[a, b]$ aralığının iki parçalanması P_1 ve P_2 olsun. Eğer $P_1 \subset P_2$ ise P_2 parçalanması P_1 den daha ince veya daha sıktır denir.

ÖRNEK : $[1, 2]$ aralığının iki parçalanması

$$P_1 = \left\{ 1, \frac{2}{3}, 2 \right\}, \quad P_2 = \left\{ 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2 \right\}$$

olsun. Bu iki parçalanmayı ve bu parçalanmaların normlarını karşılaştırınız.

Çözüm : $P_1 \subset P_2$ olduğundan P_2, P_1 den daha incedir. $\|P_1\| = \frac{1}{2}, \|P_2\| = \frac{1}{4}$ olduğundan, $\|P_1\| \geq \|P_2\|$ dir.

Bir $[a,b]$ aralığının $P_1, P_2, \dots, P_r$ parçalanmaları için,

$$P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_r$$

ise

$$\|P_1\| \geq \|P_2\| \geq \dots \geq \|P_r\|$$

olacağı açıktır. Yani parçalanma inceldikçe normu küçülür. $\|P\|$ nin sıfıra yaklaşması demek her bir alt aralığın boyunun sıfıra yaklaşması ve dolayısıyla alt aralıkların sayısı olan n nin sınırsız olarak büyümesi yani, $+\infty$ değerine yaklaşması demektir. Bunun karşısı doğru değildir. Yani $n \rightarrow +\infty$ olması $\|P\|$ nin sıfıra yaklaşmasını gerektirmez. Örneğin,

$$P = \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2, \dots, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k, \dots, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, 1 \right\}$$

parçalanması gözönüne alındığında $\forall n \geq 2$ için $\|P\| = \frac{1}{2}$ olur. Dolayısıyla $n \rightarrow +\infty$ için $\|P\| = \frac{1}{2} \neq 0$ dır. Eğer P parçalanması düzgün ise bu taktirde

$$\|P\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow +\infty$$

önermesi doğrudur.

$a_1, a_2, \dots, a_n$ sayılarının toplamı, kısaca, $\sum_{k=1}^n a_k$ sembolü ile gösterilir. Buna göre,

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

olacaktır. Burada $\sum$, toplama sembolü olup "sigma" diye okunur. Bu sembolün sağladığı cebirsel kurallar şunlardır :

- 1) $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$ (toplama kuralı)
- 2) $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$ (çıkarma kuralı)
- 3) $\sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k$ (c herhangi bir sabit)
- 4) $\sum_{k=1}^n c = n.c$ (c herhangi bir sabit)

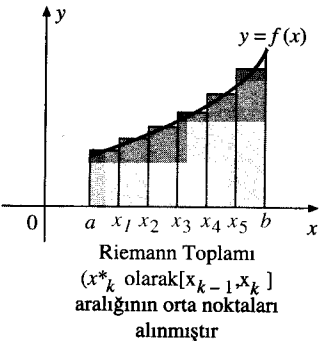
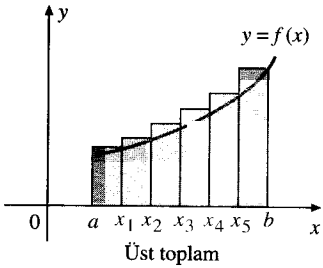
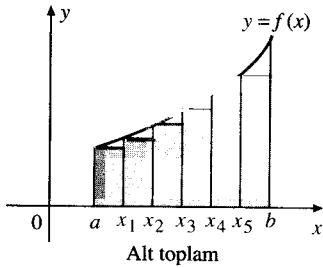
Bu bölümde kullanacağımız temel toplam formülleri aşağıda verilmiştir. Bunların doğruluğu tümevarım yöntemi veya başka cebirsel yöntemlerle gösterilebilir:

- a) $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- b) $\sum_{k=1}^n k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- c) $\sum_{k=1}^n k^3 = 1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$
- d) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k)$ toplamını bulunuz.

Çözüm : $\sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k) = 3 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k$

$$= 3 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 1155 - 110 = 1045$$



TANIM

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. $[a, b]$ aralığının

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanması için

$$M_k = \max \{ f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k \}$$

$$m_k = \min \{ f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k \}$$

olsun.

$$A(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \quad \text{ve} \quad \bar{U}(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$$

toplamlarına sırası ile, f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen alt toplamı ve üst toplamı adı verilir.

x_k^* , $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığında alınan herhangi bir nokta olmak üzere

$$R(f, P) = \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

toplamına f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen bir Riemann Toplamı denir.

Riemann toplamı, x_k^* noktalarının seçilişine bağlıdır.

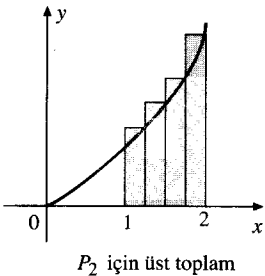
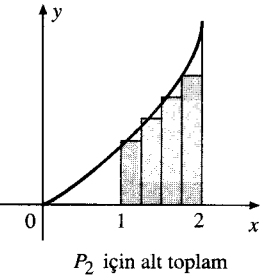
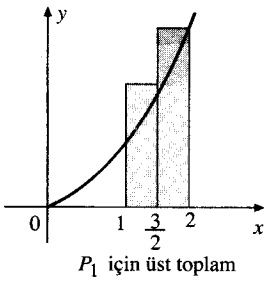
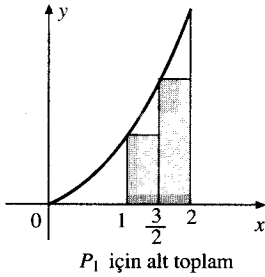
Her P parçalanması için

$$A(f,P) \leq R(f,P) \leq \ddot{U}(f,P)$$

olacağı açıktır.

Kolayca gösterilebileceği gibi parçalanma inceldikçe alt toplamlar artar, üst toplamlar azalır. Bazı fonksiyonlar için üst ve alt toplamlar farkı sıfıra yaklaşır. Bu durumda $\ddot{U}(f,P)$, $A(f,P)$ ve $R(f,P)$ toplamları aynı bir I sayısına yaklaşır.

$f(x) > 0$ olduğunda, $y = f(x)$ eğrisi, Ox - eksen, $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı alt ve üst toplamlar arasında bir sayıdır.



ÖRNEK : $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $P_1 = \left\{1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ parçalanmasına karşılık gelen

alt ve üst toplamlarını bulunuz. $y = x^2$ eğrisi, Ox - eksen, $x = 1$ ve $x = 2$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı hangi sayılar arasındadır. Aynı soruları $P_2 = \left\{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\right\}$ parçalanması için cevaplandırınız.

Çözüm : $f(x) = x^2$ fonksiyonu $[1,2]$ aralığında artan olduğundan $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında en küçük değerini x_{k-1} en büyük değerini x_k noktasında alır.

$$\begin{aligned} A(f, P_2) &= f(1) \cdot \frac{1}{4} + f\left(\frac{5}{4}\right) \frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{2}\right) \frac{1}{4} + f\left(\frac{7}{4}\right) \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{25}{16} + \frac{9}{4} + \frac{49}{16}\right) = \frac{63}{32} \cong 1,968 \end{aligned}$$

olacağından bölgenin S alanı için

$$1,625 < S < 3,125$$

yazılabilir. P_2 parçalanması için

$$\begin{aligned} A(f, P_2) &= f(1) \cdot \frac{1}{4} + f\left(\frac{5}{4}\right) \frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{2}\right) \frac{1}{4} + f\left(\frac{7}{4}\right) \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{25}{16} + \frac{9}{4} + \frac{49}{16}\right) = \frac{63}{32} \cong 1,968 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{U}(f, P_2) &= f\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{2}\right) \frac{1}{4} + f\left(\frac{7}{4}\right) \frac{1}{4} + f(2) \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{25}{16} + \frac{9}{4} + \frac{49}{16} + 4\right) = \frac{87}{32} \cong 2,718 \end{aligned}$$

olur. Buna göre,

$$1,968 < S < 2,718$$

yazılabilir.

Yukarıdaki örnekten de görüldüğü gibi parçalanma inceldikçe alt toplam artmakta, üst toplam azalmakta, dolayısıyla her ikisi de Riemann toplamına yaklaşmaktadır. Eğer alt ve üst toplamlar aynı bir I sayısına yaklaşırsa Riemann toplamı da aynı I sayısına yaklaşır.

6.3 BELİRLİ İNTEGRALLER

TANIM

$f, [a,b]$ üzerinde tanımlı, sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k = I$$

limiti varsa, bu limite f nin a dan b ye kadar integrali denir ve

$$\int_a^b f(x) dx$$

ile gösterilir. Bu durumda $f, [a,b]$ üzerinde integrallenebilirdir denir.

Yukarıdaki limit şu anlamdadır.

$\forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyleki $\|P\| < \delta$ bağıntısını sağlayan her bir P parçalanması için

$$\left| \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k - I \right| < \epsilon$$

olur.

ÖRNEK : $\int_0^1 x^2 dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $[0,1]$ aralığını eşit uzunluklu n parçaya bölelim. Bu durumda her bir alt aralığın boyu

$$x_k = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

birim olur. Parçalanmanın noktaları

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{2}{n}, \quad x_k = \frac{k}{n}, \quad \dots, \quad x_n = 1$$

olacaktır. $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında fonksiyon en küçük değerini x_{k-1} , en büyük değerini x_k noktasında alır. Buna göre,

$$\begin{aligned} A(f, P) &= \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)^2 = \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{U}(f,P) &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}
\end{aligned}$$

olur. Şu halde

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \leq R(f,P) \leq \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

yazılabilir. Parçalanma düzgün olduğundan

$$\|P\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$$

dır. Buna göre

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} R(f,P) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \Rightarrow \\
\frac{1}{3} &\leq \int_0^1 x^2 dx \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi integrallenebilen fonksiyonları karakterize eden teoremi ifade edelim:

TEOREM 6.1 : $f: [a,b] \rightarrow R$ fonksiyonu sınırlı olsun. f nin $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\dot{U}(f,P) - A(f,P) < \varepsilon \quad (\text{Riemann şartı})$$

kalacak şekilde $[a,b]$ aralığının bir P parçalanmasının varolmasıdır.

Şu ana kadar tanıdığımız fonksiyonların hemen hepsi integrallenebilen fonksiyonlardır. İntegrallenebilen fonksiyonlar ile ilgili detaylı bilgileri [1] ve [2] kaynaklarında bulabilirsiniz. Bu konuda aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

TEOREM 6.2 : $f: [a,b]$ üzerinde sınırlı bir fonksiyon olsun.

(a) f sürekli ise integrallenebilirdir.

(b) f parçalı sürekli ise integrallenebilirdir.

(c) f monoton veya iki monoton fonksiyonun farklı şeklinde yazılabiliyorsa integrallenebilirdir.

İntegrallenemeyen bazı fonksiyonlar da vardır. Örneğin $[0,1]$ üzerinde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise} \\ 0, & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon integrallenemeyen bir fonksiyondur. Gerçekten $[a,b]$ aralığının her P parçalanması için

$$A(f,P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta x_k = 0$$

$$\dot{U}(f,P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = 1 - 0 = 1$$

olur. $\epsilon = \frac{1}{2}$ alınırsa $\dot{U}(f,P) - A(f,P) = 1$ olup $\epsilon = \frac{1}{2}$ den küçük kalmaz.

UYARI : İntegralin varlığı başka şey, değerinin bulunabilmesi başka şeydir. Örneğin $\int_0^1 e^{x^2} dx$ integrali vardır, zira e^{x^2} sürekli bir fonksiyondur. Fakat bunun değeri elemanter yollardan bulunamayabilir.

Şimdi belirsiz integral ile belirli integral arasındaki ilişkiyi veren teoremi ifade ve ispat edelim.

TEOREM 6.3 (İntegral Hesabın Temel Teoremi) :

$f, [a,b]$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

Her $x \in (a,b)$ için

$$F'(x) = f(x)$$

olacak biçimde sürekli bir $F : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

dır. Bu eşitliğe Newton – Leibnitz Formülü adı verilir.

İspat : $[a,b]$ aralığının herhangi bir parçalanması $P = \{ x_0, x_1, \dots, x_n \}$ olsun. Diferansiyel Hesabın Ortalama Değer Teoremi gereğince

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k) (x_k - x_{k-1})$$

olacak şekilde en az bir $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ noktası vardır. Hipotezden, $F'(x) = f(x)$ olduğundan, her bir $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k) \Delta x_k$$

olacak biçimde en az bir $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ vardır. Buradan

$$\sum_{k=1}^n [F(x_k) - F(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

yazılabilir. Birinci tarafta gerekli sadeleştirmeler yapılır ve $x_0 = a$, $x_n = b$ yazılırsa

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

elde edilir. f integrallenebilir olduğundan $\|P\| \rightarrow 0$ için sağdaki toplam f nin $[a, b]$ aralığındaki integraline yaklaşır. Sol taraf ise P parçalanmalarından bağımsızdır. Şu halde

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

olur.

NOT : $F'(x) = f(x)$ eşitliğini sağlayan F fonksiyonunu bulmak demek f nin belirsiz integralini bulmak demektir. Şu halde $\int_a^b f(x) dx$ integralini hesaplamak için önce $\int f(x) dx$ belirsiz integrali hesaplanacak sonra bulunan $F(x)$ ifadesinde x yerine önce b üst sınırı, sonra a alt sınır konulacak ve $F(b) - F(a)$ farkı hesaplanacaktır. $F(b) - F(a)$ ifadesi $F(x) \Big|_a^b$ biçiminde de gösterilebilir. Yukarıdaki F fonksiyonuna f nin ilkelisi de denir.

Zaman zaman karşılaşacağımız iki integral şöyle tanımlanır.

TANIM

İntegrallenebilen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$1) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2) \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Şimdi yukarıdaki teoremin basit bir sonucu olan bir teoremi ifade edeceğiz. Bu teoremin ispatı çok kolay olduğundan, bir alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır.

TEOREM 6.4 :

f , $[a,b]$ de integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

(1) İntegralin değeri integrasyon değişkeninden bağımsızdır, yani

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \dots = \int_a^b f(z)dz$$

ve $c \in (a,b)$ için

$$(2) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

dır.

ÖRNEK : $\int_0^1 x^2 dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

olacağından

$$\int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

olur.

ÖRNEK : $\int_0^{\pi/2} \cos^{3/2} x \sin x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $F(x) = \int \cos^{3/2} x \sin x dx = -\frac{\cos^{5/2} x}{5/2} = -\frac{2}{5} \cos^{5/2} x$

olduğundan

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{3/2} x \sin x dx = -\frac{2}{5} \cos^{5/2} x \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}$$

olur.

$\int_a^b f(x)dx$ integralini hesaplamak için, türevi $f(x)$ olan $F(x)$ fonksiyonunu bulup, $F(b) - F(a)$ farkını oluşturmak gerekiyordu. İntegral değişken değiştirme yöntemiyle hesaplanacaksa, değişkenler değiştirilirken, eski değişkene dönmek istenmiyorsa, integrasyon sınırlarını da değiştirmek gerekir. Örneğin:

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx$$

integralinde $g(x) = u$ değişken değiştirmesi yapıldığında $\int f(u) du$ integrali elde edilir. Bu yeni integralin sınırları, $u = g(x)$ eşitliğinde x yerine a ve b yazılarak elde edilen $g(a)$ ve $g(b)$ sayılarıdır. Buna göre,

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

olur.

Eğer integral kısmi integrasyon yöntemiyle hesaplanacaksa

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x)$$

bağıntısından yararlanılır.

ÖRNEK : $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\sin x = u$ denirse $\cos x dx = du$ olur.

$x = 0$ için $u = \sin 0 = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ için $u = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ olacağından

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx &= \int_0^1 \frac{du}{1 + u^2} = \arctan u \Big|_0^1 \\ &= \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int_0^{\pi} x \cos x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $u = x$, $dv = \cos x dx$ denirse $du = dx$, $v = \sin x$ olur. Buna göre,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cos x dx &= x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx \\ &= \pi \sin \pi - 0 \cdot \sin 0 + \cos x \Big|_0^{\pi} \\ &= \cos \pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

olur.

Şimdi, integrallenebilen bir f fonksiyonunun bazı özelliklerini veren teoremi ifade ve ispat edelim.

TEOREM 6.5 :

$f, [a, b]$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

(1) Her $x \in [a, b]$ için $f(x) \geq 0$ ise, $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ dir.

(2) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ dir.

İspat :

(1) $f(x) \geq 0$ olsun. f integrallenebilir olduğundan

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

dir. Toplamdaki herbir terim pozitif veya sıfır olacağından

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \text{ olur.}$$

(2) $|f(x)| + f(x) \geq 0$ olduğundan

$$\int_a^b (|f(x)| + f(x)) dx \geq 0 \Rightarrow - \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

olur. $|f(x)| - f(x) \geq 0$ olduğundan

$$\int_a^b (|f(x)| - f(x)) dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

bulunur. Bu ve yukarıdaki eşitsizlikten

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

bulunur.

TEOREM 6.6 :

$f: [-a, a] \rightarrow R$ fonksiyonu sürekli olsun.

(a) f tek fonksiyon ise $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

(b) f çift fonksiyon ise $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

dir.

İspat :

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = I_1 + I_2 \text{ olsun.}$$

I_1 integralinde $x = -t$ değişken değiştirmesi yapılırsa, integralin değeri değişkene bağlı olmadığından,

$$I_1 = \int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx$$

bulunur. O halde

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a [f(-x) + f(x)] dx$$

olur.

(a) f tek olduğunda $f(-x) = -f(x)$ olacağından

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [-f(x) + f(x)] dx = \int_0^a 0 dx = 0$$

bulunur.

(b) f çift olduğunda $f(-x) = f(x)$ olacağından

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(x)] dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

bulunur.

ÖRNEK : $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^3 \cos x}{1 + \sin^{10} x} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 \cdot \cos(-x)}{1 + \sin^{10}(-x)} = - \frac{x^3 \cos x}{1 + \sin^{10} x} = -f(x)$$

olduğundan f tektir. Şu halde $I = 0$ dır.

6.4 İNTEGRALLERİN TÜREVİ

Şimdi integrali almadan türev almamıza imkan tanıyan bir teorem verelim.

TEOREM 6.7:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilir olsun. $[a, b]$ üzerinde

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

eşitliğiyle tanımlanan F fonksiyonu f nin sürekli olduğu her noktada türevlidir ve

$$F'(x) = f(x)$$

dir.

İspat : f fonksiyonu x noktasında sürekli olsun $h > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) &= \frac{1}{h} \left\{ \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right\} - f(x) \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \int_x^{x+h} f(t) dt \right\} - f(x) \end{aligned}$$

olur. $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} dx = 1$ olduğundan $f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dt$ yazılabilir.

Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dt \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt \end{aligned}$$

olur. Her iki tarafın mutlak değeri alınır,

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dx \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt$$

yazılabilir. f, x noktasında sürekli olduğundan $\forall \epsilon > 0$ için, $\exists \delta > 0$ öyleki

$|t - x| < \delta$ şartını sağlayan her $t \in [a, b]$ için $|f(t) - f(x)| < \epsilon$ kalır. $h < \delta$ seçersek, $|t - x| < \delta$ olacağından

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| < \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \epsilon dt = \epsilon$$

bulunur ki, bu

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

olduğunu gösterir. Eğer $h < 0$ ise, benzer yolla

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

olduğu gösterilebilir. Bu iki bağıntıdan

$$F'(x) = f(x)$$

bulunur.

ÖRNEK : $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ olduğuna göre, $F'(x) = e$ denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm :

$F'(x) = e^{x^2}$ olacağından $e^{x^2} = e \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ olmalıdır.

$y = f(u)$, $u = g(x)$ olduğunda, zincir kuralından

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot u'(x)$$

yazılabilir. Buna göre,

$$F(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt \text{ ise } F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^{u(x)} f(t) dt = f(u(x)) \cdot u'(x)$$

olur. Eğer

$$G(x) = \int_{v(x)}^a f(t) dt \text{ ise } G'(x) = \frac{d}{dx} \left[- \int_a^{v(x)} f(t) dt \right] = -f(v(x)) \cdot v'(x)$$

olur. Diğer taraftan

$$\int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt = \int_{v(x)}^a f(t) dt + \int_a^{u(x)} f(t) dt$$

yazılabileceğinden

$$\frac{d}{dx} \int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt = f(u(x)) u'(x) - f(v(x)) v'(x)$$

olur. Bu bağıntıya Leibnitz Formülü adı verilir.

ÖRNEK : $F(x) = \int_x^{x^2} \sin(t^2) dt$ için $F'(x)$ nedir?

Çözüm : Leibnitz formülünden

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sin(x^4) \cdot 2x - \sin(x^2) \cdot 1 \\ &= 2x \sin(x^4) - \sin(x^2) \end{aligned}$$

bulunur.

ÖRNEK : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{t^4 + 1} dt = ?$

Çözüm : Verilen limit $0 \cdot \infty$ belirsizliğine sahiptir. L'Hospital kuralından

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{t^4 + 1} dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{t^4 + 1} dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{x^4 + 1}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2(x^4 + 1)} = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

6.5 ORTALAMA DEĞER TEOREMLERİ

Bilindiği gibi $a_1, a_2, \dots, a_n$ sayılarının aritmetik ortalaması

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

sayısıdır. Bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon, genel olarak, sonsuz çoklukta $f(x)$ değeri aldığından, bunların aritmetik ortalamasını bulmak bu kadar kolay değildir.

Bir fonksiyonun bir aralıktaki ortalama değeri kavramını vermeden, belli bir aralıkta ölçülen sıcaklıkların ortalama değerini bulmaya çalışalım. 24 saatlik bir zaman aralığında, havanın sıcaklığı

$$T = f(t), \quad 0 \leq t \leq 24$$

ile verilmiş olsun. $[t = 0$ gece yarısı, $t = 24$ ertesi günün gece yarısını göstermektedir.] Birer saatlik aralarla $f(1), f(2), \dots, f(24)$ sıcaklıkları ölçülmüş olsun. Bu sıcaklıkların ortalaması, $k = t_k$ olmak üzere,

$$\bar{T} = \frac{1}{24} \sum_{k=1}^{24} f(k) = \frac{1}{24} \sum_{k=1}^{24} f(t_k)$$

olacaktır. Eğer söz konusu gün n eşit aralığa bölünürse, ortalama sıcaklık

$$\bar{T} = \frac{1}{24} \sum_{k=1}^n f(t_k)$$

olur. n ne kadar büyük seçilirse ortalama sıcaklık gerçek (esas) ortalama sıcaklığa o kadar yakın olur. Buna göre ortalama sıcaklık

$$\bar{T} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k)$$

olacaktır. $a = 0$, $b = 24$ alınırsa, 24 saatlik zaman $\frac{24}{n}$ saatlik alt aralıklara bölüneceğinden

$$\Delta t_k = \frac{24}{n} = \frac{b-a}{n}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{b-a} \sum_{k=1}^n f(t_k) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta t_k \end{aligned}$$

yazılabilir. Son toplam bir Riemann toplamı olduğundan

$$\bar{T} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

olur. a ve b yerine değerleri konursa, o günün sıcaklık ortalaması

$$T = \frac{1}{24} \int_0^{24} f(t) dt$$

bulunur. Buna göre bir fonksiyonun bir aralıktaki ortalama değeri, fonksiyonun o aralıktaki integralinin aralığın boyuna oranı olarak tanımlanabilir.

TANIM

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olsun. $y = f(x)$ in $[a, b]$ aralığındaki ortalaması

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

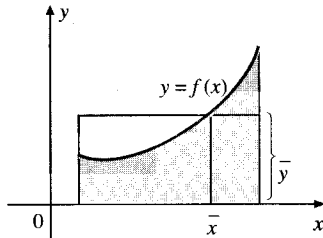
sayısıdır.

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

eşitliği

$$\int_a^b f(x) dx = \bar{y} \cdot (b-a)$$

yazıldığında şu geometrik anlam çıkar : Pozitif bir fonksiyonun altında kalan alan, eni $b-a$, boyu $\bar{y}$ olan bir dikdörtgenin alanına eşittir.



ÖRNEK : $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $[0,3]$ aralığındaki ortalama değerini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\bar{y} = \frac{1}{3-0} \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^3 = \frac{27}{9} = 3$$

olur.

TEOREM 6.8 :

f , $[a,b]$ üzerinde sürekli ise $[a,b]$ aralığında

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

olacak şekilde en az bir $\bar{x}$ sayısı vardır.

İspat : f , $[a,b]$ de sürekli olduğundan en büyük ve en küçük değerini $[a,b]$ deki noktalarda alır. Fonksiyonunun en büyük değeri M , en küçük değeri m olsun.

$[a,b]$ de $m = f(c)$, $M = f(d)$ olacak şekilde c ve d noktaları vardır. Buna göre

$\forall x \in [a,b]$ için

$$m \leq f(x) \leq M$$

yazılabilir. a dan b ye kadar integral alınırsa

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

bulunur. Her iki taraf $b-a$ ile bölünürse

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

eşitsizliği elde edilir. Şu halde

$$m \leq \bar{y} \leq M$$

olacaktır. Sürekli fonksiyonların ara değer teoreminden, $[a,b]$ aralığında

$$f(\bar{x}) = \bar{y}$$

olacak şekilde en az bir $\bar{x}$ noktası vardır.

ÖRNEK : $f(x) = mx + n$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki ortalama değerini bulunuz. Fonksiyon bu ortalama değeri $[a, b]$ aralığının hangi noktasında alır?

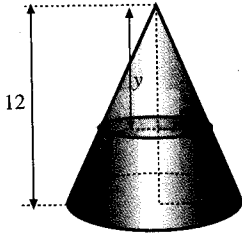
Çözüm :

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (mx+n)dx = \frac{1}{b-a} \left(m \frac{x^2}{2} + nx \right) \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{m}{2} b^2 + nb - \frac{m}{2} a^2 - na \right) \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{m}{2} (b-a)(b+a) + n(b-a) \right] = \frac{m}{2} (b+a) + n\end{aligned}$$

olur.

$$m\bar{x} + n = \frac{m}{2} (b+a) + n \Rightarrow \bar{x} = \frac{a+b}{2}$$

bulunur. Şu halde $f(x) = mx + n$ fonksiyonları ortalama değerini, $[a, b]$ aralığının orta noktası olan $\frac{a+b}{2}$ noktasında almaktadır.



ÖRNEK : Taban yarıçapı 3, yüksekliği 2 birim olan bir dairesel dik koni tepesinden y birim uzakta, tabanına paralel bir düzlemle kesiliyor. Elde edilen dairesel kesitin alanının ortalama değeri nedir?

Çözüm : Benzerlikten

$$\frac{r}{3} = \frac{y}{12} \Rightarrow r = \frac{y}{4}$$

olur. Kesitin alanı $0 \leq y \leq 12$ olmak üzere,

$$A(y) = \pi r^2 = \pi \left(\frac{y}{4} \right)^2 = \frac{1}{16} \pi y^2$$

olur. Ortalama alan

$$\bar{A} = \frac{1}{12-0} \int_0^{12} A(y) dy = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{16} \pi \int_0^{12} y^2 dy = \frac{1}{12 \cdot 16} \pi \frac{y^3}{3} \Big|_0^{12} = 3\pi$$

bulunur.

Şimdi, Ortalama Değer Teoreminden daha genel olan bir teoremi ispatlayalım.

TEOREM 6.9 :

f ve g , $[a, b]$ üzerinde aynı işaretli ve sürekli fonksiyonlar olsun. $[a, b]$ aralığında

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

İspat : f nin $[a, b]$ aralığında aldığı en büyük değer M , en küçük değer m olsun. Bu takdirde her $x \in [a, b]$ için $m \leq f(x) \leq M$ olur. $[a, b]$ de $g(x) \geq 0$ olsun.

Bu takdirde

$$mg(x) \leq f(x) g(x) \leq Mg(x)$$

yazılabilir. ($g(x) \leq 0$ için bu eşitsizlik ters döner.) Buradan

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

bulunur. Şu halde m ile M arasında öyle bir k vardır ki

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = k \int_a^b g(x) dx$$

olur. f sürekli olduğundan m ile M arasındaki her değeri en az bir kez alır. Dolayısıyla $f(c) = k$ olacak şekilde en az bir $c \in [a, b]$ vardır.

ÖRNEK :

$$0 < \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(1+x^4)^2} < \frac{1}{8}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $f(x) = x$, $g(x) = \frac{x^3}{(1+x^4)^2}$ alınırsa, $[0,1]$ de

$$\int_0^1 \frac{x^4 dx}{(1+x^4)^2} = c. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{(1+x^4)^2} = \frac{c}{8}$$

olacak şekilde bir c sayısı vardır. $0 < c < 1$ olduğundan

$$0 < \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(1+x^4)^2} < \frac{1}{8}$$

bulunur.

PROBLEMLER

1. İntegral tanımından yararlanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int_0^1 x dx$ b) $\int_0^1 x^2 dx$ c) $\int_0^1 e^x dx$ d) $\int_0^2 2^x dx$

2. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\int_0^3 \sqrt{x+1} dx = \frac{14}{3}$ b) $\int_0^3 x \sqrt{1+x} dx = \frac{112}{15}$ c) $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x dx = \frac{1}{2}$

ç) $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx = \frac{100}{3}$ d) $\int_0^{\pi/3} \frac{\tan \theta}{\sqrt{2} \sec \theta} d\theta = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$ e) $\int_{\frac{\pi^2}{36}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t} \sin \sqrt{t}} dt = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx = 1 - \frac{\pi}{4}$ g) $\int_{-1}^2 \frac{t^2}{\sqrt{t+2}} dt = \frac{26}{15}$ h) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx = 2 \ln 2 - 1$

i) $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8 + 1} = \frac{\pi}{16}$ j) $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ j) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \frac{2}{3}$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int_0^{\pi} \sin x dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2 \sec^2 x dx$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$ ç) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (8y^2 + \sin y) dy$

d) $\int_4^9 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ e) $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 3x + 2}$ f) $\int_2^6 \sqrt{x-2} dx$ g) $\int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^6 + 4}}$

h) $\int_0^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ i) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$ i) $\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2 + x^2}$ j) $\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx$

k) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$ l) $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\tan^2 x}{x - \tan x} dx$ m) $\int_0^3 \lfloor x \rfloor dx$ n) $\int_0^2 x \lfloor x \rfloor dx$

o) $\int_{-1}^2 |x| dx$ ö) $\int_0^2 x |1-x^2| dx$ p) $\int_{-1}^1 x \operatorname{sgn} x dx$ r) $\int_0^4 \operatorname{sgn}(x^2 - 4x + 3) dx$

s) $\int_{-1}^2 |x| \lfloor x \rfloor dx$ ş) $\int_{-1}^3 \lfloor x \rfloor dx$ t) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$ u) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$

ü) $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$ v) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x + 1}}{e^x + 3} dx$ y) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ z) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+a^2 \sin^2 x}$

4. $\int_a^b \lfloor x \rfloor dx + \int_a^b \lfloor -x \rfloor dx = b - a$

olduğunu gösteriniz.

5. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_0^n \lfloor x \rfloor dx = \frac{n(n-1)}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

6. $\int_0^9 \lfloor \sqrt{t} \rfloor dt = 13$

olduğunu gösteriniz.

7. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int_0^2 |x^3 - 3x^2 + 2x| dx$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} |\cos^3 x| dx$

8. İntegrallenebilen bir f fonksiyonu için

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f[a + (b-a)x] dx$$

olduğunu gösteriniz.

9. İntegrallenebilen bir f fonksiyonu ve $k \neq 0$ için

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{k} \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx$$

olduğunu gösteriniz.

10. $u = 1 - x$ değişken değiştirmesini yaparak,
 $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \int_0^1 (1-x)^n x^m dx$$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak

$$\int_0^1 x^2 (1-x)^{10} dx$$

integralini hesaplayınız.

11. $x = \sin u$ değişken değiştirmesi yardımıyla

$$\int_0^1 x^m (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{2n+1} x dx$$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak

$$\int_0^1 x^3 (1-x^2)^{10} dx$$

integralini hesaplayınız.

12. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız. ($n \in \mathbb{N}$)

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx$

13. $\int_{-\pi}^{\pi} |\cos^3 x + \sin^3 x| dx = \frac{10\sqrt{2}}{3}$

olduğunu gösteriniz.

14. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

olduğunu gösteriniz.

15. $x = \frac{\pi}{2} - t$ değişken değiştirmesi yaparak

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}}{\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\cos^2 x}} dx = \frac{\pi}{4}$$

olduğunu gösteriniz.

16. $x = \pi - t$ dönüşümünden yararlanarak

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx = \frac{\pi^2}{4}$$

olacağını gösteriniz.

17. $x \geq 1$ için $1 + x^4 \leq 2x^4$ eşitsizliğinden yararlanarak

$$\frac{26}{3} < \int_1^3 \sqrt{1+x^4} dx \leq \frac{26}{3} \sqrt{2}$$

olduğunu gösteriniz.

18. $x \geq 1$ için

a) $\int_1^x \frac{1}{t} dt \leq \int_1^x dt$

b) $0 \leq \ln x \leq x - 1$

olduğunu gösteriniz.

19. $f(x) = \begin{cases} 2x & , 4 \leq x \leq 5 \text{ ise} \\ 20 - 2x & , 5 < x \leq 6 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu için $\int_4^6 f(x) dx$ integralini hesaplayınız.

20. $f(x) = \begin{cases} |x-2| & , -2 \leq x \leq 1 \text{ ise} \\ |x| & , 1 < x \leq 2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu için $\int_{-2}^2 f(x) dx$ integralini hesaplayınız.

21. $0 \leq x \leq 1$ için

$0 \leq \sin x \leq x$ eşitsizliğinden yararlanarak

a) $0 \leq \int_0^1 \sin x^2 dx \leq \frac{1}{3}$

b) $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^{3/2} x dx \leq \frac{2}{5} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{5/2}$

c) $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x \sin x dx \leq \frac{1}{24}$

olduğunu gösteriniz.

22. $x \geq 0$ için $0 \leq \sin x \leq x$ eşitsizliğinden yararlanarak

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon x \sin x dx = 0$$

olduğunu gösteriniz.

23. $a > 0$ ve f fonksiyonu $[0, a]$ üzerinde sürekli olsun.

i) $u = a - x$ değişken değiştirmesini yaparak

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x) + f(a-x)} dx$$

olduğunu gösteriniz.

ii) $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx = \frac{a}{2}$

olacağını gösteriniz.

iii) $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{x^4 + (1-x)^4}$

integralini hesaplayınız.

24. Sürekli bir f fonksiyonu için

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(-x) dx$$

olduğunu gösteriniz.

25. $\int_0^1 f(x) dx = 3$ dür. f nin tek veya çift oluşuna göre

$$\int_{-1}^0 f(x) dx$$
 integralini hesaplayınız.

26. $\int_a^b f(x) dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c) dx$

olduğunu gösteriniz.

27. Periyodu T olan bir periyodik f fonksiyonu ve her k tamsayısı için

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+kT}^{b+kT} f(x) dx$$

olacağını gösteriniz.

28. Aşağıda verilen fonksiyonların karşılarında yazılı aralıklar üzerindeki ortalama değerlerini bulunuz. Fonksiyon bu ortalama değeri hangi noktada alır?

a) $f(x) = 2|x|$, $I = [-1, 1]$

b) $f(x) = \cos x$, $I = [0, 2\pi]$

c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $I = [-1, 1]$

ç) $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$, $I = [0, 2]$

29. $\int_1^2 f(x) dx = 4$ olsun. $[1,2]$ aralığında $f(c) = 4$ olacak şekilde en az bir c noktasının varlığını gösteriniz.

30. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

a) $F(x) = \int_0^x t(1+t^2)^{20} dt$

b) $F(x) = \int_x^0 t \sin t dt$

c) $F(x) = \int_0^{x^2} t \sin t dt$

ç) $F(x) = \int_1^{-x} t \cos t^4 dt$

d) $F(x) = \int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$

e) $F(x) = \int_{\sin x}^{2x} \cos t dt$

31. Aşağıdaki eşitsizliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\frac{1}{6} \leq \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^{10}} dx < \frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{10} \leq \int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2} dx < \frac{1}{5}$

c) $\frac{e-1}{2} < \int_0^1 \frac{e^x}{1+x^3} dx < e-1$

32. Sürekli f fonksiyonu için $f(2) = 3$ olduğuna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} \int_2^x f(t) dt$$

limitini hesaplayınız.

33. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{du}{u + \sqrt{1+u^2}}$

limitini hesaplayınız.

34. $\int_0^{x^2} f(t) dt = x \cos \pi x$

olduğuna göre $f(4)$ kaçtır?

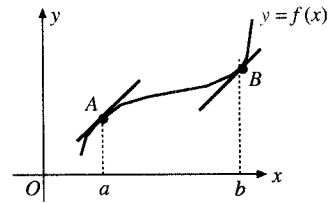
35. $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x \cos \pi x$ olduğuna göre, $f(4)$ nedir?

36. $m > 2$ için

$$\frac{1}{2} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^m}} < \frac{\pi}{6}$$

olduğunu gösteriniz.

- 37.

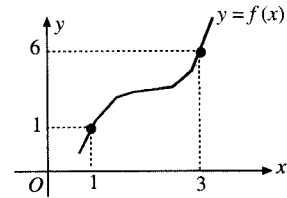


İkinci mertebeden sürekli türevlere sahip $y = f(x)$ eğrisinin A ve B noktalarındaki teğetleri birbirine paraleldir.

$$\int_a^b \frac{f''(x)}{f'(x)} dx$$

integralini hesaplayınız.

- 38.

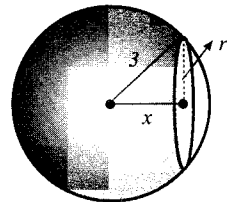


Sürekli türeve sahip ve grafiği yukarıda verilen f fonksiyonu için

$$\int_1^3 \frac{f'(x)}{x} dx - \int_1^3 \frac{f(x)}{x^2} dx$$

ifadesini hesaplayınız.

39. Yarıçapı 3 birim olan küre, merkezinden x birim uzaklıkta bir düzlemlle kesiliyor. Dairesel dik kesitin alanının ortalama değeri nedir?



BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. $\int_0^2 \lfloor x^2 \rfloor dx = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$

olduğunu gösteriniz.

2. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_0^{n^2} \lfloor \sqrt{t} \rfloor dt = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$$

olduğunu gösteriniz.

3. a) Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(x) = \int_0^n \lfloor t^2 \rfloor dt = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

olduğunu gösteriniz.

b) $x \geq 0$ için

$$f(x) = \int_0^x \lfloor t \rfloor^2 dt$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun $[0,3]$ aralığındaki grafiğini çiziniz.

4. a) Sürekli ve bir tek f fonksiyonu için

$$\int_0^\pi f(\cos x) dx = 0$$

olacağını gösteriniz.

b) Sürekli ve bir çift f fonksiyonu için

$$\int_0^\pi f(\cos x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

olduğunu gösteriniz.

5. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = 0$

olduğunu gösteriniz.

6. Sürekli bir $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

ise (a,b) aralığında $f(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktasının varlığını gösteriniz.

7. f ve g , $[a,b]$ üzerinde sürekli iki fonksiyon ve

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

olsun. $[a,b]$ de $f(c) = g(c)$ olacak şekilde en az bir c noktasının varlığını gösteriniz.

8. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \cos^3 x + b \sin^3 x}{\cos x + \sin x} dx,$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \sin^3 x + b \cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx$$

olsun.

$$I = J = \frac{1}{4} (a+b)(\pi-1) \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 + b^2 \tan^2 x} = \frac{\pi}{2a(a+b)}$

olduğunu gösteriniz.

10. $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.

a) $\int_0^\pi f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$

c) $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$

d) $\int_0^\pi f(\sin x) f(\cos x) dx = 0$

11. $f: R \rightarrow R$ fonksiyonu sürekli olsun. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$

b) $\int_{-a}^a f(x^2) dx = 2 \int_0^a f(x^2) dx$

c) $\int_{-a}^a x f(x^2) dx = 0$

12. f , esas periyodu p olan bir periyodik fonksiyon olsun.

$$\int_0^{np} f(x) dx = n \int_0^p f(x) dx$$

olacağını gösteriniz.

13. $f: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu $[a, b]$ de integrallenebilir olsun.

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

eşitliği ile tanımlanan F fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

14. $\frac{d}{dx} \int_0^{\ln x} f(t) dt = 1$ ise $f(x)$ nedir?

15. $\forall x$ için $f'(x) > 0$ ve $f(1) = 0$ olsun.

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

fonsiyonu için aşağıdaki önermelerden hangileri doğrudur?

a) g türevlenebilen bir fonksiyondur.

b) g , x de sürekli.

c) $x = 1$, $y = g(x)$ in bir düşey asimtotudur.

d) g , $x = 1$ de yerel minimuma sahiptir.

e) $x = 1$, g nin bir dönüm noktasıdır.

f) $y = g'(x)$ eğrisinin grafiği Ox - eksenini $x = 1$ de keser.

16. Her m reel sayısı için

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x}{\sin^m x + \cos^m x} dx = \frac{\pi}{4}$$

olduğunu gösteriniz.



ARŞİMET (M.Ö. 287 – 212)

Arşimet, M.Ö. 287 yılında Sicilya adasının Siraküza şehrinde doğmuştur. Arşimet'in Siraküza kralı II. Hieron'un akrabası olduğu sanılmaktadır. Böyle olmasa bile kral tarafından korunduğu bilinmektedir. Bu nedenle Arşimet, parasal bir sıkıntı çekmeden, zamanını ilme verme fırsatını bulmuştur. Arşimet'in zekasını çok erken yaşlarda farkedene babası onu yönlendirmeyi bilmiştir.

Arşimet, daha sonra Mısır'ın İskenderiye kentine giderek Öklit'in derslerine devam etmiştir. Burada bilgisini geliştirdikten sonra, ülkesine dönmüş, öldürüldüğü güne kadar kendisini ülkesine ve ilme vererek araştırmalar yapmıştır.

Yunanlılar ve ortaçağ arapları Arşimet'e karşı son derece saygılı davranmışlardır. Onlar Arşimet'i tüm alimlerin başı, en büyük geometricisi olarak görüyorlardı. Gerçekten Arşimet gelmiş geçmiş en büyük üç matematikçiden biridir. Bunlar sırasıyla Arşimet, Newton ve Gauss'tur.

Arşimet'in yaşamı ve ölümü hakkında destan gibi yazılmış kitaplar vardır. Matematikte olduğu kadar, mekanikte gelmiş geçmiş en büyük dahilerden birisi de yine Arşimet'tir.

Tıpkı Newton ve Hamilton gibi, hesaplarına daldığı zaman, yemeklerini bile unutup yemezdi. "Bir cisim yerini değiştirdiği sıvı hacminin ağırlığı kadar ağırlığından kaybeder." sonucunu veren ünlü buluşunu yaptığı gün banyosundan dışarı fırlamış, sokaklarda çıplak olarak koşmuştur. Bu onun sıvılar için bulduğu birinci kanundu. Bu buluşun ilginç öyküsü fen öğretmenleri tarafından öğrencilere anlatılmaktadır.

Arşimet'e mekanik ilminin yaratıcısı gözüyle bakılır. İlkel insanlarda bile, bir taşı veya ağır bir cismi yerinden kaldırmak veya yuvarlamak için sopalar kullanılmıştır. Fakat yine evrenin bu gizli sırrını kaldırıcı kanunlarıyla ilk kez açıklayan yine Arşimet olmuştur.

"Bana istediğim uzunluk ve sağlamlıkta bir çubuk ve bir dayanak noktası verin, dünyayı yerinden oynatayım." sözü ona aittir.

Dairenin alanı, çemberin uzunluğu, kürenin yüzey alanı ve hacmi ilk kez yine Arşimet tarafından bulunmuştur. π sayısının hesabı yine ona aittir.

Alan ve hacim hesaplarında bulduğu yöntemler uzun yıllar kullanılmıştır. En karmaşık eğrilerle sınırlı bölgelerin alanları ve yüzeylerle sınırlı bölgelerin hacimleri onun bu buluşları ve yöntemleriyle hesaplanmıştır. Hatta Newton'a integral kavramı fikrini Arşimet'in bu yöntemleri vermiştir.

Arşimet, dairenin çevresinin çapına bölümü olan π sayısının bulunması hakkında bir yöntem geliştirmiş, bu sayının $3\frac{1}{7}$ ile $3\frac{10}{71}$ arasında olduğunu göstermiştir. Aynı zamanda kareköklerin yaklaşık değerlerini bulmak için yöntemler geliştirmiştir. Bu yöntem, devirli ondalık gösterimleri bulan Hint'lilere ilham vermiştir.

Arşimet, Yunanlıların matematiğini geride bırakmıştır. Çünkü Yunanlılar her bir sayıyı bir şekilde gösteriyorlardı. Arşimet pratik olmayan bu gösterim yerine yeni bir numaralama sistemi buldu. Bu sistem sayesinde istenildiği kadar büyük sayılar yazılıp söylenebiliyordu.

Arşimet M.Ö. 212 yılında Siraküza'yı işgal eden Romalı askerler tarafından öldürülmüştür.

İnsanlar rakamlara benzer, bulundukları yere göre değer kazanır.

Napoleon BENAPARTE

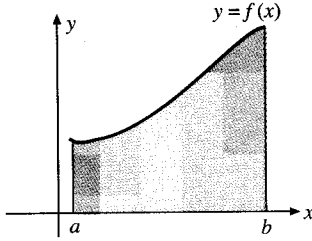
7

İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI

İntegrallerin Geometri, Fizik, Mühendislik ve İstatistikte çok geniş uygulamaları vardır. Bu bölümde, bu uygulamalardan bazılarını yer vereceğiz.

7.1 ALAN HESABI

f , $[a,b]$ aralığında bir sürekli fonksiyon olsun. $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve Ox - eksenini tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulalım. Bu alan, $[a,b]$ aralığında $f(x)$ in işaretine göre değişik biçimlerde hesaplanır.



(1) $[a,b]$ aralığında $f(x) \geq 0$ olsun. $[a,b]$ aralığının bir parçasını

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ile gösterelim. $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ olsun. Hesaplanması istenen A alanı, yaklaşık olarak eni Δx_k , boyu $f(x_k^*)$ olan dikdörtgenlerin alanları toplamına eşittir. Şu halde

$$A \cong \sum_{k=0}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

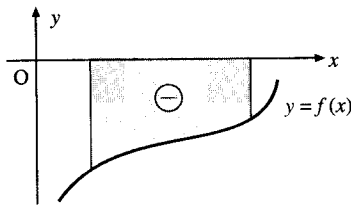
yazılabilir. Δx_k lar ne kadar küçük seçilirse yaklaşıklık o kadar iyi olur. Buna göre,

$$A = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

yazılabilir. Sağ taraftaki limit f nin $[a,b]$ üzerindeki integrali olacağından,

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

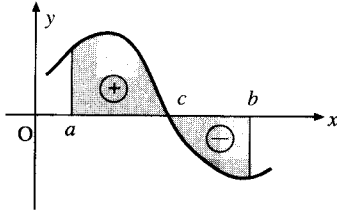
bulunur.



(2) $[a,b]$ aralığında $f(x) \leq 0$ ise, sözkonusu dikdörtgenlerin boyları $-f(x_k^*)$ olacağından, alan formülü

$$A = \int_a^b -f(x) dx$$

şeklını alacaktır.



(3) Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığının bazı yerlerinde pozitif, bazı yerlerinde negatif ise, fonksiyonunun pozitif ve negatif olduğu bölgelerdeki alanlar ayrı ayrı bulunup toplanır. Örneğin f fonksiyonu (a, c) de pozitif, (c, b) aralığında negatif ise,

$$A = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx$$

olacaktır.

Yukarıdaki tüm alan formüllerinin hepsi bir tek formülle

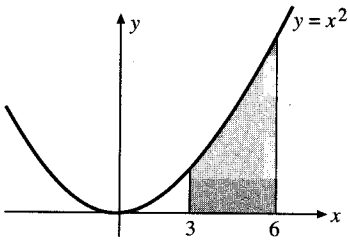
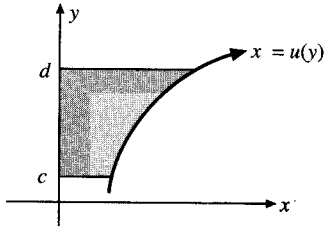
$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

biçiminde verilebilir.

Benzer şekilde, $x = u(y)$ eğrisi, $y = c$, $y = d$ doğruları ile Oy - eksenini tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin alanı

$$A = \int_c^d |u(y)| dy$$

olacaktır.



ÖRNEK : $y = x^2$ eğrisi, $x = 3$, $x = 6$ doğruları ve Ox - eksenini tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm : Söz konusu alan Ox - ekseninin üst tarafında bulunduğundan

$$A = \int_3^6 f(x) dx = \int_3^6 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_3^6 = 72 - 9 = 63$$

birimkare olur.

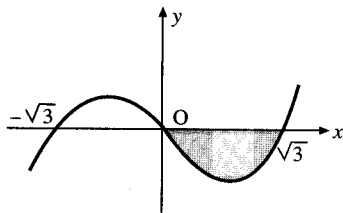
ÖRNEK : Dördüncü bölgede, $y = x^3 - 3x$ eğrisi ile Ox - eksenini arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

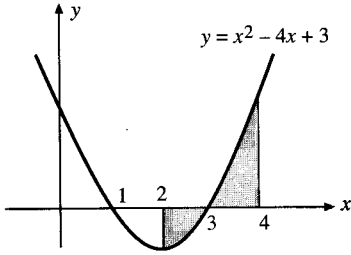
Çözüm : Alanı istenen bölgede $f(x) \leq 0$ olduğundan

$$A = \int_0^{\sqrt{3}} -f(x) dx = - \int_0^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x) dx$$

$$= - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = - \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2} \right) = \frac{9}{4} \text{ br}^2$$

olur.



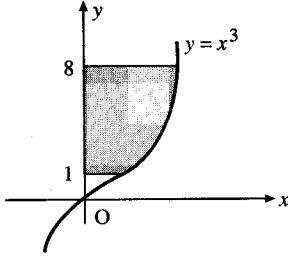


ÖRNEK : $y = x^2 - 4x + 3$ eğrisi, $x = 2$, $x = 4$ doğruları ve Ox - eksenini arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm : $[2,3]$ aralığında $f(x) \leq 0$, $[3,4]$ aralığında $f(x) \geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} A &= \int_2^3 -f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx \\ &= -\int_2^3 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_3^4 (x^2 - 4x + 3) dx \\ &= -\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Big|_2^3 + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Big|_3^4 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2 \quad br^2 \end{aligned}$$

olur.

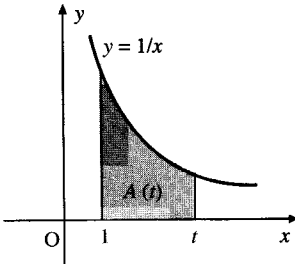


ÖRNEK : $y = x^3$ eğrisi, $y = 1$, $y = 8$ doğruları ve Oy - eksenini tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm : $y = x^3 \Rightarrow x = y^{1/3}$ olur.

$$\begin{aligned} A &= \int_1^8 u(y) dy = \int_1^8 y^{1/3} dy = \frac{3}{4} y^{4/3} \Big|_1^8 \\ &= \frac{3}{4} (16 - 1) = \frac{45}{4} \quad br^2 \end{aligned}$$

bulunur.



ÖRNEK : $y = \frac{1}{x}$ eğrisi, $x = 1$ ve $x = t$ ($t \geq 1$) doğruları ile Ox - eksenini arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm :

$$A = A(t) = \int_1^t \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_1^t = \ln t$$

olur. Şu halde her bir t sayısına pozitif bir $A(t)$ sayısı karşılık gelmektedir. Bu alan $\ln t$ olduğundan, logaritma fonksiyonu integral yardımıyla ve dolayısıyla $A(t)$ alanı yardımıyla da tanımlanabilir. $A(t)$ alanına t nin doğal logaritması denir. Logaritmanın özellikleri bu alanın özelliklerinden elde edilebilir. Örneğin $A(1) = 0$ olduğundan

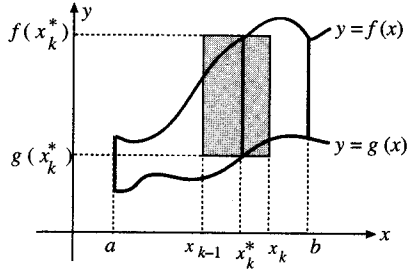
$$\ln 1 = 0,$$

$A(e) = 1$ olduğundan

$$\ln e = 1$$

olur.

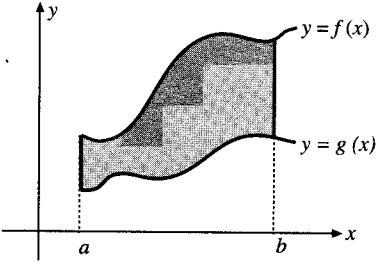
7.2 İKİ EĞRİ ARASINDAKİ ALANIN HESABI



f ve g , $[a, b]$ aralığında sürekli iki fonksiyon ve P de $[a, b]$ nin bir parçalanması olsun.

(1) $[a, b]$ aralığında $f(x) \geq g(x)$ ise, dikdörtgenlerin boyları $f(x_k^*) - g(x_k^*)$ olur. Dolayısıyla $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasındaki alan, yaklaşık olarak,

$$A \cong \sum_{k=1}^n [f(x_k^*) - g(x_k^*)] \Delta x_k$$

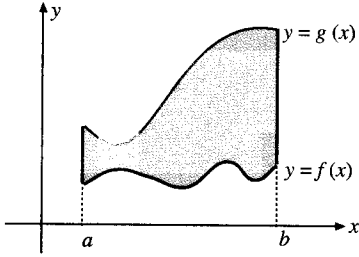


olur. P parçalanması ne kadar ince alınır, bu değer gerçek alana o kadar yakın olur. Parçalanmanın normu sıfıra yaklaştığında sağ taraftaki ifadenin limiti

$f(x) - g(x)$ in integrali olacağından

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

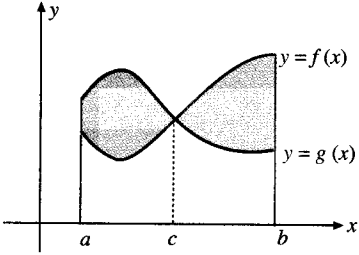
bulunur.



(2) $[a, b]$ aralığında $f(x) \leq g(x)$ ise, dikdörtgenlerin boyları $g(x_k^*) - f(x_k^*)$ olacağından

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

bulunur.



(3) $[a, b]$ aralığının bazı yerlerinde $f(x) \leq g(x)$, bazı yerlerinde $f(x) \geq g(x)$ ise, dikdörtgenlerin boyları bazı yerlerde $f(x_k^*) - g(x_k^*)$, bazı yerlerde $g(x_k^*) - f(x_k^*)$ olur. Dolayısıyla $|f(x_k^*) - g(x_k^*)|$ olur. Buna göre sözkonusu olan

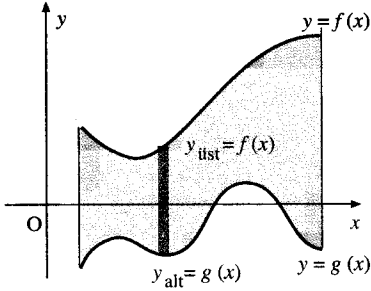
$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

olacaktır.

Şu halde $[a, b]$ aralığında f ile g nin durumları ne olursa olsun, $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin alanı

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

olacaktır.



Bu alanı hesaplarken şu yolu izlemekte yarar vardır :

- (1) $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları çizilip alanı istenen bölge belirtilir.
- (2) Bölge içinde kalacak şekilde Oy - eksenine paralel bir şerit çizilir.
- (3) Şeridin üst ucundaki ve alt ucundaki eğrileri tespit edilir.
- (4) Üst ucundaki eğriden alt ucundaki eğri çıkartılıp $y_{üst} - y_{alt}$ farkı bulunur.
- (5) Bulunan fark a dan b ye kadar integrallenir; yani

$$A = \int_a^b (y_{üst} - y_{alt}) dx$$

integrali hesaplanır.

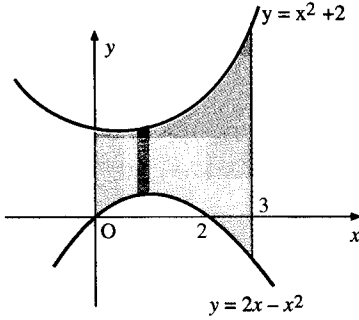
ÖRNEK : $y = x^2 + 2$, $y = 2x - x^2$ parabolleri ile Oy - eksenini ve $x = 3$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm :

$y_{üst} = x^2 + 2$, $y_{alt} = 2x - x^2$ olduğundan

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 (y_{üst} - y_{alt}) dx = \int_0^3 (x^2 + 2 - 2x + x^2) dx \\ &= \int_0^3 (2x^2 - 2x + 2) dx = \left. \frac{2}{3} x^3 - x^2 + 2x \right|_0^3 \\ &= 18 - 9 + 6 = 15 \end{aligned}$$

birimkare olur.



ÖRNEK : $y = x^2$ ve $x = y^2$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

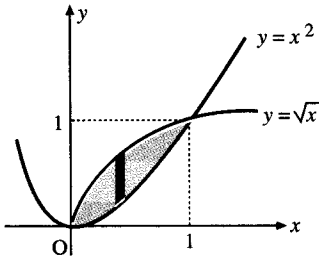
Çözüm : Önce parabollerin kesim noktalarını bulalım.

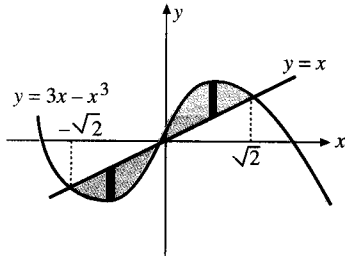
$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow y = (y^2)^2 \Rightarrow y = y^4 \Rightarrow y = 0 \text{ ve } y = 1 \text{ bulunur. } y = 0 \text{ için } x = 0,$$

$y = 1$ için $x = 1$ olacağından, eğrilerin kesim noktaları $(0,0)$ ve $(1,1)$ dir.

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left. \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3} \text{ birimkare}$$

olur.





ÖRNEK : $y = 3x - x^3$ eğrisiyle $y = x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

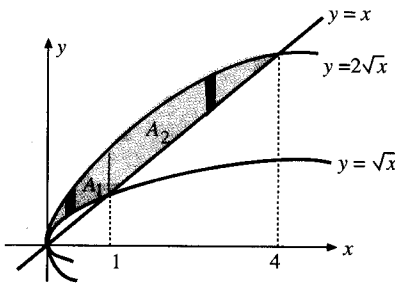
Çözüm : Eğrilerin kesim noktalarını bulalım.

$$3x - x^3 = x \Rightarrow x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{2}$$

olur. Soldaki bölgede üstteki eğri $y = x$, alttaki eğri $y = 3x - x^3$ dir. İkinci bölgede üstteki eğri $y = 3x - x^3$, alttaki eğri $y = x$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{2}}^0 (x - 3x + x^3) dx + \int_0^{\sqrt{2}} (3x - x^3 - x) dx \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^0 (x^3 - 2x) dx + \int_0^{\sqrt{2}} (2x - x^3) dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - x^2 \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^0 + \left(x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

br² olur.



ÖRNEK : $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ eğrileri ile $y = x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm : $y = x$ ile $y = \sqrt{x}$, (0,0) ve (1,1) noktalarında $y = x$ ile $y = 2\sqrt{x}$ de (0,0) ve (4,4) noktalarında kesişir.

Birinci bölgede üstteki eğri $y = 2\sqrt{x}$, alttaki eğri $y = \sqrt{x}$ dir. İkinci bölgede üstteki eğri $y = 2\sqrt{x}$, alttaki eğri $y = x$ dir. Buna göre,

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_0^1 (2\sqrt{x} - \sqrt{x}) dx + \int_1^4 (2\sqrt{x} - x) dx \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \left(\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^4 = \frac{2}{3} + \frac{11}{6} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

br² olur.

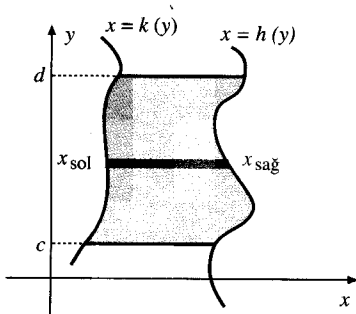
Benzer şekilde, h ve k fonksiyonları $[c,d]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar ise, $x = h(y)$, $x = k(y)$ eğrileri ile $y = c$ ve $y = d$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı

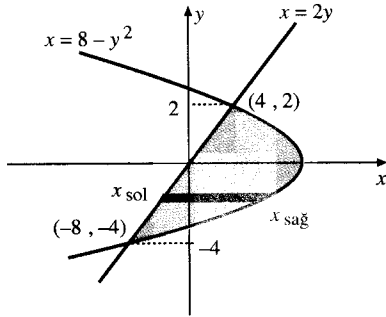
$$A = \int_c^d |h(y) - k(y)| dy$$

olur. İntegrali hesaplamak için sağdaki eğriden soldaki eğri çıkarılmalıdır. Bu durumda mutlak değere ihtiyaç kalmaz. O halde

$$A = \int_c^d (x_{sağ} - x_{sol}) dy$$

olacaktır.





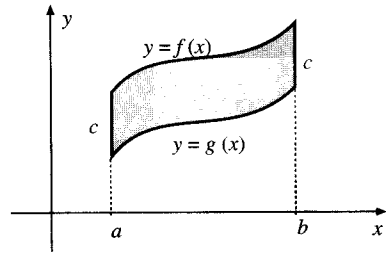
ÖRNEK : $x = 2y$ doğrusuyla $x = 8 - y^2$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm : Doğru ile eğrinin kesim noktalarını bulalım. $x = 8 - y^2$ de $x = 2y$ ko-nursa

$$2y = 8 - y^2 \Rightarrow y^2 + 2y - 8 = 0 \Rightarrow y_1 = -4, \quad y_2 = 2$$

olur. $x_1 = 2y_1 = -8$, $x_2 = 2y_2 = 4$ olacağından, doğru ile eğri $(-8, -4)$ ve $(4, 2)$ noktalarında kesişir.

$$A = \int_{-4}^2 (8 - y^2 - 2y) dy = 8y - \frac{y^3}{3} - y^2 \Big|_{-4}^2 = 36 \text{ br}^2$$



olur.

ÖRNEK : Bir bölgenin alt ve üst sınırlarını oluşturan $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ eğrileri için $f(x) - g(x) = c > 0$ dir. Bu eğrilerle $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz. Bulduğunuz bu sonucu yorumlayınız.

Çözüm :

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b c dx = c \int_a^b dx = c(b - a)$$

olur. Bu, eni $b - a$, boyu c olan dikdörtgenin alanından başka birşey değildir. Şu halde bir bölgenin alt ve üst sınırları arasındaki fark sabit ise bu bölgenin alanı eni ile boyunun çarpımına eşittir.

Bu özelliğin genel hali, integral kavramı bilinmediği halde 1635 yılında **Cavalieri** tarafından ortaya konmuştur.

1. CAVALIERI PRENSİBİ

Eğer iki bölge $[a, b]$ aralığının her noktasında aynı yüksekliğe sahipse bu iki bölgenin alanları eşittir.

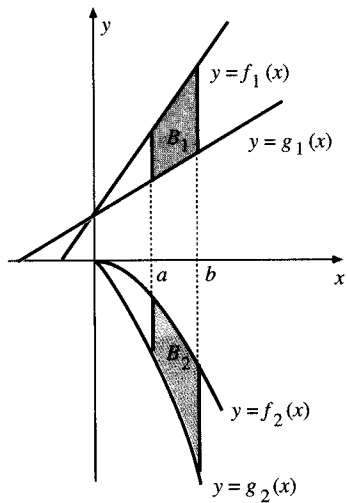
Cavalieri prensibi integralin çok basit bir uygulamasıdır. B_1 bölgesi $y = f_1(x)$, $y = g_1(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölge, B_2 de $y = f_2(x)$, $y = g_2(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğruları arasında kalan bölge olsun. Her $x \in [a, b]$ için

$$f_1(x) - g_1(x) = f_2(x) - g_2(x)$$

olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} \text{Alan}(B_1) &= \int_a^b [f_1(x) - g_1(x)] dx = \int_a^b [f_2(x) - g_2(x)] dx \\ &= \text{Alan}(B_2) \end{aligned}$$

olur.



7.3 PARAMETRİK DENKLEMLERİ VERİLEN EĞRİLERİN SINIRLADIĞI BÖLGELERİN ALANLARI

g ve h türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

parametrik denklemleri ile verilen bir C eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve Ox -ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplamak için

$$A = \int_a^b |y| dx$$

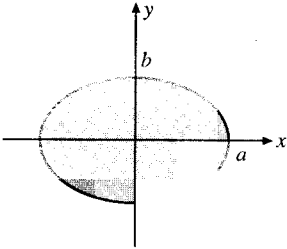
olan formülünü t cinsinden ifade etmek gerekir. $y = h(t)$, $dx = g'(t) dt$ olur. t nin a ve b ye karşılık gelen değerlerine, sırası ile, t_1 ve t_2 denirse

$$A = \int_{t_1}^{t_2} |h(t)| g'(t) dt$$

olur. Benzer şekilde verilen eğri, $y = c$, $y = d$ doğruları ve Oy -ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı, t_3 ve t_4 , c ve d sayılarına karşılık gelen parametreler olmak üzere,

$$A = \int_{t_3}^{t_4} |g(t)| h'(t) dt$$

olur.



ÖRNEK : $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ parametrik denklemiyle verilen elipsin (elips tarafından çevrelenen bölgenin) alanını bulunuz.

Çözüm : Önce elipsin dörtte bir parçasının alanını bulalım.

$$x = 0 \text{ için } t = \frac{\pi}{2}, \quad x = a \text{ için } t = 0$$

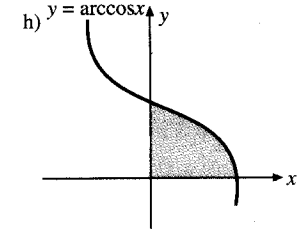
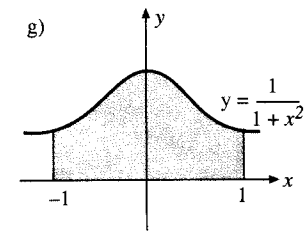
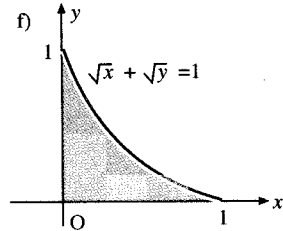
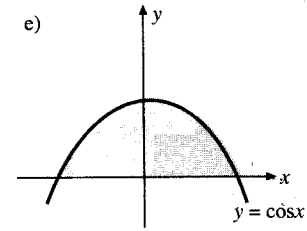
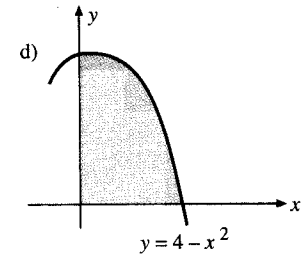
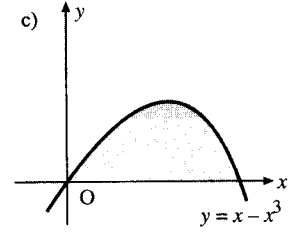
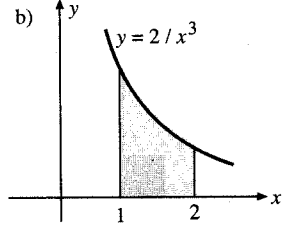
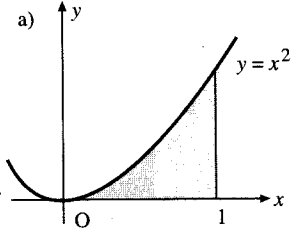
olacağından

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b |\sin t| \cdot (-a \sin t) dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \\ &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 2ab \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab \end{aligned}$$

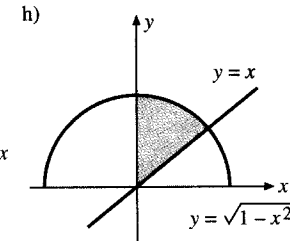
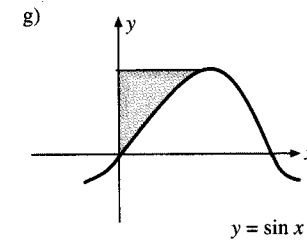
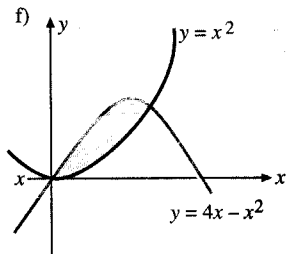
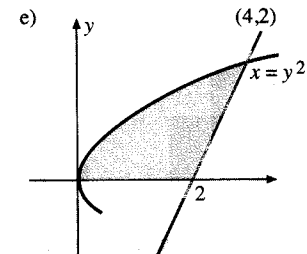
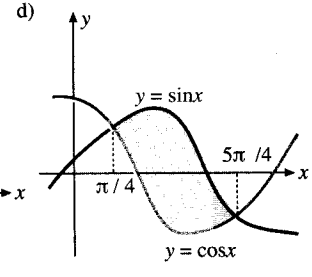
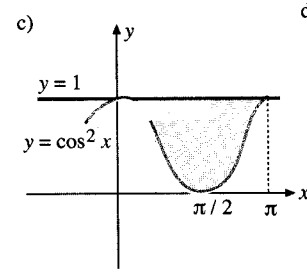
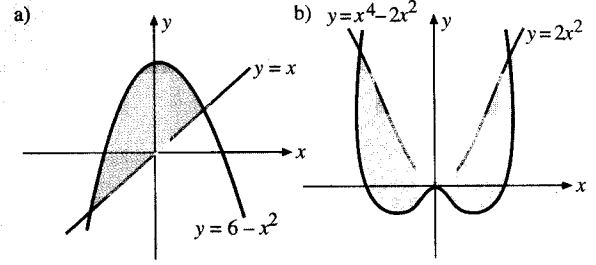
πab bulunur.

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki taralı bölgelerin alanlarını bulunuz.



2. Aşağıdaki taralı bölgelerin alanlarını hesaplayınız.



3. Aşağıda denklemleri verilen eğri, doğrular ve 0x-ekseni arasında kalan kapalı bölgelerin alanlarını bulunuz.

- (a) $y = x^2 + 2x$, $x = -1$, $x = 3$
 (b) $y = x^3 - x$, $x = -2$, $x = 1$
 (c) $y = \cos x - \sin x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$
 (ç) $y = 4x - x^2$, $x = 1$, $x = 2$
 (d) $y = \tan x$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{6}$
 (e) $y = \sin^2 x \cos x$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{4}$
 (f) $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 1$, $x = 3$

4. Aşağıda denklemleri verilen eğriler ile 0x-ekseni arasında kalan bölgelerin alanlarını bulunuz.

- (a) $y = 2x - x^2$
 (b) $y = 25 - x^2$
 (c) $y = 6x - x^3$
 (d) $y = \sqrt{4 - x^2}$

5. Aşağıda denklemleri verilen eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını bulunuz.

- (a) $y = x^2$, $y = 8 - x^2$
 (b) $y = x^2$, $y = x^3$
 (c) $y = x^3$, $y = 2x - x^2$
 (ç) $y = \frac{1}{3}x^2$, $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$
 (d) $y = x^3$, $y = 32\sqrt{x}$
 (e) $y = x^3$, $y = x^{1/3}$
 (f) $y = x^2 + 3$, $y = 12 - x^2$
 (g) $y = x^3 + x$, $y = 3x^2 - x$
 (h) $y = x^3 + 1$, $y = (x + 1)^2$
 (ı) $y = x^4 - 4$, $y = 3x^2$
 (i) $y = x^3$, $y = 2x^3 + x^2 - 2x$
 (j) $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x^2}$

(k) $y = x^4$, $y = 32 - x^4$

(l) $x = 8 - y^2$, $x = y^2 - 8$

(m) $x = y^2$, $x = 32 - y^2$

(n) $x = y^2 - 2y - 2$, $x = 4 + y - 2y^2$

(o) $y^2 = 3x$, $y = x^2 - 2x$

(ö) $y^2 = x$, $y^2 = 2(x - 3)$

(p) $y^2 = 6x$, $x^2 = 6y$

6. Aşağıda denklemleri verilen doğru ve eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını bulunuz.

- (a) $y = x^3$, $y = x$
 (b) $y = x^2$, $y = 2x$
 (c) $y = 2x^2$, $y = 5x - 3$
 (ç) $y = x^2 + 1$, $y = 2x + 9$
 (d) $y = x^2$, $y = 4$
 (e) $x = y^2$, $y = x - 2$
 (f) $y^2 = 2x - 5$, $y = x - 4$
 (g) $x = 4y^2$, $x + 12y + 5 = 0$
 (h) $x = y^2$, $x = 4$
 (ı) $y = \frac{1}{1 + x^2}$, $y = \frac{1}{2}x^2$

7. Aşağıda denklemleri verilen eğri ve doğrular tarafından sınırlanan kapalı bölgelerin alanlarını bulunuz.

- (a) $y = x^2 + 4$, $y = x - 2$, $x = -3$, $x = 0$
 (b) $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$
 (c) $y = x^2$, $y = x^3$, $x = -2$, $x = -1$
 (ç) $y = x^2$, $y = -1$, $x = -1$, $x = 2$
 (d) $y = x^3$, $y = -x$, $y = x + 6$
 (e) $y = x + 2$, $y = -3x + 6$, $y = \frac{1}{3}(2 - x)$
 (f) $y = 4 - |x|$, $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$

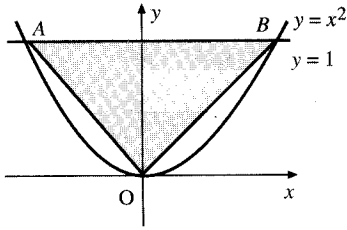
8. $y = x^2$ denklemlı parabol, bu parabole (1,1) noktasında teğet olan doğru ve Oy - eksenı tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

9. $y = x^3 - x$ eğrisi ile bu eğriye $x = -1$ apsıslı noktada teğet olan doğru arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

11. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $y = x^k$ ile $y = x^{k+1}$ eğrileri veriliyor. Bu iki eğri arasında kalan bölgenin alanı $A(k)$ olsun. $\sum_{k=1}^n A(k)$ ifadesini bulunuz.

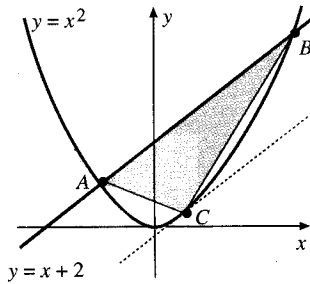
12.



Şekildeki $y = x^2$ parabolü ile $y = 1$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanı p , AOB üçgeninin alanı q olduğuna göre, $p : q$ nedir?

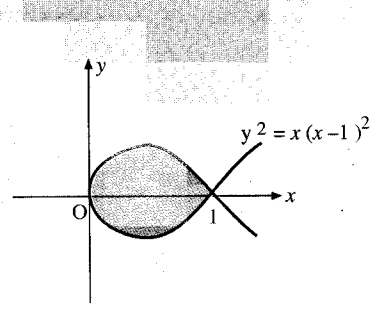
13. $(y - x)^2 = x^3$ eğrisiyle $x = 1$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

14.



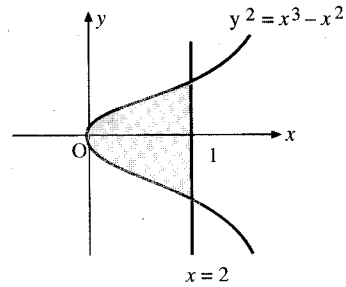
$y = x^2$ parabolü ile $y = x + 2$ doğrusunun kesim noktaları A ve B dir. Parabolün, AB doğrusuna paralel olan teğetinin değme noktası C olduğuna göre, parabol ile $y = x + 2$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanının ABC üçgeninin alanına oranı nedir?

15.



Şekildeki taralı bölgenin alanını bulunuz.

16.



Şekildeki taralı bölgenin alanını bulunuz.

17. $y = -x^2 - 2x + 3$ parabolü, bu parabole (2, -5) noktasından çizilen teğet ve y - eksenı arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

18. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$

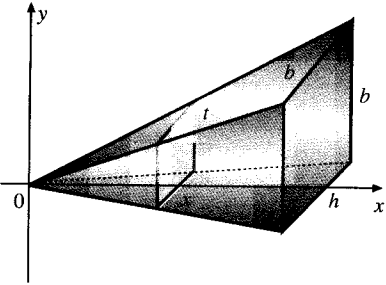
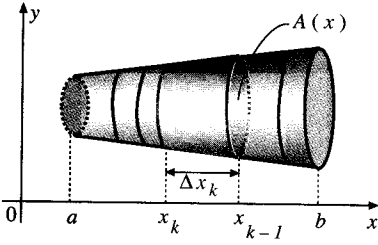
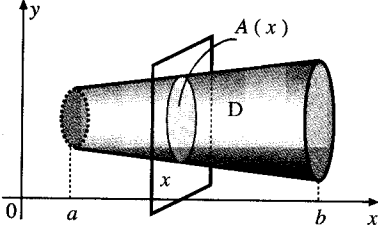
astroid eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

19. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

sikloid eğrisinin bir yayı ile Ox - eksenı arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

7.4 HACİM HESABI

7.4.1 KESİT YÖNTEMİ



Bir katı cismin hacmini, integral yardımıyla, çeşitli yollardan hesaplamak mümkündür. Bu yöntemlerden üçünü bu kesimde vermeye çalışacağız.

Üç boyutlu uzaydaki bir D bölgesinin (cisminin) şu özelliklere sahip olduğunu kabul edelim :

Cisim $[a, b]$ aralığı üzerine yerleştirilmiş ve bu aralıktaki her bir x noktasında Ox -eksenine dik olan düzlemlerle cismin $A(x)$ arakesiti x in bir sürekli fonksiyonudur.

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $[a, b]$ aralığının bir parçalanması ve x_k^* , $[x_{k-1}, x_k]$ aralığının herhangi bir noktası olsun. Her x_k^* noktasından x eksenine dik olarak çizilen düzlemler D cismini n parçaya böler. Her parçacığın hacmi, yaklaşık olarak $A(x_k^*)$ kesit alanı ile Δx_k yüksekliğinin (kalınlığının) çarpımına eşittir. Dolayısıyla D bölgesinin V hacmi için

$$V \cong \sum_{k=1}^n A(x_k^*) \Delta x_k$$

yazılabilir. P ne kadar ince seçilirse, yaklaşıklık o kadar iyi olur. Buna göre

$$V = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n A(x_k^*) \Delta x_k$$

yazılabilir. Sağdaki toplam bir integral toplam olduğundan

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

bulunur.

ÖRNEK : Tabanı, bir kenarı b birim olan bir kare ve yüksekliği h birim olan piramidin hacmini bulunuz.

Çözüm : Piramidi, yandaki şekilde olduğu gibi, Ox - eksenı üzerinde $[0, h]$ aralığına yerleştirilelim. Cismin Ox - eksenine dik düzlemlerle arakesiti birer karedir. Apsisi x olan noktadaki kesitin (karenin) bir kenarı t birim olsun.

$$\frac{t}{b} = \frac{x}{h} \Rightarrow t = \frac{b}{h} x$$

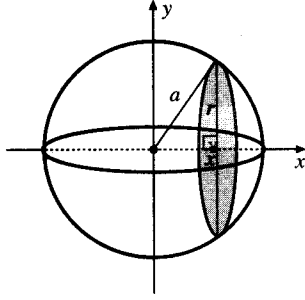
olacağından kesitin alanı

$$A(x) = t^2 = \frac{b^2}{h^2} x^2$$

olur. Buna göre,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(x) dx = \int_0^h \frac{b^2}{h^2} x^2 dx \\ &= \frac{b^2}{h^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} b^2 h \end{aligned}$$

olur. O halde bir piramidin hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının üçte-birine eşittir.



ÖRNEK : a yarıçaplı bir kürenin hacmini hesaplayınız.

Çözüm : Kürenin merkezinden x birim uzaktaki dik kesitin alanı $A(x)$ olsun. Bu kesit bir daire olup alanı

$$A(x) = \pi r^2 = \pi (a^2 - x^2)$$

birimdir. Buna göre,

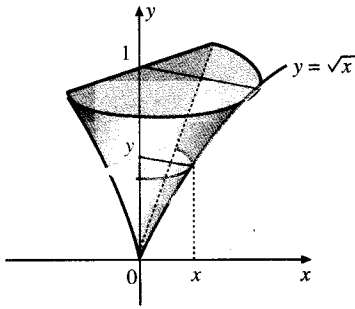
$$\begin{aligned} V &= \int_0^a A(x) dx = \pi \int_0^a (a^2 - x^2) \\ &= \pi \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{4}{3} \pi a^3 \end{aligned}$$

olur.

Eğer hacmi istenin cismin Oy - eksenine dik kesitlerinin alanı biliniyorsa $[c,d]$ aralığına yerleştirilen cismin hacmi

$$V = \int_c^d A(y) dy$$

olur.



ÖRNEK : Yandaki şekilde verilen cismin Oy - eksenine dik düzlemlerle arakesitleri birer yarım dairedir. Bu cismin hacmini bulunuz.

Çözüm : Ordinatu y olan noktadaki kesitin alanı

$$A(y) = \frac{1}{2} \pi x^2 = \frac{1}{2} \pi (y^2)^2 = \frac{\pi}{2} y^4$$

olacağından, cismin hacmi

$$V = \int_0^1 A(y) dy = \int_0^1 \frac{\pi}{2} y^4 dy = \frac{\pi}{10}$$

birimküb olur.

Dönel cisimlerin hacimlerini hesaplamada belli başlı iki yöntem vardır. Şimdi bu yöntemleri verelim.

$y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve Ox - eksen arasında kalan B bölgesi Ox - eksen etrafında döndürüldüğünde meydana gelen dönel cismin hacmini bulalım.

$[a,b]$ aralığındaki herhangi bir noktada dikkesit alındığında dik kesit daima bir daire olur. Dik kesitin alındığı noktanın apsisi x ise dikkesitin alanı

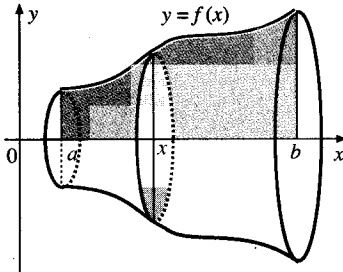
$$A(x) = \pi [f(x)]^2, \quad a \leq x \leq b$$

olur. Kesit yöntemine göre, cismin hacmi

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

birimküb olur.

7.4.2 DİSK YÖNTEMİ



Benzer şekilde $x = g(y)$ eğrisi, $y = c$ ve $y = d$ doğruları ile Oy - eksenini tarafından sınırlanan bölgenin Oy - eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmi

$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy$$

olur.

ÖRNEK : $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ eğrisi, $x = 1$ ve $x = e$ doğruları ile Ox eksenini arasında kalan bölge Ox - eksenini etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$V = \pi \int_1^e \frac{1}{x} dx = \pi \ln |x| \Big|_1^e = \pi \ln e = \pi$$

olur.

ÖRNEK : $y = \ln x$ eğrisi, x eksenini, y eksenini ve $y = 1$ doğrusu arasında kalan bölge Oy - eksenini etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm : $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$ dir.

$$V = \pi \int_0^1 [f(y)]^2 dy = \pi \int_0^1 (e^y)^2 dy = \pi \int_0^1 e^{2y} dy$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{2} e^{2y} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} (e^2 - 1)$$

olur.

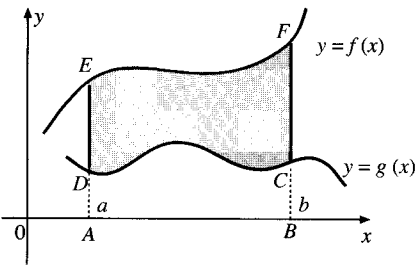
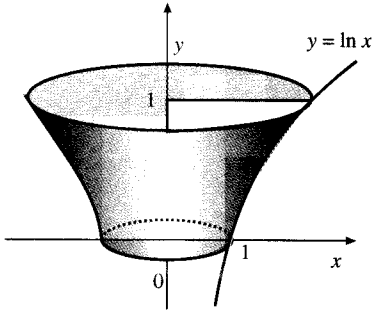
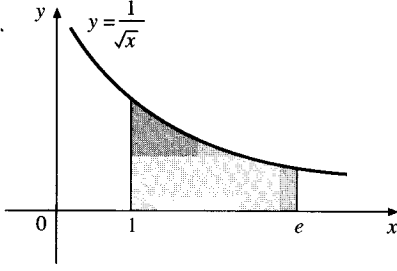
$[a, b]$ aralığında $0 \leq g(x) \leq f(x)$ olsun. $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri, $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin Ox - eksenini etrafında dönmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmi

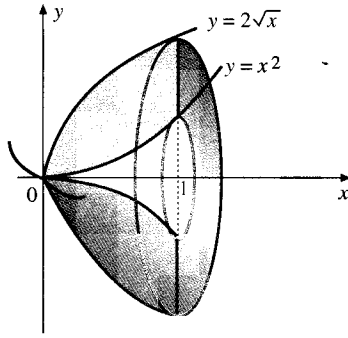
$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$$

olacaktır. Bu, $ABFE$ bölgesinin dönmesiyle elde edilen hacimden $ABCD$ bölgesinin dönmesiyle elde edilen hacmin çıkarılmasından yani

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx - \pi \int_a^b g^2(x) dx$$

farkından başka birşey değildir.





ÖRNEK : $y = 2\sqrt{x}$, $y = x^2$ eğrileri ile $x = 1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin Ox - eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

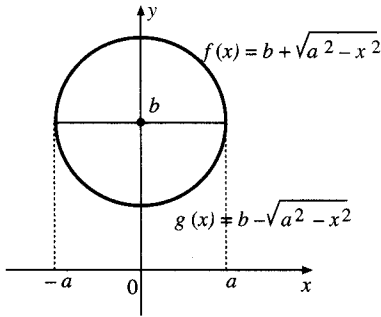
Çözüm :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 [(2\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] dx \\ &= \pi \int_0^1 (4x - x^4) dx = \pi \left(2x^2 - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 \\ &= \pi \left(2 - \frac{1}{5} \right) = \frac{9}{5} \pi \end{aligned}$$

olur.

ÖRNEK : $0 < a < b$ olsun. Merkezi $(0, b)$ de bulunan a yarıçaplı bir çember tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin Ox - eksenini etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel cismin (torun) hacmini bulunuz.

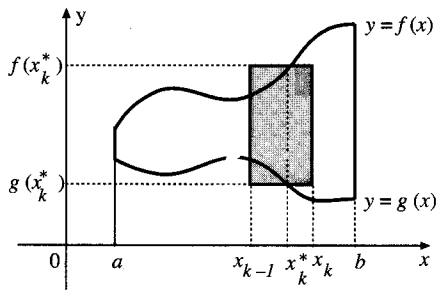
Çözüm : Verilen çemberin denklemi $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ dir. Bu eşitlikten y çekilirse $y_1 = b + \sqrt{a^2 - x^2} = f(x)$, $y_2 = b - \sqrt{a^2 - x^2} = g(x)$ bulunur. Sözü edilen bölge yandaki şekilde gösterilmiştir. Buna göre istenen hacim



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a [(b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2] dx \\ &= 4\pi b \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 8\pi b \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= 8\pi b \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 8\pi b (a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt) \\ &= 8\pi a^2 b \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2\pi^2 a^2 b \end{aligned}$$

birimküb olur.

7.4.3 KABUK YÖNTEMİ



$y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin Oy - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel cismin hacmini bulalım.

$[a, b]$ aralığının bir parçalanması $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ olsun.

Herbir $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında bir x_k^* seçelim. Boyu $|f(x_k^*) - g(x_k^*)|$, eni Δx_k olan dikdörtgenin Oy - eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen silindirik tabakanın hacmi

$$\begin{aligned}\Delta V_k &= |\pi x_k^2 - \pi x_{k-1}^2| \cdot |f(x_k^*) - g(x_k^*)| \\ &= 2\pi \cdot \left| \frac{x_{k-1} + x_k}{2} \right| \cdot |f(x_k^*) - g(x_k^*)| \cdot \Delta x_k\end{aligned}$$

olur. İstenen V hacmi, yaklaşık olarak bu ΔV_k hacimlerinin toplamına eşittir. Buna göre,

$$V \cong 2\pi \sum_{k=1}^n \left| \frac{x_{k-1} + x_k}{2} \right| |f(x_k^*) - g(x_k^*)| \Delta x_k$$

olur. Parçalanma ne kadar ince alınırsa yaklaşıklık o kadar iyi olur. $\|P\| \rightarrow 0$ yapılırsa, $\frac{x_{k-1} + x_k}{2} \cong x_k^*$ olacağından

$$V = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} 2\pi \sum_{k=1}^n |x_k^*| |f(x_k^*) - g(x_k^*)| \Delta x_k$$

bulunur. Eğer $f - g$ integrallenebilir ise sağ taraftaki limit

$$2\pi \int_a^b |x [f(x) - g(x)]| dx$$

integraline eşit olacağından

$$V = 2\pi \int_a^b |x [f(x) - g(x)]| dx$$

bulunur.

Benzer olarak $x = u(y)$, $x = v(y)$ eğrileri, $y = c$ ve $y = d$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin Ox - eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmi

$$V = 2\pi \int_c^d |y [u(y) - v(y)]| dy$$

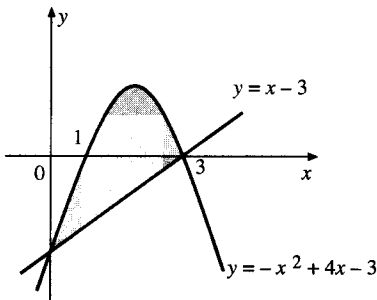
olur.

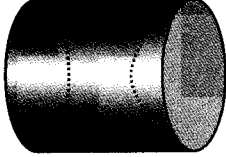
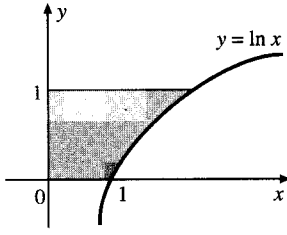
ÖRNEK : $y = -x^2 + 4x - 3$ parabolü ile $y = x - 3$ doğrusu arasında kalan bölge Oy - eksenini etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{aligned}V &= 2\pi \int_0^3 |x (-x^2 + 4x - 3 - x + 3)| dx \\ &= 2\pi \int_0^3 |x^2 (-x + 3)| dx = 2\pi \int_1^3 (-x^3 + 3x^2) dx \\ &= 2\pi \left(-\frac{x^4}{4} + x^3 \right) \Big|_1^3 = \frac{27}{2} \pi \text{ br}^3\end{aligned}$$

olur.





ÖRNEK : $y = \ln x$ eğrisi, Ox - eksenini, Oy - eksenini ve $y = 1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge Ox - eksenini etrafında döndürülüyor. Elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

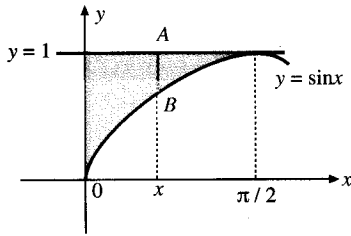
Çözüm : $y = \ln x \Rightarrow x = e^y$ olur.

$$V = 2\pi \int_0^1 |y(e^y - 0)| dy = 2\pi \int_0^1 ye^y dy$$

$$= 2\pi (y - 1)e^y \Big|_0^1 = 2\pi \cdot 1$$

bulunur.

Aynı soruyu disk yöntemiyle çözüp sonuçları karşılaştırınız.

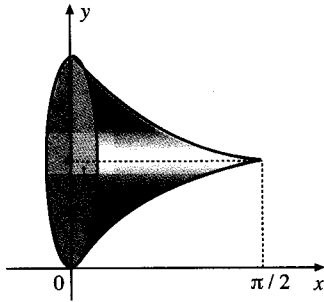


ÖRNEK : $y = \sin x$, $y = 1$, $x = 0$ tarafından sınırlanan kapalı bölgenin $y = 1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

Çözüm : $y = \sin x$ eğrisinin dönme eksenini olan $y = 1$ doğrusuna olan uzaklığı

$$|AB| = 1 - \sin x$$

olduğundan



$$V = \pi \int_0^{\pi/2} (1 - \sin x)^2 dx = \pi \int_0^{\pi/2} (1 - 2 \sin x + \sin^2 x) dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} \left[1 - 2 \sin x + \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \right] dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{2} - 2 \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{3}{2} x + 2 \cos x - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{4} \pi^2 - 2\pi$$

birimküb olur.

Eğer Ox - eksenini etrafında döndürülen bölgenin sınır eğrisi

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases} \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

biçiminde parametrik olarak verilirse, yapılacak iş

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

integralini

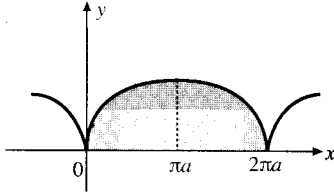
$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} v^2(t) u'(t) dt$$

biçiminde yazıp hesaplamaktan ibarettir.

ÖRNEK : Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

olan eğri (sikloid) ve Ox - eksenini tarafından sınırlanan bölgenin Ox - eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.



Çözüm :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 a(1 - \cos t) dt \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + 3 \cos^2 t - \cos^3 t) dt \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left[1 - 3 \cos t + 3 \frac{1 + \cos 2t}{2} - (1 - \sin^2 t) \cos t \right] dt \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - 4 \cos t + \frac{3}{2} \cos 2t + \sin^2 t \cos t \right) dt \\ &= \pi a^3 \left[\frac{5}{2} t - 4 \sin t + \frac{3}{4} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin^3 t \right] \Big|_0^{2\pi} \\ &= \pi a^3 [5\pi] = 5\pi^2 a^3 \end{aligned}$$

bulunur.

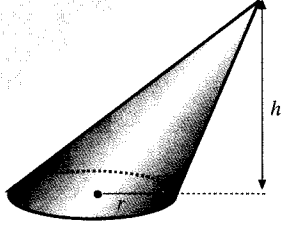
Eğer eğrilerin denklemleri parametrik olarak verilirse, söz konusu bölgenin Oy - eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşacak cismin hacmi,

$$\pi \int_c^d x^2 dy$$

integralinin parametre cinsinden yazılıp hesaplanmasıyla bulunabilir.

PROBLEMLER

1.



Taban yarıçapı r , yüksekliği h birim olan dairesel silindirlerin hacminin

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

birim küb olduğunu gösteriniz.

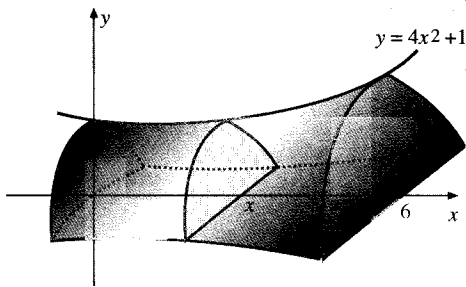
2. Tabanı bir ikizkenar dik üçgen olan bir piramidin yüksekliği h birimdir. Tabanının hipotenüsü $\sqrt{2}a$ birim olduğuna göre, piramidin hacmi kaç birim kübdür?

3. Yarıçapı r olan bir küre merkezinden a birim uzak-taki bir düzlemlle kesiliyor. Kesilen küçük parçanın hacminin

$$V = \frac{\pi}{3} (r - a)^2 (2r + a)$$

birimküb olacağını gösteriniz.

4.



Şekildeki cismin Ox - eksenine dik düzlemlerle arakesiti birer yarımdairedir. Cismin uzunluğu 6 birim olduğuna göre, hacmini bulunuz.

5. Bir cismin tabanı $x^2 + y^2 \leq a^2$ dairesidir. Bu cismin Ox - eksenine dik düzlemlerle arakesitleri birer kare olduğuna göre, bu cismin hacmini bulunuz.

6. Bir cismin tabanı, eksen uzunlukları 10 cm ve 8 cm olan bir elipstir. Bu cismin büyük eksene (asal eksene) dik düzlemlerle arakesiti, yüksekliği 6 cm olan eşkenar üçgenler olduğuna göre, cismin hacmini bulunuz.

7. Aşağıda denklemleri verilen eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgelerin Ox - eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cisimlerin hacimlerini bulunuz.

(a) $y = x^2$, $x = 0$, $x = 5$, $y = 0$

(b) $y = 1 - x^2$, $y = 0$

(c) $y = x^3$, $y = x$, $x = 2$

(ç) $y = e^x$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$

(d) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = 0$

(e) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$

(f) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$

8. Aşağıda denklemleri verilen eğri ve doğrular arasında kalan bölgelerin Ox - eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cisimlerin hacmini bulunuz.

(a) $y = x$, $y = \sqrt{x}$

(b) $y = 2x$, $y = x$, $x = 1$

(c) $y = x^2 + 3$, $y = 4$

(d) $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$

(e) $y = 4 - x^2$, $y = 2 - x$

(f) $y = \sec x$, $y = \tan x$, $x = 0$, $x = 1$

(g) $y = 3x - x^2$, $y = x$

(h) $y^2 = 2px$, $x = h$

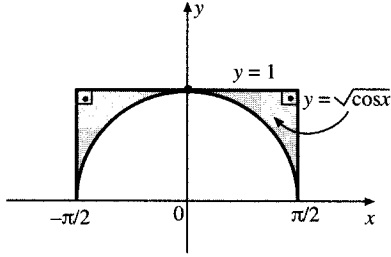
(i) $(y - a)^2 = ax$, $x = 0$, $y = 2a$

(i) $y = x^2 + 2$, $y = -x^2 + 10$

9. Aşağıdaki eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgelerin Oy - eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

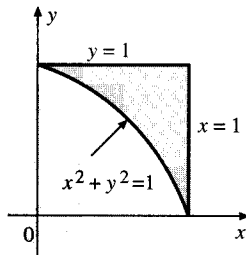
- (a) $y = x^2$, $x = 0$, $y = 4$
- (b) $x = y(3 - y)$, $x = 0$, $y = 1$
- (c) $y = x^3$, $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$
- (d) $y = e^{-x}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$
- (e) $x = \sqrt{4 - y}$, $x = 0$, $y = 0$
- (f) $x = 1 - y^2$, $x = 0$
- (g) $x = y^{3/2}$, $x = 0$, $y = 2$

10.



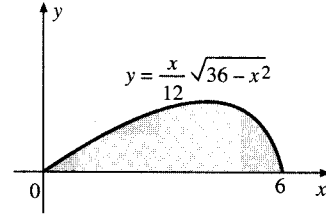
Yukarıdaki taralı bölgenin Ox - eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

11.



Yukarıdaki taralı bölgenin Oy - eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini bulunuz.

12.



Yukarıdaki taralı bölgenin Ox - eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

13. $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$

tarafından sınırlanan bölgenin

- (a) Ox - eksenini
- (b) Oy - eksenini
- (c) $y = 2$ doğrusu
- (d) $x = 4$ doğrusu

etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

14. $y = 2x$, $y = 0$, $x = 1$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin

- (a) $x = 1$ doğrusu
- (b) $x = 2$ doğrusu

etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

15. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin karşılıklarında yazılı doğrular etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

- (a) $y = x^2$, $y = 8 - x^2$ eksen $x = 4$
- (b) $y = x + x^2$, $y = x^2 - 1$, $x = 0$ eksen $y = 1$
- (c) $y = x^3$, $y = -1$, $x = 1$ eksen $y = 2$
- (ç) $y = 4x - x^2$, $y = 0$ eksen $y = 4$
- (d) $y = 1 - x^2$, $y = -3$ eksen $y = -3$
- (e) $2x = 4 - y^2$, $2x = y^2 - 4$ eksen $x = -3$
- (f) $x = y^2$, $x = 2 - y^2$ eksen $x = -1$
- (g) $y = x^2$, $y = 8 - x^2$ eksen $y = -1$

16. $y = x^2 + 1$ eğrisi ile bu eğriye $x = 1$ apsisli noktadan çizilen teğet ve $x = 0$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin

(a) Ox - eksenini

(b) Oy - eksenini

etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

17. $y = \sin x$, $y = \cos x$ eğrileri,

$x = 0$ ve $x = \frac{\pi}{4}$ doğruları tarafından sınırlanan

düzlemsel bölgenin Ox - eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

18. Aşağıdaki eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgelerin Oy - eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cisimlerin hacimlerini kabuk yöntemiyle bulunuz.

(a) $y = x^2 - 2x$, $y = 0$

(b) $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$

(c) $y = 4x - x^2$, $y = 0$

(d) $xy = 5$, $y = -x + 6$

(e) $xy = 2$, $xy = 4$, $x = 1$, $x = 2$

(f) $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$

(g) $y = 3x^2 - x^3$, $y = 0$

(h) $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$

(i) $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$, $x = 5$

19. Aşağıdaki eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgelerin Ox - eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cisimlerin hacimlerini kabuk yöntemiyle bulunuz.

(a) $x = y^2$, $x = 0$, $y = 1$

(b) $x = y^2 - 2y$, $x = 0$

(c) $y = \ln x$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$

(d) $y = 4 - 2x$, $y = 4 - x$, $y = 0$

20. $y = 3 - x^2$ parabolü, $y = 3x - 1$ doğrusu ve Oy - eksenini tarafından sınırlanan bölge Oy - eksenini etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin hacmini

(a) kesit

(b) disk

(c) kabuk

yöntemiyle hesaplayınız.

21. $y^2 = x(x-1)$ eğrisinin ilmeği tarafından sınırlanan bölge Ox - eksenini etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin hacmini

(a) kesit

(b) disk

(c) kabuk

yöntemiyle hesaplayınız.

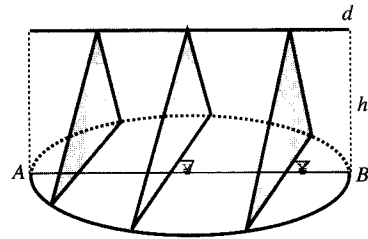
22. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi tarafından sınırlanan bölge Ox -

eksenini etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin (elipsoidin) hacmini bulunuz.

23. $x^2 + y^2 \leq a^2$ dairesi $x = a$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Oluşan cismin hacmini bulunuz.

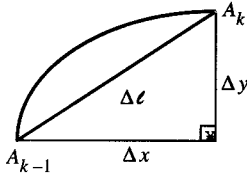
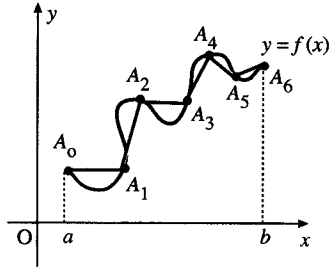
24. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ astroid eğrisi tarafından sınırlanan bölge Ox - eksenini etrafında döndürülüyor. Oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

25.



Bir üçgensel bölge yarıçapı a olan bir çemberin sabit AB çapına paralel olarak hareket etmektedir. Üçgenlerin tabanları sabit çapa dik olan kirişler, tepeleri de çember düzlemine h kadar uzakta bulunan ve sabit çapa paralel olan bir d doğrusu üzerindedir. Üçgenler çapın bir ucundan diğer ucuna kadar hareket ettirildiğinde oluşan cismin (taranan bölgenin) hacmini bulunuz.

7.5 EĞRİ UZUNLUĞU HESABI



$y = f(x)$ eşitliğiyle tanımlanan türevli f fonksiyonu verilmiş olsun. Bu eğrinin a ve b apsisi noktaları arasında kalan parçasının ℓ uzunluğunu bulalım.

$[a, b]$ aralığının bir parçalanması $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ olsun. $[A_{k-1}, A_k]$ doğru parçalarının uzunlukları toplamı, yaklaşık olarak, eğrinin ℓ uzunluğuna eşittir.

$$\Delta \ell_k = |A_{k-1} A_k| = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

olacağından

$$\ell \cong \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k$$

yazılabilir. Buna göre,

$$\ell = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k$$

olur. $\|P\| \rightarrow 0$ için $\Delta x \rightarrow 0$ olacağından $\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \rightarrow y'$ olur. O halde

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

bulunur.

ÖRNEK : a yarıçaplı bir çemberin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm :

a yarıçaplı, $x^2 + y^2 = a^2$ çemberini gözönüne alalım.

Çemberin çevresi AB yayının 4 katına eşittir. Buna göre,

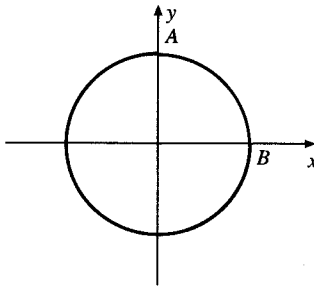
$$\ell = 4 \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

olacaktır. $x^2 + y^2 = a^2$ olduğundan

$$2x + 2y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2 - x^2 + x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$$

dır. Buna göre



$$\begin{aligned}\ell &= 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} dx = 4a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &= 4a \cdot \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a = 4a \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi a\end{aligned}$$

birimdir.

ÖRNEK : $y = \ln x - \frac{1}{8}x^2$ eğrisinin $x = 2$ ve $x = 4$ apsisli noktaları arasındaki parçasının uzunluğunu bulunuz.

Çözüm : $y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{4}x$ olacağından

$$\begin{aligned}1 + (y')^2 &= 1 + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{16} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{16} = \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{4}\right)^2\end{aligned}$$

bulunur. O hâlde

$$\ell = \int_2^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{4}\right) dx = \ln x + \frac{x^2}{8} \Big|_2^4 = \ln 4 + 2 - \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \ln 2$$

birimdir.

Eğer eğri parçasının denklemi

$$x = g(y) \quad , \quad c \leq y \leq d$$

biçiminde verilirse, eğri parçasının uzunluğu

$$\ell = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

olacaktır.

Uzunluğu bulunmak istenen eğrinin parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases} \quad , \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

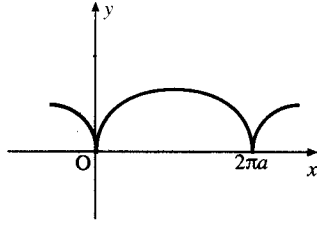
ise

$$\Delta \ell_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t_k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta t_k}\right)^2} \cdot \Delta t_k$$

yazılabileceğinden

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

bulunur.



ÖRNEK : Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

olan sikloidin bir yayının uzunluğunu bulunuz.

Çözüm :

$$x' = \frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = a \sin t$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (x')^2 + (y')^2 &= a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 2a^2(1 - \cos t) = 2a^2\left(1 - \left(1 - 2\sin^2 \frac{t}{2}\right)\right) \\ &= 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2} = \left(2a \sin \frac{t}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

olur. Buna göre,

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{2\pi} 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 4a \left(-\cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 4a \cdot 2 = 8a \end{aligned}$$

birim bulunur.

Yukarıda verilen yay uzunluğu formülleri gözönüne alındığında, yay diferensiyelinin, eğri denkleminin

$$y = f(x)$$

biçiminde olması halinde

$$d\ell = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

eğri denkleminin,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

biçiminde olması durumunda

$$d\ell = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

olacağını gördük. Eğri denkleminin kutupsal formda olması halini ilerde Kutupsal Koordinatlar bölümünde vereceğiz.

PROBLEMLER

1. Aşağıda denklemleri ve uç noktalarının apsisleri verilen eğri parçalarının uzunluklarını bulunuz.

(a) $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$, $x = 0$, $x = 2$

(b) $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$, $x = 0$, $x = 3$

(c) $y = 2\sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 1$

(ç) $y = x^{3/2}$, $x = 0$, $x = 4$

(d) $9x^2 = 4y^3$, $x = 0$, $x = 2\sqrt{3}$

(e) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$, $x = 1$, $x_2 = 3$

(f) $y = \frac{1}{3}x^{2/3} - x^{1/2}$, $x = 1$, $x = 9$

(g) $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$, $x = 0$, $x = 8$

(h) $y = x^{5/2}$, $x = 0$, $x = 5$

(ı) $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$, $x = 0$, $x = 2$

(i) $y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2x}$, $x = 1$, $x = 3$

(j) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$, $x = 1$, $x = e$

(k) $y = \frac{2}{5}x^{5/4} - \frac{2}{3}x^{3/4}$, $x = 1$, $x = 16$

(l) $y = \ln(x^2 - 1)$, $x = 2$, $x = 5$

(m) $y = \ln(\sin x)$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{2\pi}{3}$

(n) $y = \ln x$, $x = \sqrt{3}$, $x = \sqrt{8}$

2. Aşağıda denklemleri ve uç noktalarının ordinatları verilen eğri parçalarının uzunluklarını hesaplayınız.

(a) $x = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2y}$, $y = 1$, $y = 2$

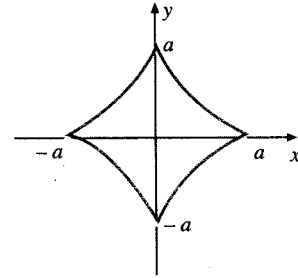
(b) $x = \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{8y^2}$, $y = 1$, $y = 2$

(c) $x = \ln(\sec y)$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{3}$

(d) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $y = 1$, $y = e$

3. $9ay^2 = x(x - 3a)^2$ kapalı eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

4. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ astroid eğrisinin çevre uzunluğunu bulunuz.



5. Parametre aralıkları karşılarında yazılı eğri parçasının uzunluklarını hesaplayınız.

(a) $x = 2t$, $y = t^3$, $-1 \leq t \leq 1$

(b) $x = \frac{1}{2}t^2 - 1$, $y = \frac{4}{3}t^{3/2}$, $0 \leq t \leq 2$

(c) $x = 2(1 - \cos t)$, $y = 2\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$

(d) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \leq t \leq 2\alpha$

(e) $x = \cos t$, $y = t + \sin t$, $-\pi \leq t \leq \pi$

(f) $x = 2a \cos t - a \cos 2t$

$y = 2a \sin t - a \sin 2t$, $0 \leq t \leq 2\pi$

6. $y = \int_{-\pi/2}^x \sqrt{\cos t} dt$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

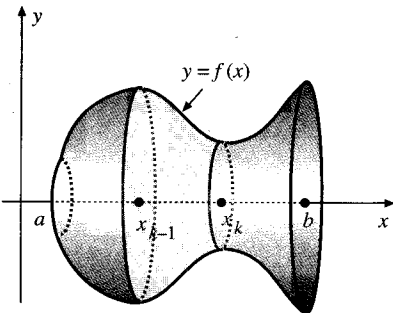
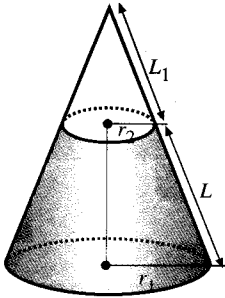
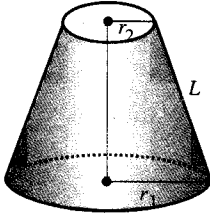
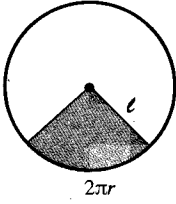
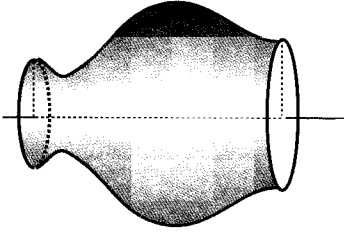
denklemleri eğri parçasının uzunluğunu bulunuz.

7. Parametrik denklemleri

$x = \sqrt{3}t^2$, $y = t - t^3$

eğri ilmeğinin çevre uzunluğunu hesaplayınız.

7.6 DÖNEL YÜZEYLERİN ALANI



Dönel yüzey, bir eğri veya eğri parçasının, kendisiyle aynı düzlemde bulunan bir eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan bir yüzeydir. Küre, koni, silindir birer dönel yüzeydir.

Dönel yüzeylerin alanlarını bulmanın genel yolu, verilen eğri parçasını, doğru parçalarının birleşimi gibi düşünmek, bu doğru parçalarının eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan kesik konilerin yüzey alanlarını bulup bunları toplamaktır. Bu alan gerçek alana çok yakındır.

Önce taban yarıçapı r , anadoğru uzunluğu ℓ olan bir koninin yanal yüzey alanını bulalım. Bu koni açılınca yarıçapı ℓ olan bir daire dilimi elde edilir. Bu dilimin alanı

$$A = \frac{2\pi r}{2\pi \ell} \cdot \pi \ell^2 = \pi r \ell$$

birimkaredir.

Şimdi taban yarıçapları r_1 , r_2 ve anadoğru uzunluğu L olan kesik koninin yanal yüzey alanını bulalım.

Kesik koninin yanal yüzey alanı, r_1 yarıçaplı koninin yanal yüzey alanı ile r_2 yarıçaplı koninin yanal yüzey alanının farkına eşittir. O halde

$$S = \pi r_1 (L + L_1) - \pi r_2 L_1 = \pi L_1 (r_1 - r_2) + \pi r_1 L$$

olur. Diğer taraftan

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{L_1}{L_1 + L} \Rightarrow (r_1 - r_2) L_1 = L r_2$$

olacağından

$$S = \pi r_2 L_2 + \pi r_1 L = \pi L (r_1 + r_2) = 2\pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) L$$

bulunur.

f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde türevli bir fonksiyon olsun. $y = f(x)$ eğrisinin Ox -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşacak olan yüzeyin alanını bulalım.

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $[a, b]$ aralığının bir parçalanması olsun. $[x_{k-1}, x_k]$ aralığına karşılık gelen eğri parçasının döndürülmesiyle oluşan yüzey bir kesik koniye çok yakın bir yüzeydir. Bu nedenle bu yüzeyin alanı, yaklaşık olarak

$$\Delta S_k \approx \pi [f(x_{k-1}) + f(x_k)] \cdot \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1}))^2]}$$

olur. Diferensiyel hesabın ortalama değer teoreminden, $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(t_k) (x_k - x_{k-1})$$

olacak şekilde bir t_k noktası vardır.

Ayrıca Δx_k çok küçük seçildiğinde x_{k-1} ve x_k noktaları da t_k noktasına yaklaşır. f sürekli olduğundan $f(x_{k-1})$ ve $f(x_k)$ da $f(t_k)$ değerine yaklaşır. Dolayısıyla

$$\Delta S_k \cong 2\pi |f(t_k)| \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2} \Delta x_k$$

yazılabilir. Tüm yüzey alanı, bu alan parçalarının toplamının $\|P\| \rightarrow 0$ için limitine eşit olacağından

$$S = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n 2\pi |f(t_k)| \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2} \Delta x_k$$

olur. Sağdaki toplam bir Riemann toplamı olduğundan

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

bulunur. $y = f(x)$ olduğundan

$$S = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

yazılabilir.

Benzer olarak, denklemi

$$x = u(y), \quad c \leq y \leq d$$

olan eğri parçasının Oy - eksenı etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_c^d |x| \sqrt{1 + (x')^2} dy$$

olur.

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

denklemlı eğri parçasının $y = k$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanı ile, denklemi

$$y = f(x) - k, \quad a \leq x \leq b$$

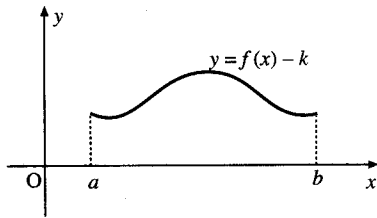
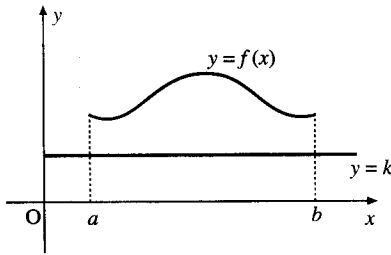
olan eğri parçasının $y = 0$ (Ox - eksenı) doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanı aynıdır. Diğer taraftan $(f(x) + k)' = f'(x)$ olacağından $y = f(x)$, denklemlı eğri parçasının $y = k$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanı

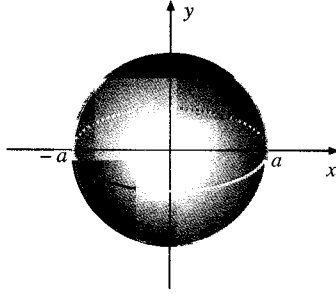
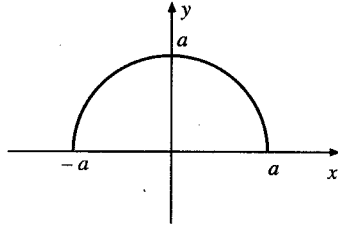
$$S = 2\pi \int_a^b |f(x) - k| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

olur. Bu formül, kısaca

$$S = 2\pi \int_a^b |y - k| \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

şeklinde yazılabilir.





ÖRNEK : a yarıçaplı bir kürenin yüzey alanını bulunuz.

Çözüm : $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarı çemberinin Ox - ekseninde dördürölmesiyle a yarıçaplı bir küre oluşur.

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

olacağından

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$$

dır. Buna göre, küre yüzeyinin alanı

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-a}^a |y| \sqrt{1 + (y')^2} dx \\ &= 2\pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi a \int_{-a}^a dx = 4\pi a^2 \end{aligned}$$

birimkaredir.

ÖRNEK : Denklemi

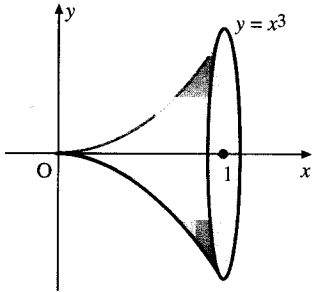
$$y = x^3, \quad 0 \leq x \leq 1$$

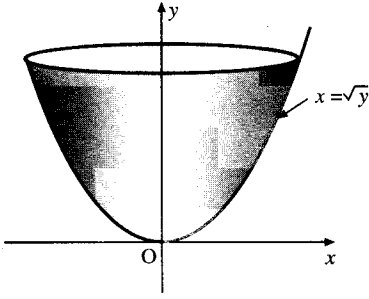
olan eğri parçasının Ox - ekseninde dördürölmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm : $f'(x) = 3x^2$ olduğundan

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1 + (y')^2} dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{36} \int_0^1 (1 + 9x^4)^{1/2} \cdot 36x^3 dx \\ &= \frac{\pi}{18} \cdot \frac{2}{3} (1 + 9x^4)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{27} (10^{3/2} - 1) \end{aligned}$$

br² olur.





ÖRNEK : Denklemi

$$x = \sqrt{y}, \quad 0 \leq y \leq 2$$

olan eğri parçasının Oy - eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını hesaplayınız.

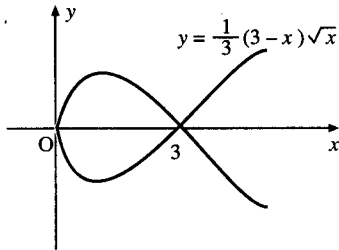
Çözüm : $x' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ olduğundan

$$1 + (x')^2 = 1 + \frac{1}{4y} = \frac{4y + 1}{4y}$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^2 x \sqrt{1 + (x')^2} dy = 2\pi \int_0^2 \sqrt{y} \cdot \frac{\sqrt{1 + 4y}}{2\sqrt{y}} dy \\ &= \pi \int_0^2 (1 + 4y)^{1/2} dy = \frac{\pi}{4} \int_0^2 (1 + 4y)^{1/2} 4dy \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4y)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{\pi}{6} (27 - 1) = \frac{13}{3} \pi \end{aligned}$$

birimkare olur.



ÖRNEK : $9y^2 = x(3-x)^2$ eğrisinin ilmeği Ox - eksenini etrafında döndürülüyor. Meydana gelen yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm : İlmeğin üst parçasının denklemi

$$y = \frac{1}{3} (3-x) \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 3$$

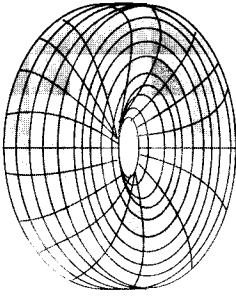
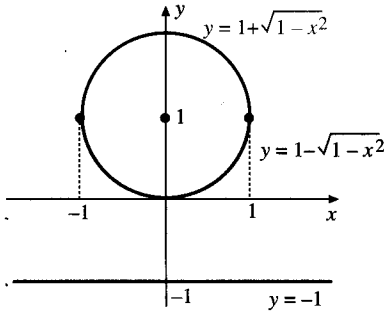
dür. Ayrıca

$$1 + (y')^2 = 1 + \left[\frac{1}{3} (-\sqrt{x}) + \frac{3-x}{2\sqrt{x}} \right]^2 = \left[\frac{x+1}{2\sqrt{x}} \right]^2$$

olacağından

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3} (3-x) \sqrt{x} \frac{x+1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{\pi}{3} \int_0^3 (3 + 2x - x^2) dx \\ &= \frac{\pi}{3} \left(3x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 3\pi \end{aligned}$$

birimkare olur.



ÖRNEK : $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ çemberinin $y = -1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm : Çemberin üst ve alt yarılarının denklemleri sırasıyla

$$y = 1 + \sqrt{1 - x^2} \quad \text{ve} \quad y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$$

dir. Söz konusu olan bu çember parçalarının $y = -1$ doğrusu etrafında dönmesiyle meydana gelen dönel yüzeylerin alanları toplamıdır.

Buna göre

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-1}^1 \left| 1 + \sqrt{1 - x^2} + 1 \right| \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} dx + 2\pi \int_{-1}^1 \left| 1 - \sqrt{1 - x^2} + 1 \right| \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 (2 + \sqrt{1 - x^2} + 2 - \sqrt{1 - x^2}) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}} dx = 8\pi \arcsin x \Big|_{-1}^1 = 8\pi \cdot \pi = 8\pi^2 \end{aligned}$$

br² olur.

Eğri denkleminin $y = f(x)$ biçiminde verilmesi halinde, yay diferensiyeli

$$d\ell = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

eğrinin $x = g(y)$ biçiminde verilmesi halinde

$$d\ell = \sqrt{1 + (x')^2} dy$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

eğri parçasının Ox - eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_a^b |y| d\ell$$

$x = g(y)$, $c \leq y \leq d$ denklemler eğri parçasının Oy - eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_c^d |x| d\ell$$

biçiminde yazılabilir.

Eğri parçasının denklemi

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases} \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

biçiminde verilirse, bu eğrinin Ox - eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanı,

$$d\ell = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

olduğundan,

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

olur. Buradaki türevler x ve y nin t ye göre türevleridir.

Söz konusu eğrinin Oy - eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |x| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

olacaktır.

ÖRNEK :

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

sikloid parçasının Ox - eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

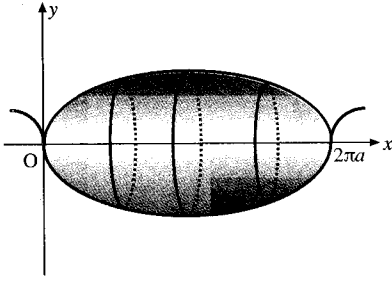
Çözüm :

$$\begin{aligned} (x')^2 + (y')^2 &= a^2 (1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = 2a^2 (1 - \cos t) \\ &= 2a^2 (1 - 1 + 2 \sin^2 \frac{t}{2}) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\ &= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 u du \\ &= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 u) \sin u du \\ &= 16\pi a^2 \left(-\cos u + \frac{1}{3} \cos^3 u \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{64}{3} \pi a^3 \end{aligned}$$

br² olur.



PROBLEMLER

1. Aşağıda denklemleri verilen eğri parçalarının Ox -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını hesaplayınız.

- (a) $y = \sqrt{x}$, $2 \leq x \leq 6$
- (b) $y = x^2$, $0 \leq x \leq 4$
- (c) $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 2$
- (ç) $y = (2x - x^2)^{1/2}$, $0 \leq x \leq 2$
- (d) $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{12x^3}$, $1 \leq x \leq 2$
- (e) $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$, $0 \leq x \leq \sqrt{2}$
- (f) $y = \frac{x^3}{9}$, $0 \leq x \leq 2$
- (g) $y = \tan x$, $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$
- (h) $y = \sqrt{2x - x^2}$, $0 \leq x \leq 2$
- (ı) $y = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{1/2}$, $1 \leq x \leq 2$
- (i) $y = x\sqrt{\frac{x}{a}}$, $0 \leq x \leq a$

2. Aşağıda denklemleri verilen eğri parçalarının Oy -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını hesaplayınız.

- (a) $y = x^3$, $0 \leq y \leq 1$
- (b) $x = \frac{1}{3}y^3$, $0 \leq y \leq 1$
- (c) $x = 2\sqrt{4 - y}$, $0 \leq y \leq \frac{15}{4}$
- (d) $x = \frac{1}{3}y^{3/2} - y^{1/2}$, $0 \leq y \leq 3$
- (e) $xy = 1$, $1 \leq y \leq 2$
- (f) $x = \sqrt{2y - 1}$, $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$

3. Aşağıda parametrik denklemleri verilen eğri parçalarının Ox -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeylerin alanlarını bulunuz.

- (a) $x = 1 - t$, $y = 2t^{1/2}$, $1 \leq t \leq 2$
- (b) $x = \frac{1}{2}t^2$, $y = t$, $\sqrt{3} \leq t \leq 2\sqrt{2}$
- (c) $x = \frac{2}{3}(1 - t)^{3/2}$, $y = \frac{2}{3}(1 + t)^{3/2}$, $-\frac{3}{4} \leq t \leq 0$
- (d) $x = \frac{1}{3}t^3$, $y = 2t^{3/2}$, $1 \leq t \leq 3$
- (e) $x = \sin^2 t$, $y = \sin t \cos t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
- (f) $x = t + \sin t$, $y = \cos t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$
- (g) $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

4. Aşağıda parametrik denklemleri verilen eğri parçalarının Oy -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeylerin alanlarını bulunuz.

- (a) $x = t^3$, $y = 2t + 3$, $-1 \leq t \leq 1$
- (b) $x = 2t + 1$, $y = t^2 + t$, $0 \leq t \leq 3$
- (c) $x = \frac{1}{t}$, $y = \ln t$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$
- (d) $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$
- (e) $x = 2e^{-t}$, $y = e^{-2t}$, $0 \leq t \leq 1$

5. Denklemi $x^{1/2} + y^{1/2} = 3$ olan eğrinin (4,1) ve (1,4) noktalarını birleştiren parçasının Ox -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

6. $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ çemberinin Ox -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

7. $8y^2 = x^2 - x^4$ denklemli kapalı eğrinin Ox -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

8. $x = a (2\cos t - \cos 2t)$

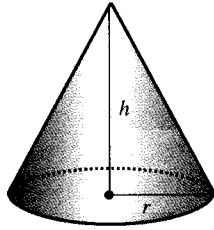
$y = a (2\sin t - \sin 2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

eğri parçasının Ox - eksenini etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını hesaplayınız.

9. $y = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt$, $1 \leq x \leq \sqrt{5}$

denklemlili eğri parçasının x - eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

10.



Yukarıda taban yarıçapı r birim, yüksekliği h birim olan dairesel koni verilmiştir. Bu koninin yanal yüz alanının

$$S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

birimkare olduğunu gösteriniz.

11. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ astroid eğrisinin üst yarısının Ox - eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanının

$$S = \frac{12}{5} \pi a^2$$

olacağını gösteriniz.

12. $[a, b] \subset [-1, 1]$ olsun.

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$
 , $a \leq x \leq b$

denklemlili eğri parçasının Ox - eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzey alanının

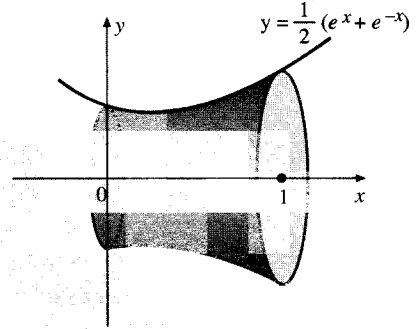
$$S = 2\pi (b - a)$$

olacağını gösteriniz. Bulunan sonuç $[a, b]$ aralığının $[-1, 1]$ içindeki konumuna bağlı mıdır?

13. r_1 ve r_2 pozitif sayılar olsun.

$(r_1, 0)$ ve (r_2, h) noktalarını birleştiren doğru parçasının Ox - eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan kesik koninin yanal alanını bulunuz.

14.

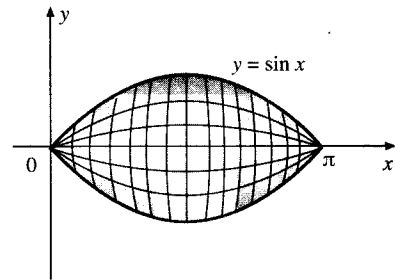


Denklemlili

$$y = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$
 , $0 \leq x \leq 1$

olan eğri parçasının Ox - eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

15.

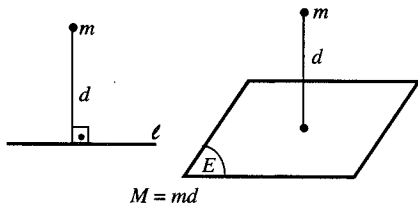


Denklemlili

$$y = \sin x$$
 , $0 \leq x \leq \pi$

olan eğri parçasının Ox - eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını hesaplayınız.

7.7 MOMENT VE AĞIRLIK MERKEZİ



Kütlesi m olan bir parçacığın bir noktaya bir eksene veya bir düzleme göre momenti denilince, parçacığın söz konusu nokta, eksen veya düzleme olan uzaklığı d olmak üzere,

$$M = m \cdot d$$

sayısı anlaşılır. Eğer cisim bir parçacık değil de, kütleleri $m_1, m_2, \dots, m_n$ olan bir sistem ise, bu sistemin nokta, eksen veya düzleme olan uzaklıkları $d_1, d_2, \dots, d_n$ olduğunda sistemin momenti

$$M = \sum_{k=1}^n m_k d_k$$

olur. Eğer cisim bir eğri parçası, bir düzlem parçası (levha) veya bir katı cisim gibi sürekli bir cisim ise yukarıdaki toplam bir sonlu toplam olmaktan çıkar. Böyle bir toplamda önce kütle kavramına bir anlam kazandırmak gerekir. İşe yoğunluk fonksiyonunu tanımlayarak başlayalım.

Bir eğri parçasının kütlesinin yay uzunluğuna göre değişme oranına, yani $\frac{dm}{d\ell} = \sigma$ oranına kütlenin **yoğunluk fonksiyonu** adı verilir. Bu durumda

$$dm = \sigma d\ell$$

olur. Benzer şekilde, momenti istenen parçacık bir levha parçası ise, dA alan diferensiyeli olmak üzere

$$dm = \sigma dA$$

dır. Parçacık bir katı cisim ise, dV hacim diferensiyeli olmak üzere,

$$dm = \sigma dV$$

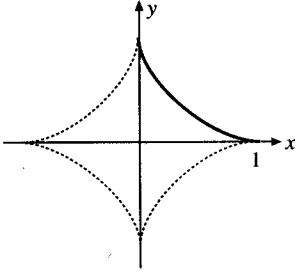
olur. Buna göre bir eğri parçası, bir düzlem parçası veya bir katı cisim olması durumunda cismin kütlesi, sırasıyla,

$$m = \int \sigma d\ell,$$

$$m = \int \sigma dA,$$

$$m = \int \sigma dV$$

olacaktır. Bu kavramlar genelde, çok katlı integrallere ihtiyaç gösterirler. Fakat bir kısmı belirli integrale de hesaplanabilir.



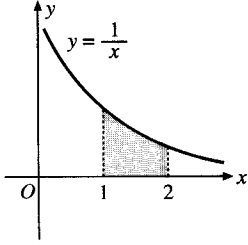
ÖRNEK : $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ astroid eğrisinin birinci bölgedeki parçası üzerine yerleştirilmiş bir telin her noktadaki yoğunluğu o noktanın apsisinin karesine eşittir. Bu telin kütlesini bulunuz.

Çözüm : $\sigma(x) = x^2$ olduğundan

$$\begin{aligned} m &= \int_0^1 \sigma(x) dl = \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx \\ &= \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}} dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{\frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{x^{2/3}}} dx \\ &= \int_0^1 x^2 \frac{1}{x^{1/3}} dx = \int_0^1 x^{5/3} dx = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

olur. Burada birim, kütle birimidir.

ÖRNEK : $y = \frac{1}{x}$ eğrisi, $x = 1$, $x = 2$ doğruları ve Ox - eksenine sınırlanan bölgeye yerleştirilen bir levhanın her noktadaki yoğunluğu, o noktanın apsisinin 2 katıdır. Bu levhanın kütlesini bulunuz.



Çözüm : $\delta(x) = 2x$, $dA = ydx = \frac{1}{x} dx$ olacağından

$$\begin{aligned} m &= \int_1^2 \sigma(x) dA = \int_1^2 \sigma(x)y dx = \int_1^2 2x \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^2 2 dx = 2x \Big|_1^2 = 2 \end{aligned}$$

bulunur.

M momenti kütle ile uzaklığın çarpımı olduğundan, momenti istenen cisim

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

denklemleri bir eğri parçası ise bunun Ox - eksenine göre momenti,

$$M_x = \int_a^b y dm = \int_a^b y \sigma(x) dl = \int_a^b y \sigma(x) \sqrt{1 + (y')^2} dx ,$$

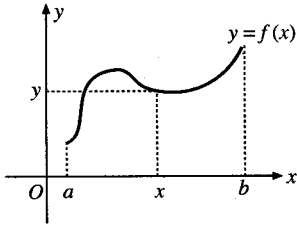
Oy - eksenine göre momenti

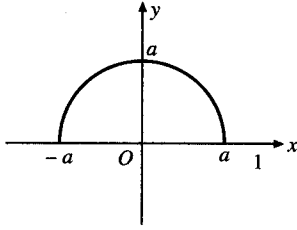
$$M_y = \int_a^b x dm = \int_a^b x \sigma(x) \sqrt{1 + (y')^2} dx ,$$

$O(0,0)$ noktasına göre momenti de

$$M_0 = \int_a^b \sqrt{x^2 + y^2} \sigma(x) \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

olacaktır.





ÖRNEK : $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarı çemberi biçimindeki bir homogen telin $0x$ - eksenine göre momentini hesaplayınız.

Çözüm : Cisim homogen ise yoğunluğu sabittir. $\sigma(x) = k$ olsun.

$$1 + (y')^2 = 1 + \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right)^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$$

olacağından

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-a}^a y \sigma \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} k \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= ka \int_{-a}^a dx = 2ka^2 \end{aligned}$$

bulunur.

Öyle bir $(\bar{x}, \bar{y})$ noktası bulalım ki

$$\bar{x} \cdot m = M_y, \quad \bar{y} \cdot m = M_x$$

olsun. Bu durumda tüm kitlenin $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasında toplandığı düşünülebilir. Bu $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasına cismin kütle (ağırlık) merkezi denir. Şu halde ağırlık merkezinin koordinatları

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \int x dm$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \int y dm$$

olacaktır. Ağırlık merkezi hesaplanan cismin şekline göre dm hesaplanıp integralde yerine konur.

ÖRNEK : $y = \sqrt{4 - x^2}$ yarıçemberi biçimindeki bir telin yoğunluğu, her noktada o noktanın ordinatının 2 katıdır. Bu telin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm : Verilen yarı çemberin parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

olur.

$$\begin{aligned} dm &= \sigma dl = 2y \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = 4 \sin t \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} dt \\ &= 8 \sin t dt \end{aligned}$$

olacağından

$$m = \int dm = \int_0^\pi 8 \sin t dt = 8(-\cos t) \Big|_0^\pi = 16$$

bulunur.

$$M_x = \int_0^\pi y dm = \int_0^\pi 2 \sin t \cdot 8 \sin t \, dt = 16 \int_0^\pi \sin^2 t \, dt$$

$$= 8 \int_0^\pi (1 - \cos 2t) \, dt = 8 \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^\pi = 8\pi$$

olduğundan

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{8\pi}{16} = \frac{\pi}{2}$$

dir.

$$M_y = \int_0^\pi x \, dm = \int_0^\pi 2 \cos t \cdot 8 \sin t \, dt = 16 \int_0^\pi \sin t \cos t \, dt$$

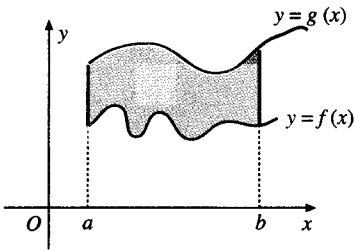
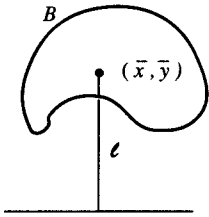
$$= 16 \frac{1}{2} \sin^2 t \Big|_0^\pi = 0$$

olduğundan

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = 0$$

bulunur. Şu halde telin ağırlık merkezi $A\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ noktasıdır.

Bir eğrinin veya bölgenin ağırlık merkezinin bilinmesi, dönel yüzeylerin alan ve hacimlerinin hesaplanmasını kolaylaştırır. Şimdi M.Ö. 300 yıllarında Pappus tarafından verilen fakat Matematik dünyasına Guldin tarafından kazandırılan iki teorem verelim.



TEOREM 7.1 (Birinci Pappus – Guldin Teoremi) :

Bir düzlemsel bölgenin kendisiyle kesismeyen bir eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi, bu bölgenin alanı ile bölgenin ağırlık merkezinin sözü geçen dönme sırasında aldığı yolun çarpımına eşittir.

İspat : B bölgesinin alanı A , ağırlık merkezi $(\bar{x}, \bar{y})$ olsun. B bir düşey sabit bölge olup $B = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ biçiminde tanımlanmış olsun. Burada f ve g negatif olmayan sürekli fonksiyonlardır. Genellikle bir şey kaybetmeksizin dönme eksenini olarak Ox - eksenini alalım. Yoğunluk fonksiyonunu 1 olarak seçelim. B bölgesinin Ox - eksenini etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmi

$$V = \pi \int_a^b [g^2(x) - f^2(x)] \, dx$$

olur. B bölgesinin ağırlık merkezinin ordinatı

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{\sigma A} \int_a^b \sigma y \, dA = \frac{1}{A} \int_a^b y (g(x) - f(x)) \, dx$$

olur.

$$y = \frac{g(x) + f(x)}{2}$$

alınabileceğinden

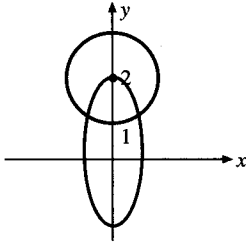
$$\bar{y} = \frac{1}{2A} \int_a^b [g^2(x) - f^2(x)] dx = \frac{1}{2A} \cdot \frac{V}{\pi}$$

yazılabilir. Buradan

$$V = (2\pi \bar{y})A$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

ÖRNEK : $x^2 + (y - 2)^2 \leq 1$ dairesinin $0x$ - eksenine etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.



Çözüm : Bölgenin ağırlık merkezi $(0, 2)$ noktasıdır. Bu nokta $0x$ - eksenine etrafında 360° döndürüldüğünde 2 birim yarıçaplı bir çember oluşur. Bu çemberin çevresi $2\pi r = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$ birimdir. Döndürülen dairenin alanı $\pi r^2 = \pi$ olacağından

$$V = 4\pi \cdot \pi = 4\pi^2$$

birimküp olur.

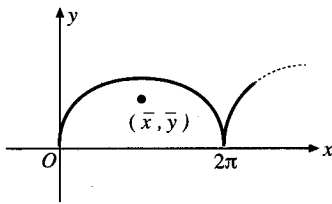
TEOREM 7.2 (İkinci Pappus – Guldin Teoremi) :

Bir düzlemsel eğrinin kendisiyle kesişmeyen bir eksen etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı, bu eğrinin uzunluğu ile eğrinin ağırlık merkezinin dönme sırasında aldığı yolun çarpımına eşittir.

Bu teoremin ispatı birinci teoremin ispatına benzer olduğundan ispatı okuyucuya bırakıyoruz.

ÖRNEK : Parametrik denklemi

$$\begin{aligned} x &= t - \sin t \\ y &= 1 - \cos t \end{aligned}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



olan sikloid yayının $0x$ - eksenine etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{aligned} dL &= \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt \\ &= \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \sqrt{2 \left[1 - \left(1 - \sin^2 \frac{t}{2} \right) \right]} dt \\ &= 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt \end{aligned}$$

olduğundan

$$\ell = \int_0^{2\pi} d\ell = \int_0^{2\pi} 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8$$

birim olur.

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{m} \int y dm = \frac{1}{\sigma A} \int y \sigma d\ell = \frac{1}{\ell} \int y d\ell \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) 2 \sin \frac{t}{2} dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2} \right) \sin \frac{t}{2} dt \\ &= \int_{-1}^0 (1 - u^2) du = u - \frac{u^3}{3} \Big|_{-1}^0 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

bulunur.

$0x$ - ekseninden $\frac{2}{3}$ birim uzakta bulunan bir nokta $0x$ - eksenini etrafında döndürüldüğünde oluşan çemberin çevresi

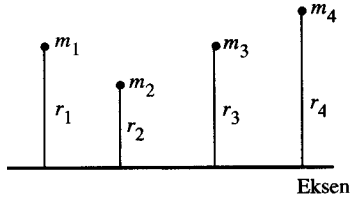
$$\zeta = 2\pi r = 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

birim olacağından, dönel yüzeyin alanı

$$S = \frac{4\pi}{3} \cdot 8 = \frac{32}{3} \pi$$

br^2 olur.

Kütleleri, $m_1, m_2, \dots, m_n$ olan $B_1, B_2, \dots, B_n$ noktalarından oluşan bir sistemi düşünelim. Bu noktaların bir eksene olan uzaklıkları sırasıyla $r_1, r_2, \dots, r_n$ olsun



$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2$$

ifadesine sistemin $0x$ - eksenine göre eylemsizlik (atalet) momenti denir.

Eğer sistem bir eğri parçası, bir düzlem parçası veya bir katı cisim ise yukarıdaki toplam bir sonlu toplam olmaktan çıkar. Sistem küçük parçalara ayrılıp herbirinin eylemsizlik momenti hesaplanıp $\|P\| \rightarrow 0$ için limit alınırsa bu bizi integrale götürür. Bu durumda

$$I = \int r^2 dm$$

olur.

Eğer eylemsizlik momenti hesaplanacak olan cisim

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

denklemleri bir eğri parçası, eksen $0x$ - eksenini ise

$$dm = \sigma d\ell = \sigma \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

olacağından, eğrinin Ox - eksenine göre eylemsizlik momenti

$$I_x = \int_a^b \sigma y^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

olur. Eğer eğri denklemi

$$x = u(t), \quad y = v(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

biçiminde, parametrik olarak verilirse

$$I_x = \int_{\alpha}^{\beta} \sigma v^2(t) \sqrt{[u'(t)]^2 + [v'(t)]^2} dt$$

bulunur.

Benzer şekilde, eğrinin Oy - eksenine göre eylemsizlik momenti

$$I_y = \int_{\alpha}^{\beta} \sigma u^2(t) \sqrt{[u'(t)]^2 + [v'(t)]^2} dt$$

olacaktır.

ÖRNEK : R yarıçaplı çember şeklindeki bir homogen halkanın tüm kütlesi m olduğuna göre, bu halkanın kendi düzleminde bulunan ve çembere teğet olan bir eksene göre eylemsizlik momentini bulunuz.

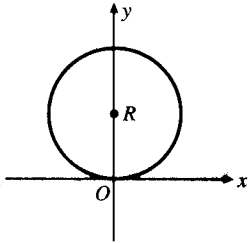
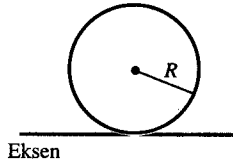
Çözüm : Çemberin merkezi $(0, R)$, eksen de Ox - eksenini olsun. Çemberin bir parametrik denklemi

$$x = R \cos t, \quad y = R + R \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

olacağından

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^{2\pi} \sigma y^2 \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \sigma \int_0^{2\pi} R^2 (1 + \sin t)^2 \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \sin^2 t} dt \\ &= \sigma R^3 \int_0^{2\pi} (1 + 2 \sin t + \sin^2 t) dt \\ &= \sigma R^3 \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \sin t + \frac{1 - \cos 2t}{2}\right) dt \\ &= 3R^3 \sigma \pi = \frac{3}{2} (2\pi R \sigma) R^2 = \frac{3}{2} m R^2 \end{aligned}$$

olur, zira $m = 2\pi R \sigma$ dir.



7.8 BAZI LİMİTLERİN İNTEGRAL YARDIMIYLA HESABI

Bu kesimde bazı özel tipteki limitlerin integraller yardımıyla nasıl hesaplanacağını göreceğiz.

TEOREM 7.3 : Eğer $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

dir.

İspat : $[a,b]$ aralığını n eşit parçaya bölelim. Her bir alt aralığın uzunluğu

$$\Delta x_k = \frac{b-a}{n} \text{ dir. } \xi_k = a + k \frac{b-a}{n} \text{ alınırsa}$$

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

olur. Sol taraf f nin $[a,b]$ aralığındaki integrali olduğundan, teoremdaki eşitlik doğrudur. Özel olarak $a=0$, $b=1$ alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

bağıntısı bulunur.

ÖRNEK : $\lambda \neq -1$ olmak üzere, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^\lambda + 3^\lambda + \dots + n^\lambda}{n^{\lambda+1}} = \frac{1}{\lambda+1}$ olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned} \text{Çözüm : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^\lambda + 3^\lambda + \dots + n^\lambda}{n^{\lambda+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^\lambda + \left(\frac{2}{n}\right)^\lambda + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^\lambda \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\lambda = \int_0^1 x^\lambda dx = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{\lambda+1} \end{aligned}$$

olur.

ÖRNEK : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{n-1}{n}} + e^{\frac{n}{n}} \right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} + e^{\frac{n}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1$$

bulunur.

PROBLEMLER

1. Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \sin t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

olan eğri biçiminde kıvrılmış bir telin yoğunluk fonksiyonu $\sigma(t) = \cos \frac{t}{2}$ olduğuna göre, kütlesi ne olur?

2. $y = x^3$, $y = -x$ ve $x = 2$ tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen bir levhanın her noktadaki yoğunluğu o noktanın apsisine eşittir. Bu levhanın kütlesini bulunuz.

3. (x, y) noktasındaki yoğunluğu y olan bir tel, parametrik denklemi

$$x = 2\cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

olan eğri parçası biçiminde kıvrılıyor.

Bu telin kütlesini bulunuz.

4. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $x = 0$, $y = 0$ doğruları tarafından sınırlanan üçgenin Ox ve Oy - eksenlerine göre momentini bulunuz.

5. Kenar uzunlukları a ve b olan dikdörtgen şeklindeki bir levhanın kenarlarına göre momentlerini bulunuz.

6. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarım çemberinin ağırlık merkezini bulunuz.

7. $y = 2\sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 4$ parabol parçasının ağırlık merkezini bulunuz.

8. $y = \sin x$ eğrisinin $[0, \pi]$ aralığındaki parçası ile Ox - eksen arasında kalan levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

9. $y = \cosh x$ eğrisinin apsisleri -1 ve 1 olan noktalar arasındaki yayının ağırlık merkezini bulunuz.

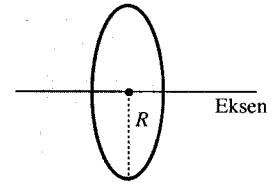
10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin birinci bölgedeki parçasının ağırlık merkezini bulunuz.

11. $y = x^2$ ve $y = \sqrt{x}$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen homogen levhanın ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

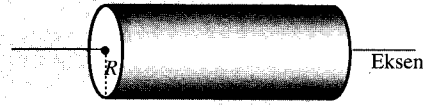
12. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ eğrisiyle koordinat eksenleri arasında kalan bölgeye yerleştirilen bir levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

13. Kenar uzunlukları a ve b olan bir dikdörtgenin kendi kenarlarına göre eylemsizlik momentini bulunuz.

14. Kütlesi m , yarıçapı R olan bir halkanın merkezinden geçen ve çember düzlemine dik olan bir eksene göre eylemsizlik momentini bulunuz.



15.



Yarıçapı R , uzunluğu ℓ ve kütlesi m olan bir dairesel silindirin eksenine göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.

16. $y = x^2$ ve $x = y^2$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin Ox - eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini Pappus – Guldin Teoremi yardımıyla hesaplayınız.

17. Yarım dairenin ağırlık merkezini Pappus – Guldin Teoremi yardımıyla hesaplayınız.

18. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 4} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right)$

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. $y = 2^{-x} - \frac{1}{4}$ eğrisiyle koordinat eksenleri arasında kalan kapalı bölgenin alanını hesaplayınız.
2. $y = -\frac{10}{1+x^2}$, $y = 2 - x^2$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.
3. Birinci bölgede $y = x + 1$ doğrusu, $y = \cos x$ eğrisi ve Ox - eksenini arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.
4. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ ve $x + y = 1$ tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.
5. $y^2 = x^2(1 - x^2)$ eğrisi tarafından sınırlanan kapalı bölgenin alanını bulunuz.
6. $x = y^2(1 - y)$ eğrisiyle koordinat eksenleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.
7. $y = (1 - x^2)^{-\frac{1}{4}}$ eğrisi, $x = 0$ ve $x = \frac{1}{2}$ doğruları ile Ox - eksenini etrafında sınırlanan bölge Ox - eksenini etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini hesaplayınız.
8. Birinci bölgede $y = \sin x$ eğrisi, $y = 1$ doğrusu ve Oy - eksenini arasında kalan bölge Oy - eksenini etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.
9. $y^2 = \frac{ax^3 - x^4}{a^2}$ eğrisi tarafından sınırlanan kapalı bölgenin Ox - eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini hesaplayınız.
10. $y^2 = \frac{3}{2}x$, $x^2 + y^2 = 1$ eğrileri tarafından sınırlanan kapalı bölge Ox - eksenini etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.
11. $y = \frac{\ln x}{x^2}$ eğrisi, $x = 1$ ve $x = e$ doğruları ile Ox - eksenini etrafında sınırlanan bölgenin Oy - eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.
12. **"Aynı yüksekliğe sahip iki cismin bir doğruya dik olan düzlemlerle elde edilen kesitleri eşit alana sahip iseler bu iki cisim eşit hacimlidir."** şeklinde ifade edilen ikinci Cavalieri Prensibini ispat ediniz.
13. $x^2 + y^2 = R^2$ çemberinin birinci bölgedeki parçasının Oy - eksenine göre eylemsizlik momentini bulunuz. (Çemberin homogen olduğu varsayılıyor)
14. a ve b pozitif sayılar olsun. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ doğrusu ile koordinat eksenleri arasında kalan bölgeye yerleştirilen homogen bir levhanın Ox ve Oy - eksenlerine göre eylemsizlik momentlerini bulunuz.
15. Yarıçapı R , merkez açısı 2α olan bir çember yayının ağırlık merkezini bulunuz.
16. $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ eğrisinin $x = 0$ ve $x = \ln 2$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu hesaplayınız.
17. $y = \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2 - 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]$ eğrisinin $x = 1$ ve $x = 3$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu bulunuz.
18. $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t$
 $y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \quad 0 \leq t \leq \pi$
denklemleri eğri parçasının uzunluğunu hesaplayınız.
19. $y = \frac{x^3}{3a^2} + \frac{a^2}{4x}$ eğrisinin $x = a$ ve $x = 2a$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu hesaplayınız. Bu parçanın Oy - eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.